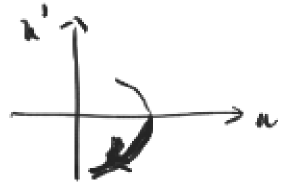
lezione 74

- eq. diff. lineari del primo ordine (in forma normale)
- eq. del I ordine a variabili separabili

Esempio $\boxed{u'' = -\sin u}$

$u' = u'(u)$.



$$u'' u' = -(\sin u)\cdot u'$$

$$\left(\frac{1}{2}(u')^2\right)' = \left(-\int \sin u \, du\right)'$$

Energia cinetica

Energia potenziale

$u = u(x)$

$du = u'(x)\, dx$

$$\frac{1}{2}(u')^2 = \cos u + C$$

$$\begin{cases} u(x_0) = u_0 \\ u'(x_0) = 0 \end{cases}$$

condizioni di Cauchy

$$0 = \frac{1}{2}(u'(x_0))^2 = \cos u(x_0) + C = \cos u_0 + C$$

$$C = -\cos u_0.$$

$$\frac{1}{2}(u')^2 = \cos u - \cos u_0$$

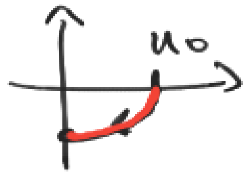
$u \le u_0$

$$u'(x) = -\sqrt{2(\cos u - \cos u_0)}$$

$u(x_0) = u_0$

è a variabili separabili

per x poco più grande di x_0



$$\frac{u'(x)}{\sqrt{2(\cos u - \cos u_0)}} = -1$$

$$\int_{u_0}^{u(x)} \frac{du}{\sqrt{2(\cos u - \cos u_0)}} = -(x - x_0)$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{\cos u - \cos u_0}}$$

$G(u) = \int \sqrt{2 \dots}$

$G(u(x)) - G(u_0) = x_0 - x$

$G(u(x)) = x_0 - x + G(u_0)$

$\rightarrow u(x) = G^{-1}(x_0 - x + G(u_0))$.

trovare il primo T per cui $u\left(\frac{T}{4}\right) = 0$

(trovo la dipendenza di T da u_0

$T = T(u_0)$

CONTO DIFFICILE

$$\sqrt{\frac{g}{l}}\,\frac{T}{2\pi} = 1 + \frac{u_0^2}{2^4} + \frac{11}{2^{10}\cdot 3}u_0^4 + \frac{173}{2^{14}\cdot 3^2\cdot 5}u_0^6 + \frac{22931}{2^{22}\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7}u_0^8 + o(u_0^8).$$

Equazioni diff. lineari di ordine n a coefficienti costanti.

Equazioni lineari di ordine n (in forma normalizzabile). $a_n(x) \equiv 1$.

in forma normale.

$$(*) = u^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)\,u^{(n-1)}(x) + \dots + a_1(x)\,u'(x) + a_0(x)\,u(x) = b(x)$$

$a_0, \dots, a_{n-1}$ sono chiamati "i coefficienti"

b è chiamata "termine noto".

se u è una funzione derivabile n volte $u \in C^n$ (C^∞)

$L : C^{\infty} \to C^{\infty}$
$u \mapsto L[u]$

$u \in C^{\infty}$ spazio vettoriale

$L[u](x) = (*)$

L è lineare

$L\,0 = 0$

$\boxed{\begin{array}{l} L[u+v] = Lu + Lv \\ L[\lambda u] = \lambda L[u] \end{array}}$ PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE

infatti • $u \mapsto Du = u'$ è lineare

• $u \mapsto a(x)\cdot u$ è lineare

$(u+v)a(x) = u\cdot a(x) + v\cdot a(x)$

$(\lambda u)a(x) = \lambda\cdot(u\cdot a(x))$

L'eq $L[u]=0$ (si chiama eq. omogenea).

ha come soluzioni Ker L, che è un sottospazio vettoriale

inoltre dim Ker L $= n$.

lo vedremo più avanti

Per trovare le sol. delle eq. omogenee "basta" trovare n soluzioni indipendenti.

L'eq. $L[u]=b$ (si chiama eq. non omogenea)

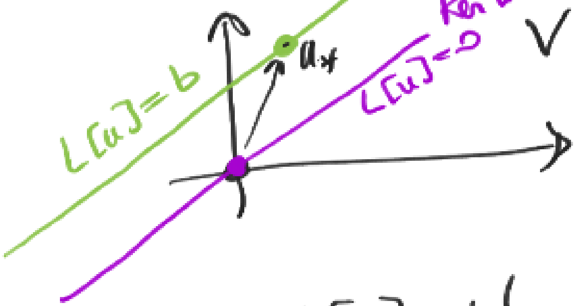
Se u_* è una soluzione "particolare" di $L[u]=b$

cioè $L[u_*]=b$,

allora

{tutte le sol. della non omogenea $L[u]=b$}

$= u_* + \operatorname{Ker} L$.



in quanto se $L[u]=b$

$L[u-u_*] = Lu - Lu_*$

$= b - b = 0$

u sol. di $Lu = b$

$\Updownarrow$

$u - u_*$ sol. di $Lu = 0$.

Es

$$u''(x) - u(x) = \sin x.$$

$n = 2 \qquad a_1(x) = 0, \ a_0(x) = -1$. (costante).

$$b(x) = \sin x.$$

(1) Risolvere l'omogenea associata:

$$u'' - u = 0$$

$$u'' = u$$

una soluzione è $u_1(x) = e^x$

$u_2(x) = e^{-x}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(<u>alternativa</u>:

$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$)

u_1, u_2 sono indipendenti?

$$\boxed{e^x = \lambda e^{-x} \qquad \forall x}$$

per $x = 0$, $1 = \lambda \cdot 1 \qquad \lambda = 1$

$e^x = e^{-x}$ non vale per $x = 1$.

$x = 0$, $x = 1$: $\begin{cases} 1 = \lambda \cdot 1 \\ e = \lambda \cdot \frac{1}{e} \end{cases}$

$\begin{cases} \lambda = 1 \\ \lambda = e^2 \end{cases}$ assurdo.

Tutte le sol. della eq. omogenea sono:

$$u(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x}.$$

Ora "basta" trovare una qualunque soluzione u_* della non-omogenea:

$$u''(x) - u(x) = \sin x. \qquad b(x) = \sin x.$$

Provare con $u = b$.

$u(x) = \sin x \qquad u'(x) = \cos x$

$u''(x) = -\sin x$

$u'' - u = -\sin x - \sin x = -2 \sin x.$

$u_*(x) = -\frac{1}{2} \sin x. \qquad u_*'(x) = -\frac{1}{2} \cos x$

$$u_*''(x) = \frac{1}{2}\sin x \qquad u_*'' - u_* = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)\sin x$$
$$= \sin x.$$

Tutte le soluzioni della eq. non omogenea sono:

$$u(x) = -\frac{1}{2}\sin x + c_1 e^{x} + c_2 e^{-x}.$$

$\square$