ricevimento 17.4.2020 (studio qualitativo)

ANALISI MATEMATICA (B)

17.4.2020

approfondimento

iniziamo alle 9:10

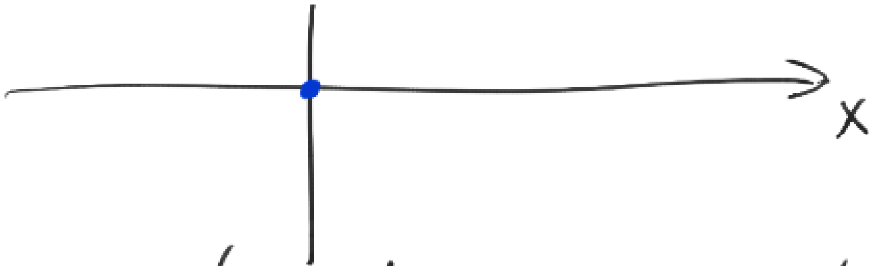
Studio qualitativo

Equazioni del I ordine in forma normale:

$$u'(x) = f(x, u(x))$$

Esempio $\qquad f(x,y) = (y^2-1)\cdot x \cdot \sin x$

$$\begin{cases} u' = (u^2-1)\cdot x \cdot \sin x \\ u(0) = 0 \end{cases}$$



Teorema (esistenza e unicità)

Problema di Cauchy
$$\begin{cases} u'(x) = f(x, u(x)) & \leftarrow \text{eq. diff.} \\ u(x_0) = y_0 & \leftarrow \text{dato iniziale} \end{cases}$$

Se $f = f(x,y)$ soddisfa (C.L.) la condizione di Cauchy-Lipschitz allora esiste una unica soluzione $u = u(x)$ del problema di Cauchy in un intorno del punto x_0.
aperto

□

Se $f \in C^1$ allora f soddisfa la condizione di C.L. ←

Si parla di soluzioni massimali definite su un intervallo.

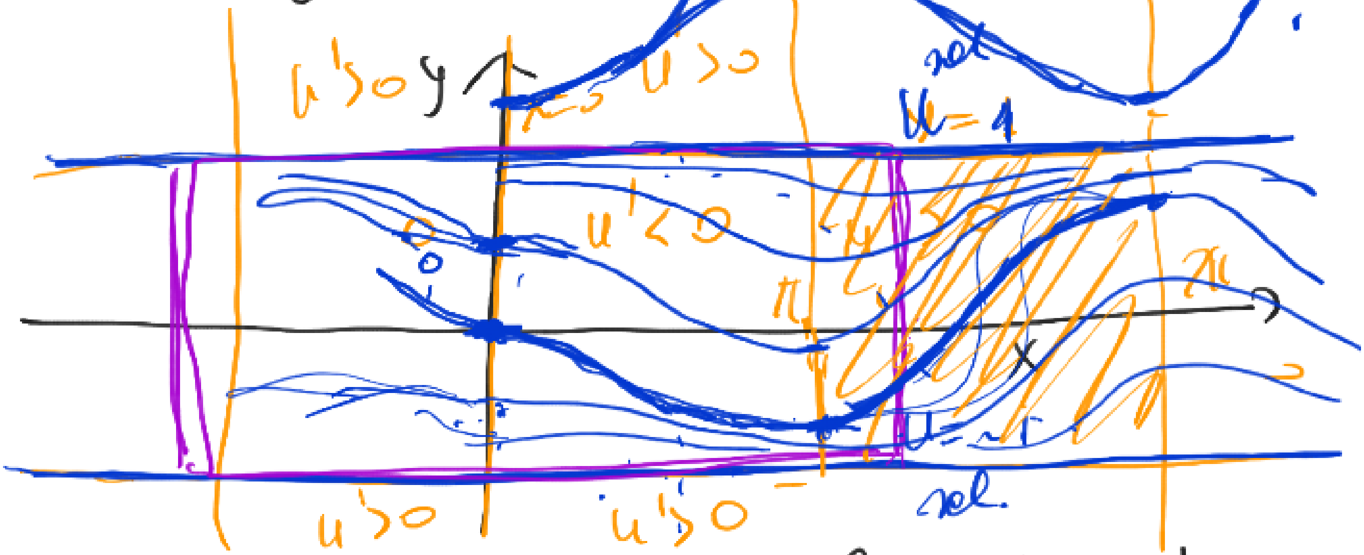
Esempio

u è globale

Pb di Cauchy

$$\begin{cases} u' = (u^2-1)\cdot x \cdot \sin x \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

eq diff



Studiare il segno della derivata

$u' = f(x,u)$ $\qquad$ $u'(x) > 0$

$\Updownarrow$

$f(x,u(x)) > 0$

Devo studiare

$$\{ f(x,y) \gtreqless 0 \}$$

Teorema le soluzioni massimali escono da ogni compatto $K \subseteq \Omega$.

