Lezione 73 - analisi matematica - 30.3.2020

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}\int_x^{2x} \frac{1}{\sin t}\,dt = +\infty}$$

ESERCIZIO 1. TEST SETTIMANALE

1. trovo la primitiva ....
2. teorema della media integrale

$$\frac{1}{x}\int_x^{2x} \frac{1}{\sin t}\,dt \stackrel{\downarrow}{=} \frac{1}{\sin c(x)} \longrightarrow +\infty$$

con $c(x) \in [x, 2x]$.

per $x \to 0^+ \Rightarrow c(x) \to 0^+$

3.

$$\frac{1}{\sin t} \sim \frac{1}{t}$$

IDEA

$$\frac{1}{x}\int_x^{2x} \frac{1}{t}\,dt = \frac{1}{x}\left[\ln(2x) - \ln x\right] = \frac{\ln 2}{x} \longrightarrow +\infty \quad \text{per } x \to 0^+$$

$$\frac{1}{\sin t} = \frac{1}{t} + \left(\frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t}\right)$$

$$= \frac{1}{t} + \frac{t - \sin t}{t \sin t}$$

$$\sin t = t - \frac{t^3}{6} + o(t^3)$$

$$= \frac{1}{t} + \frac{\frac{t^3}{6} + o(t^3)}{t^2 + o(t^2)}$$

$$\frac{1}{1+o(1)} = 1 + o(1)$$

$$= \frac{1}{t} + \frac{t}{6} + o(t)$$

$$\frac{1}{x}\int_x^{2x} \frac{1}{\sin t}\,dt = \underbrace{\frac{1}{x}\int_x^{2x} \frac{1}{t}\,dt}_{\to +\infty} + \underbrace{\frac{1}{x}\int_x^{2x}\left(\frac{t}{6} + o(t)\right)dt}_{\to 0\,?}$$

$$\frac{1}{x}\int_x^{2x} \frac{t}{6}\,dt = \frac{1}{x}\left[\frac{t^2}{12}\right]_x^{2x} \longrightarrow 0$$

$$\left| \frac{1}{x} \int_x^{2x} o(t)\, dt \right| \leq \frac{1}{x} \int_x^{2x} \varepsilon \, dt = \varepsilon .$$

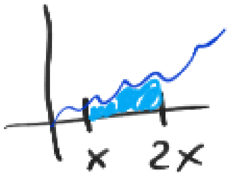
$\to 0$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$

$|t| < \delta \quad |o(t)| < \varepsilon$

$\Uparrow$

$x < \delta$



$$\lim_{??} \int_{??}^{??} f(t)\, dt \qquad f(t) \underset{??}{\sim} g(t)$$

$$\stackrel{?}{=} \lim_{??} \int_{??}^{??} g(t)\, dt$$

Trovare un enunciato valido in generale.

METODI RISOLUTIVI

$\boxed{u'(x) = f(x).}$ $\quad u$ è una primitiva di f

le soluzioni sono $u \in \int f$

Se f è continua, se $x \in I$ intervallo $x_0 \in I$

$$u(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt + c$$

Problema di Cauchy:

$$\begin{cases} u'(x) = f(x) \\ u(x_0) = u_0 \end{cases} \leftarrow \int_{x_0}^{x} u'(t)\,dt = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$$

$$u(x) - u(x_0) = \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt$$

$$u(x) = u(x_0) + \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt .$$

Eq. diff. ordinarie del I ordine in forma normale:

$$u'(x) = f(u(x), x)$$

u derivabile
f continua
$u \in C^1$.

se f non dipende da u : $u'(x) = f(x)$.

Eq. lineari del I ordine (in forma normalizzata)

$$(*) \quad \boxed{u'(x) + a(x)\,u(x) = b(x)}$$

Se $b \equiv 0$ è omogenea

Cosa significa che l'equazione è lineare?

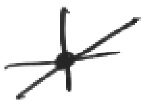
$$u'(x) = f(u(x), x). \qquad f \text{ continua.}$$

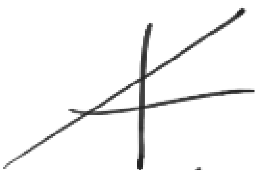
$$Lu = b \qquad L : C^1 \to C^0$$

lineare.

Come è fatta $f = f(u,x)$ affinché L sia un operatore lineare.

Terminologia





	analisi	algebra lineare
$y = mx$	lineare omogenea	lineare
$y = mx + q$	lineare	affine

L'equazione è lineare perché:

$a \in C^0$

$L : C^1 \to C^0$

$$Lu(x) = u'(x) + a(x)\cdot u(x)$$ 1 continua

$$(*) \qquad Lu = b$$

$$L(u_1+u_2) = (u_1+u_2)' + a\cdot(u_1+u_2)$$
$$= u_1' + a u_1 + u_2' + a u_2$$
$$= L u_1 + L u_2 .$$

$$L(\lambda u) = (\lambda u)' + a\cdot \lambda u$$
$$= \lambda(u' + a\cdot u) = \lambda L(u).$$

