ANALISI MATEMATICA (B)

LEZIONE 72

27.3.2020

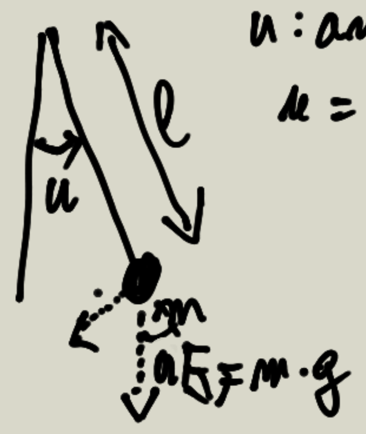
EQUAZIONI DIFFERENZIALI

ES $\quad F = ma \qquad\qquad p,\ v = u',\ a = u''$

$$p = u = u(x) \qquad x = \text{tempo}$$

Equazione funzionale: l'incognita è una funzione $u = u(x)$.
Equazione differenziale: è una eq. funzionale in cui oltre alle operazioni algebriche sono coinvolte le derivate di u.

ES pendolo



u: angolo di scostamento dalla verticale
$u = u(x)$, x = tempo

$$-m\cdot g\cdot \sin u = m\cdot \ell\, u''$$

$F_{tang.}$ ← gravità

$-k\ell u'$ ← attrito

$$m\ell u'' + k\cdot \ell\cdot u' + mg\sin u = 0$$

in opportune unità di misura:

$$\boxed{u'' + u' + \sin u = 0} \quad (*) \qquad u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto u(x)$$

$$\forall x \in \mathbb{R}: \quad u''(x) + u'(x) + \sin(u(x)) = 0.$$

Eq. diff.
- EDO (ordinarie) ODE $\leftarrow$ $u = u(x)$, $x \in \mathbb{R}$ scalare
- EDP (alle derivate parziali) PDE $\leftarrow$ $u = u(\underline{x})$, $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$

Es: $u = u(x, y, z)$

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{(\partial x)^2} + \frac{\partial^2 u}{(\partial y)^2} + \frac{\partial^2 u}{(\partial z)^2}$$

$u \in V$
$u' = Du$
$D : V \to V$

Ordine di una Eq. Diff. è il massimo ordine di derivazione che compare nell'eq.

Eq. in forma implicita (di ordine n)

$$\mathcal{F}\left(u^{(n)}(x), u^{(n-1)}(x), \dots, u'(x), u(x), x\right) = 0$$

Es. (*) $\mathcal{F}(a, v, u, x) = a + v + \sin u$ $\quad (x^2 + y^2 = 1)$

Se $\mathcal{F}$ non dipende da x diremo che l'eq. è autonoma

es termine forzante $F = F(x)$ non autonoma.

↑ forza.

$$u'' + \sin u + u' + \sin x = 0$$

Oss Se l'eq. è autonoma se $u(x)$ è soluzione anche $v(x) = u(x - x_0)$ è soluzione $\quad (y = \pm\sqrt{1 - x^2})$

Eq. in forma normale di ordine n

$$u^{(n)}(x) = f\left(u^{(n-1)}(x), u^{(n-2)}(x), \dots, u'(x), u(x), x\right)$$

Es. (*) $u''(x) = -u'(x) - \sin(u(x))$ $\quad u''(x) = f(u'(x), u(x), x)$

$$f(v, u, x) = -v - \sin u.$$

Sistemi di eq. diff.

$$\underline{u} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m, \qquad x \mapsto \underline{u}(x)$$

$$\underline{u}(x) = (u_1(x), u_2(x), \dots, u_m(x))$$

$$\underline{F}(\underline{u}^{(n)}, \underline{u}^{(n-1)}, \dots, \underline{u}'(x), \underline{u}(x), x) = \underline{0}$$

Es

in forma normale

Una eq. di ordine n si può ricondurre ad un sistema di n eq. del I ordine.

(Nella teoria tratteremo solo il I ordine).

