Lezione 79 – 22.4.2020

ANALISI MATEMATICA
LEZIONE 79 22.4.2020

SPAZIO METRICO (X, d)

$d(x,y)$ distanza tra i punti x, y.

$x_n \to x$ se $d(x_n, x) \to 0$

COMPLETEZZA

le successioni di Cauchy convergono

x_n è di Cauchy se

$\forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall k, j \geq N : d(x_k, x_j) < \varepsilon$

CONVERGENZA UNIFORME

$C^0([a,b])$ $\qquad f : [a,b] \to \mathbb{R}$

$C([a,b])$ $\qquad$ $g:[a,b]\to\mathbb{R}$

f continua

$$d_\infty(f,g)=\sup_{x\in[a,b]}|f(x)-g(x)|$$

<u>distanza uniforme</u>

$C^0([a,b])$ con d_∞ è <u>completo</u>

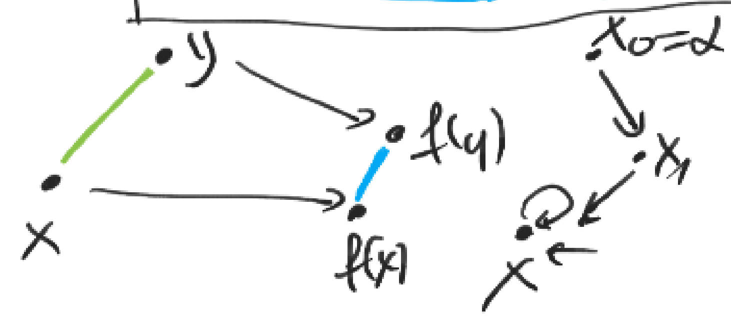
TEOREMA di BANACH-CACCIOPPOLI (DELLE CONTRAZIONE)

Se (X,d) è uno spazio metrico completo

se $f:X\to X$ soddisfa la seguente proprietà: $\exists L<1$

$$\forall x,y\in X:\ \boxed{d(f(x),f(y))\le L\, d(x,y)}$$

f è una contrazione



Allora $\exists!\, x\in X$ tale che $f(x)=x$

Inoltre scelto $\alpha \in X$ qualunque e definita la successione

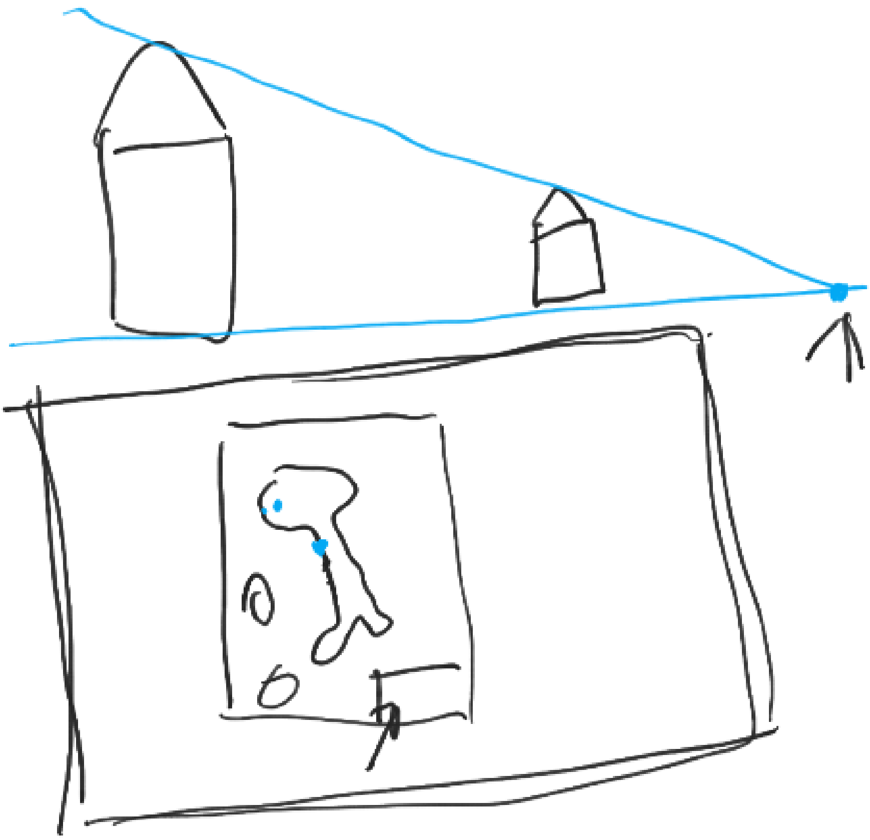
punto fisso

$$\begin{cases} x_0 = \alpha \\ x_{n+1} = f(x_n) \end{cases}$$

risulta $x_n \to \bar{x}$ (l'unico punto fisso)