Metodo risolutivo:

$$\boxed{u'(x) + a(x)u(x) = b(x)}$$

idea: eliminare la dipendenza da u.

$$A(x) \in \int a(x)\,dx \qquad \underline{A' = a.}$$

Moltiplico per $e^{A(x)}$ ← fattore integrante

$$u'(x)e^{A(x)} + a(x)u(x)e^{A(x)} = b(x)e^{A(x)}$$
$$\| $$
$$\left(u(x)\cdot e^{A(x)}\right)' = b(x)e^{A(x)}.$$

$$u(x)e^{A(x)} \in \int b(x)e^{A(x)}\,dx$$

se siamo su un intervallo:

$$u(x)e^{A(x)} = \int b(x)e^{A(x)}dx + c$$

$$u(x) = e^{-A(x)}\left[\int b(x)e^{A(x)}dx + c\right].$$

ES. (autovalori dell'operatore derivata).

$$u' = \lambda u. \qquad (Du = \lambda u)$$

$$u' - \lambda u = 0 \qquad \begin{cases} a(x) = -\lambda & \text{costante.} \\ A(x) = -\lambda x \end{cases}$$

$$u' e^{-\lambda x} - \lambda u e^{-\lambda x} = 0$$

$$(u \cdot e^{-\lambda x})' = 0$$

$$u \cdot e^{-\lambda x} = c$$

$$u(x) = c \cdot e^{\lambda x}.$$

Esempio $u' - \frac{u}{x} = x^2$ $\qquad a(x) = -\frac{1}{x}, \; b(x) = x^2$

$\underline{x \neq 0}$

(oss: le equazioni lineari hanno soluzioni globali nel senso che sono definite in tutti i punti in cui è definita l'equazione)

(In questo caso $x \neq 0$).

$$u' - \frac{u}{x} = x^2 \qquad a(x) = -\frac{1}{x}$$

$$A(x) = -\ln|x|$$

$$\left(u' - \frac{u}{x}\right) e^{-\ln|x|} = x^2 e^{-\ln|x|}.$$

$$e^{-\ln|x|} = \frac{1}{|x|}$$

$$\frac{u'}{|x|} - \frac{u}{x|x|} = \frac{x^2}{|x|} \qquad \begin{cases} x > 0 \\ x < 0 \end{cases}$$

semplificazione: se $x < 0$ cambio segno alla equazione.

$$\frac{u'}{x} - \frac{u}{x^2} = \frac{x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}}$$

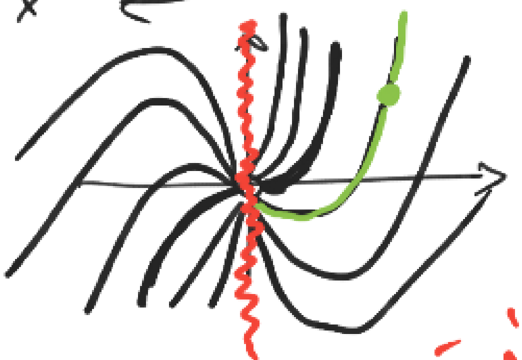
$$\frac{u'}{x} - \frac{u}{x^2} = x \quad \leftarrow \text{più semplice.}$$

$$\left(\frac{u}{x}\right)' = \left(\frac{x^2}{2}\right)' \qquad \frac{u}{x} \in \int x\,dx .$$

$$\frac{u}{x} = \frac{x^2}{2} + c$$

su ognuno dei due intervalli $(0,+\infty)$, $(-\infty,0)$.

$$u = \frac{x^3}{2} + cx \quad \leftarrow$$



Oss

$\boxed{\lim_{x\to 0} u(x) = 0.}$

Esempio

$$\boxed{xu' - u = x^3} \quad \leftarrow \text{non è in forma normale!}$$

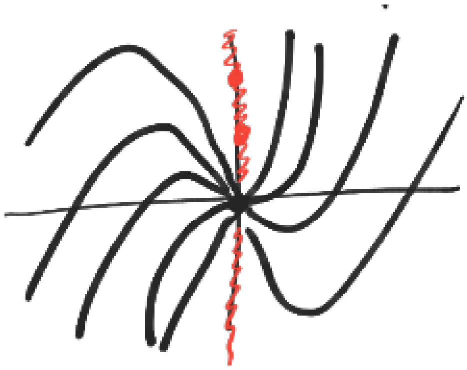
per $x = 0 \Rightarrow -u = 0$
$u(0) = 0$

se $x \neq 0$ è la stessa eq. di prima

per $x=0$

$u(x)=0$.

$u(0)=0$.



Oss

Il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} xu' - u = x^3 \\ u(0) = 1 \end{cases}$$ Non ha soluzione

$$\begin{cases} xu' - u = x^3 \\ u(0) = 0 \end{cases}$$ ha infinite soluzioni

---

$$\begin{cases} u' - \frac{u}{x} = x^2 \\ u(x_0) = y_0 \end{cases}$$ $x_0 \neq 0$, $y_0 \in \mathbb{R}$

$\leftarrow$ ha una unica soluzione definita su un intervallo massimale.