$f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

chiuso e limitato

" la soluzione esce ... "

alla frontiera di Ω

$$u'(x) = (u^2(x)-1)\cdot x\cdot \sin(x)$$

$$\Rightarrow u''(x) = 2u(x)\, u'(x)\, x \sin(x) + (u^2(x)-1)\cdot \sin(x) + (u^2(x)-1)\cdot x \cos x$$

$$u''(x) = g(x, u(x)).$$

$$\begin{cases} u' = (u^2-1)\, x \sin x \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

u è dispari.

$$v(x) = -u(-x) \qquad u(-x) = -v(x)$$

$$v'(x) = +u'(-x) = (u^2(-x)-1)\cdot(-x)\sin(-x)$$
$$= ((-v(x))^2-1)\, x\cdot \sin x$$

$$= \left(v^2(x) - 1\right) x \cdot \sin x$$

v risolve la stessa EDO

$$v(0) = -u(-0) = -u(0) = -0 = 0$$

v risolve lo stesso pb. di Cauchy.

$$\Rightarrow v \equiv u.$$

$$\left(y^2 - 1\right) x \sin x > 0$$

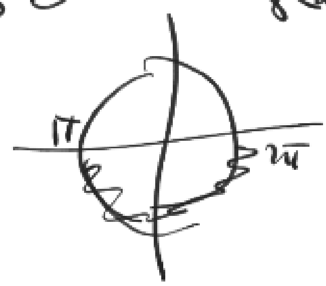
$$\underbrace{(y+1)(y-1)}\ \underbrace{x \sin x}$$

se $\boxed{-1 < y < 1}$

$$y^2 - 1 < 0$$

$$x \cdot \sin x < 0$$

se $x > 0$ $\quad \sin x < 0$



$$\boxed{\pi < x < 2\pi}$$

Riccati

$$u' = f(x, u(x)).$$

$$\begin{cases} u' = u^2 + x \end{cases}, \quad f(x,y) = x + y^2$$

$$\begin{cases} u(0) = 0 \end{cases}$$

$f = 0$

$x + y^2 = 0$

$x = -y^2$

$$u' = u^2 + x > u^2$$

$$-\frac{1}{x}$$

$$u(\bar{x}) = f'(\bar{x})$$

$$v' = v^2$$

$v =$

$v' = v^p$ ← prototipo da conoscere.

ha un asintoto verticale

$$\frac{v'}{v^p} = 1$$

$\int v^{-p}\, dv = x$ se $p > 1$

altrimenti ha esistenza globale.

$$c\, v^{1-p} = x$$

$$v = k x^{\frac{1}{1-p}}$$

$p > 1$

$v = ...$

l'esponente
è negativo

$$u' = u^2 + x$$

$$\frac{u'}{u^2} = 1 + \frac{x}{u^2}$$

$$v = \frac{x}{u^2}$$

$$u^2 = \frac{x}{v}$$

$$\frac{u'}{x} \cdot v = 1 + v$$

$$u^2 = \frac{x}{v}$$

$$u = \sqrt{\frac{x}{v}}$$

$$u' = \ldots\ldots$$

$$\begin{cases} u' = u^2 + x \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v' = v^2 + 1 \\ v(1) = 0 \end{cases}$$

per $x > 1$ $\quad u(1) > 0$

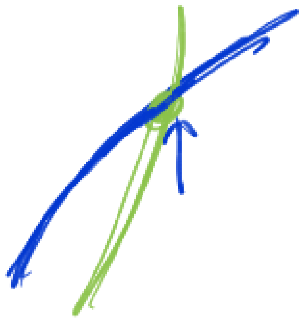
$u'(x) = u^2(x) + x$

$v' = v^2 + 1$

$v' \ldots = 1$

$u'(x) = u^2(x) + x$

$> u^2(x) + 1$



$\frac{v'}{v^2+1} = 1$

$\operatorname{arctg} v = x + c$

$0 = \operatorname{arctg} v(1) = 1 + c$

$c = -1$

$\operatorname{arctg} v(x) = x - 1$

$v(x) = \operatorname{tg}(x-1)$

$u(x) > v(x) \quad \forall x > 1.$