Es $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

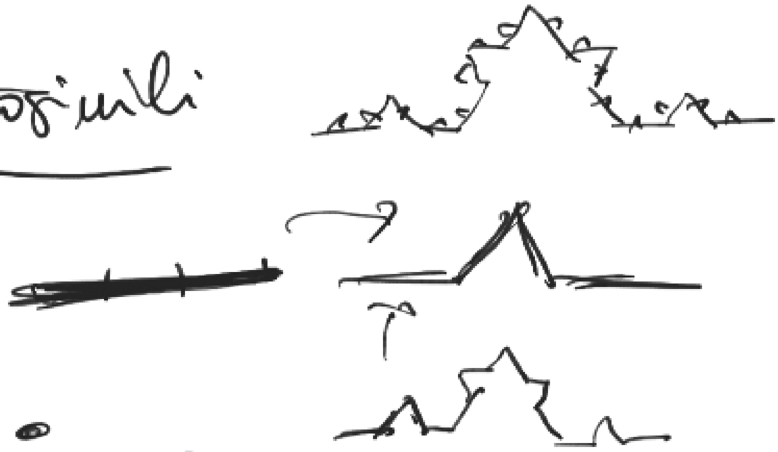
$f(x) = L \cdot x + q$ $\qquad L \in \mathbb{R}$, $L < 1$



$f : \text{Italia} \to \text{Italia}$

$L = 1 : 100000$ $< 1.$

Frattali autosimili



Esercizio $\quad d(f(x), f(y)) < d(x,y)$

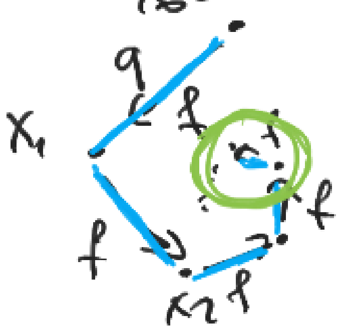
Non basta.

---

dim $\quad (X, d)$ sp. m. completo

$\alpha \in X$ qualunque

$$\begin{cases} x_0 = \alpha \\ x_{n+1} = f(x_n) \end{cases}$$



$x_0 = \alpha$

$x_1 = f(x_0) = f(\alpha)$

$d(x_1, x_0) = q$ Ipotesi

$$d(x_2, x_1) = d(f(x_1), f(x_0)) \le L \cdot d(x_1, x_0) = L \cdot q$$

$$d(x_3, x_2) = d(f(x_2), f(x_1)) \le L \cdot d(x_2, x_1) \le L^2 \cdot q$$

$\vdots$

$$d(x_{n+1}, x_n) \le L^n \cdot q.$$

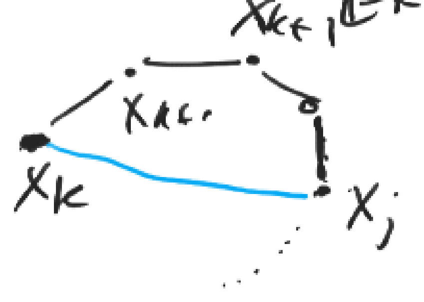
$$\sum_{n=1}^{+\infty} L^n \cdot q < +\infty$$

x_n è di Cauchy?

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N : d(x_k, x_j) < \varepsilon$ se $k, j > N$

$$j > k : \quad d(x_k, x_j) \le \sum_{i=k}^{j-1} d(x_i, x_{i+1}) \le \sum_{i=k}^{j} L^i \cdot q \le *$$

$$* \le \sum_{i=k}^{+\infty} L^i \cdot q < \varepsilon.$$



coda di una serie convergente

$\forall k > N$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N : \sum_{i=N}^{+\infty} L^i q < \varepsilon .$$

x_n è di Cauchy.