Eq. del I ordine a variabili separabili.

$$u'(x) = f(x) \cdot g(u(x)).$$

(in generale una eq. del I ordine:

$$u'(x) = F(x, u(x)).$$

a variabili separabili:

$$\Big(\qquad F(x,u) = f(x)\cdot g(u). \qquad \Big)$$

$$u'(x) = f(x)\cdot g(u(x)).$$

divido per $g(u(x))$ (lo posso fare se $g(u(x)) \neq 0$)

$$\frac{u'(x)}{g(u(x))} = f(x)$$

Quello che scriviamo d'ora in poi è valido solo per quei $x \in \mathbb{R} : g(u(x)) \neq 0$

$$\frac{u'}{g(u)} = f(x)$$

$\int_{x_0}^{x}$

$$\int_{x_0}^{x} \frac{u'(t)}{g(u(t))}\,dt = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$$

$u = u(t)$
$du = u'(t)dt$

$$\int_{u(x_0)}^{u(x)} \frac{du}{g(u)} = F(x) \qquad \underline{u_0 = u(x_0)}$$

$$G(u) \in \int \frac{1}{g(u)} \qquad G(u) = \int_{u_0}^{u} \frac{1}{g(t)}\,dt$$

$$G(u(x)) - \cancel{G(u(x_0))} = F(x)$$

$$G(u(x)) = \cancel{G(u(x_0))} + F(x)$$

Se G è invertibile:

$$u(x) = G^{-1}(F(x))$$

<u>Formula mnemonica</u>:

$$u'(x) = f(x) \cdot g(u(x))$$

$$\int \frac{u'(x)}{g(u(x))} \cdot dx = \int f(x) \cdot dx$$

$$\int \frac{du}{g(u)} = \int f(x)\,dx \qquad \Big|\; u = u(x)$$

<u>Esercizio</u> $\quad u' = u^2 \qquad f(x) = 1$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad g(u) = u^2.$

(Oss: Le eq. <u>autonome</u> $u' = g(u)$.)
sono a variabili separabili.

$$u' = u^2$$

se $u(x) \neq 0$ posso dividere per $u(x)$

osservo che $u \equiv 0$ è soluzione!

$$\frac{u'(x)}{u^2(x)} = 1 \qquad \text{Fissiamo } x_0,\ u_0 = u(x_0)$$

$$\int_{x_0}^{x} \frac{u'(t)}{u^2(t)}\,dt = \int_{x_0}^{x} 1 \cdot dt$$

$u = u(t)$
$du = u'(t)\,dt$

$$\int_{u_0}^{u(x)} \frac{du}{u^2} = x - x_0$$

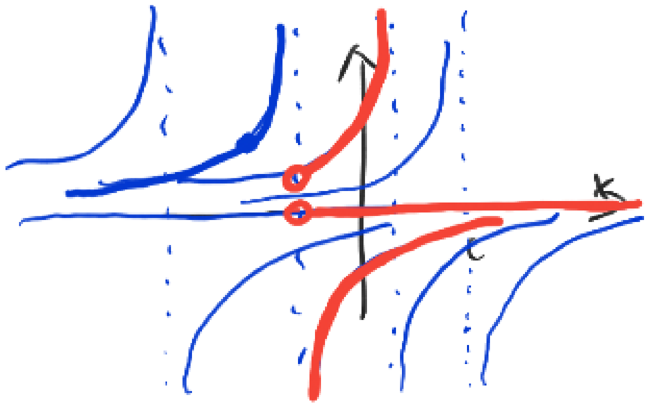
$$\left[-\frac{1}{u}\right]_{u_0}^{u(x)} = x - x_0$$

$$-\frac{1}{u(x)} - \left(-\frac{1}{u_0}\right) = x - x_0$$

$$\frac{1}{u(x)} = \frac{1}{u(x_0)} - x + x_0$$

$$u(x) = \frac{1}{\frac{1}{u(x_0)} - x + x_0} = -\frac{1}{x-c}$$

$$c = -x_0 - \frac{1}{u(x_0)}$$



Oss 1

Se $u(x)$ è soluzione anche $u(x-x_0)$ è soluzione (in quanto l'eq. è autonoma)

Oss 2 le soluzioni non sono globali.

Nonostante l'eq: $u'=u^2$ è definita $\forall u$ $\forall x$

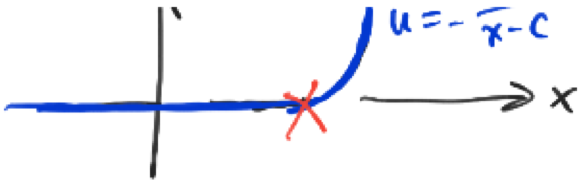
le soluzioni "scoppiano"

Oss 3 $u(x)=0$ è soluzione.

(?) Esistono soluzioni che in alcuni punti si annullano ma in altri punti sono $\neq 0$.

NO. Perché dove le soluzioni sono $\neq 0$ il metodo trova che $u(x) = -\frac{1}{x-c}$

e quindi su ogni intervallo su cui è definita la funzione non si può annullare



u = - √(x - c)
x