(X, d) è completo $\Rightarrow$ $\boxed{x_n \to x \in X}$.

x è un punto fisso?

$$\boxed{x_{n+1} = f(x_n)} \to f(x)$$

$$\downarrow$$

$$x$$

$$d(f(x_n), f(x)) \leq L \cdot d(x_n, x)$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad \downarrow$$

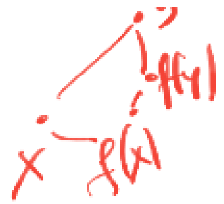
$$0 \qquad\qquad\qquad 0$$

$\boxed{x = f(x)}$. ok.

x è l'unico punto fisso?

a

$f(x) = x$, $f(y) = y$



$$d(f(x), f(y)) \le L \cdot d(x,y)$$

$$\begin{aligned} &\quad \| \\ &d(x,y) \quad \Rightarrow \quad d(x,y) = 0. \\ &\qquad\qquad\qquad\quad\ \Downarrow \\ &\qquad\qquad\qquad\quad\ x = y. \end{aligned}$$

$\square$

<u>Def</u> (lipschitz) $f : X \to Y$

X, Y spazi metrici diremo che

f è L-lipschitz se $\exists L \in \mathbb{R}$:

$$d_Y(f(x_1), f(x_2)) \le L \cdot d_X(x_1, x_2)$$

$\forall x_1, x_2 \in X$.

<u>Es</u> se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f derivabile

allora f è L-lipschitz.

$$\Longleftrightarrow \qquad |f'(x)| \leq L \quad \forall x.$$

<u>dim</u> $\quad |f(x_1) - f(x_2)| \leq L\, |x_1 - x_2|$

$$\left| \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \right| \leq L.$$

Se f è L-lipschitz $\Rightarrow |f'(x)| \leq L$

Viceversa se $|f'(x)| \leq L \quad \forall x$:

$$f(x_1) - f(x_2) = f'(x) \cdot (x_1 - x_2)$$

$$\frac{|f(x_1) - f(x_2)|}{|x_1 - x_2|} = |f'(x)| \leq L \qquad \square$$

EQ. DIFFERENZIALI

Problema di Cauchy:

o sistemi

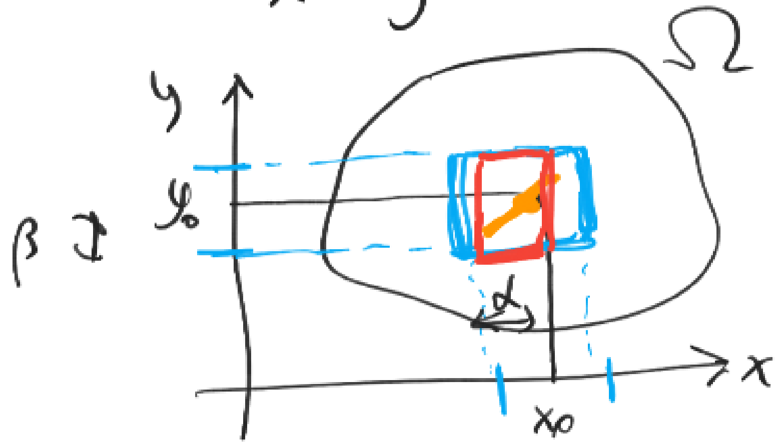
$\{\, y'(x) = f(x, y(x))$ ← eq. scalari

$$(*)\begin{cases} u'(x) = f(x, u(x)) \\ u(x_0) = y_0 \end{cases} \leftarrow \text{forma normale.}$$

Teorema (Cauchy-Lipschitz) esistenza e unicità locale.

Sia $f : \Omega \subseteq \underset{x}{\mathbb{R}} \times \underset{y}{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$, continua

$(x_0, y_0) \in \Omega$



supponiamo esistano $\alpha, \beta > 0$

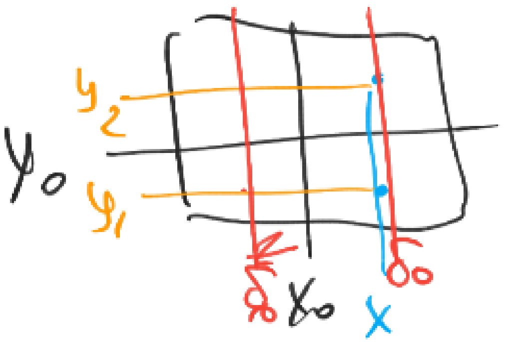
$$C_{\alpha,\beta} = \{(x,y) : |x - x_0| \leq \alpha,\ |y - y_0| \leq \beta\}$$
$$= [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \times [y_0 - \beta, y_0 + \beta].$$

tali che $C_{\alpha,\beta} \subseteq \Omega$ e esiste

$L \in \mathbb{R}$: (L non dipende da x).

$$\boxed{\left|f(x,y_1)-f(x,y_2)\right| \le L\cdot\left|y_1-y_2\right|}$$

$\forall x\in[x_0-\alpha, x_0+\alpha]$, $\forall y : [y_0-\beta, y_0+\beta]$.



CONDIZIONE DI CAUCHY-LIPSCHITZ

($f(x,y)$ è lipschitz rispetto a y uniformemente rispetto ad x.)

Allora esiste $\delta_0>0$ tale che per ogni intervallo $I\subseteq[x_0-\delta_0, x_0+\delta_0]$ esiste una unica funzione $u: I\to\mathbb{R}$ di classe C^1 $\forall x\in I, (x,u(x))\in\Omega$. che risolve:

$$\begin{cases} u'(x) = f(x,u(x)) \\ u(x_0) = y_0. \end{cases} \quad \forall x\in I$$

dim $\boxed{u'(x) = f(x,u(x))} \leftarrow$

$$\int_{x_0}^{x} u'(t)\,dt = \int_{x_0}^{x} f(t,u(t))\,dt$$

$$\underbrace{\int_{x_0}^{x} u'(t)\,dt}_{=\,[u(t)]_{x_0}^{x}} \qquad [u(t)]_{x_0}^{x} = u(x) - \underbrace{u(x_0)}_{=\,y_0}$$

$$\boxed{u(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t,u(t))\,dt} \quad \forall x.$$

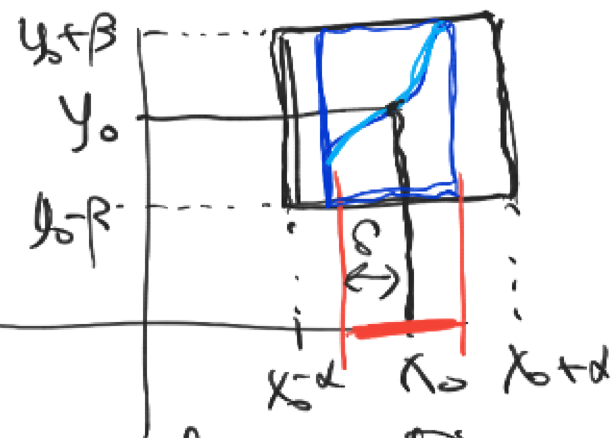
$$u = T(u)$$

$$\boxed{T(u)(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t,\underline{u(t))}\,dt.}$$

Perché abbia senso è necessario

che $(t, u(t)) \in \Omega$. $\quad C_{\alpha,\beta}$

Considero $C_{\alpha,\beta}$.



Per Weierstrass, siccome f è continua,

f ha max e min su $C_{\alpha,\beta}$

Sia M : $|f(x,y)| \le M$ $\forall (x,y) \in C_{\alpha,\beta}$

Consideriamo un intervallo di raggio $\delta_0 < \alpha$ $I \subseteq [x_0-\delta_0, x_0+\delta_0]$ e mettiamo in considerazione l'insieme

$$X = \{ u : I \to [y_0-\beta, y_0+\beta], \ u \text{ continua} \}$$

Voglio scegliere δ_0 abbastanza piccolo in modo che

$$T : X \to X \qquad (T : X \to C^0)$$

è ben definito

$$|T(u)(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^{x} f(t,u(t))\, dt \right|$$

$$\le \left| \int_{x_0}^{x} |f(t,u(t))|\, dt \right|$$

$$\le \left| \int_{x_0}^{x} M\, dt \right|$$

$$\leq |x-x_0|\cdot M \leq \delta_0'\cdot M \leq \beta$$

vero se $\delta_0 \leq \frac{\beta}{M}$.

$T: X \to X$ ok!

T è una contrazione?

X è completo per la distanza d_∞

$$d_\infty(T(u),T(v)) \overset{?}{\leq} L\cdot d_\infty(u,v).$$

$$\overset{\shortparallel}{\sup_{x\in I}} \left| T(u)(x) - T(v)(x) \right|$$

$$|T(u)(x) - T(v)(x)| = \left| \int_{x_0}^{x} f(t,u(t)) - f(t,v(t))\,dt \right|$$

$$\leq \left| \int_{x_0}^{x} \left| f(\underset{t}{t},\underset{y_1}{u(t)}) - f(\underset{t}{t},\underset{y_2}{v(t)}) \right| dt \right|$$

$$\leq \left| \int^{x} L\cdot|u(t)-v(t)|\,dt \right|$$

$$|u(t) - v(t)| \leq d_\infty(u,v)$$

$$\leq \left| \int_{x_0}^{x} L \cdot d_\infty(u,v)\, dt \right|$$

$$\leq |x - x_0| \cdot L \cdot d_\infty(u,v).$$

$$\leq \delta_0 \cdot L \cdot d_\infty(u,v)$$

$$d_\infty(T(u), T(v)) \leq \underbrace{\delta_0 \cdot L}_{} \cdot d_\infty(u,v)$$

se è < 1

ho una contrazione. $\delta_0 < \frac{1}{L}$.

$\square$