L'idea è che se $u(x)$ è una funzione scalare possiamo considerare il vettore (Jet)

$$\underline{v}(x) = \underline{Ju}(x) = (u(x), u'(x), u''(x), \dots, u^{(n-1)}(x)).$$

$$v_n' = (Ju_n)' = \boxed{u^{(n)}(x) = f(u(x), u'(x), \dots, u^{(n-1)}(x), x)}$$

eq. diff. di ordine n

$$= f(\underline{Ju}(x), x)$$

$$v_{n-1} = u^{(n-2)}$$

$$\begin{cases} v_n' = f(\underline{v}(x), x) \\ v_{n-1}' = v_n \\ \vdots \\ v_2' = v_3 \\ v_1' = v_2 \end{cases}$$

sistema di n eq. diff. del I ordine.

$$\boxed{\underline{v}' = \underline{\tilde{f}}(\underline{v}(x), x).}$$

sistema di n eq. del I ordine.

Es (pendolo)

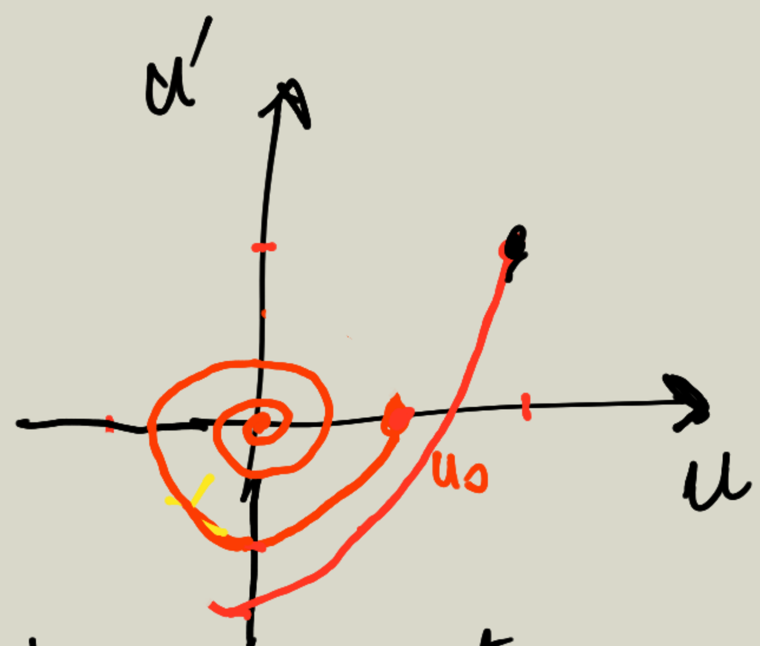
$$u'' = -u' - \sin u$$

$\underline{v} = (u, u')$ $\quad \begin{cases} v_1 = u \\ v_2 = u' \end{cases}$

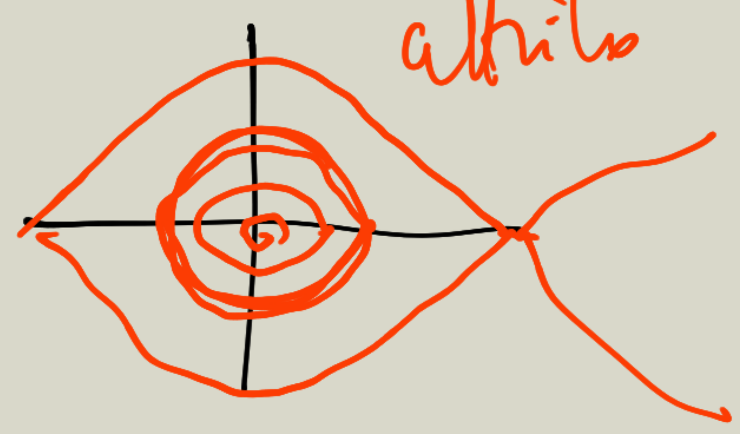
[$\underline{v} \in$ Piano delle fasi]

$$\begin{cases} v_2' = -v_2 - \sin v_1 \\ v_1' = v_2 \end{cases}$$

NON LINEARE



senza attrito



TEORIA NON LINEARE

Teorema di (Cauchy-Lipschitz)
(esistenza e unicità).

.... tolti dettagli localmente

Fissato x_0, Fissato $\underline{v}_0$, esiste una unica soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \underline{v}'(x) = \underline{f}(\underline{v}(x), x) \\ \underline{v}(x_0) = \underline{v}_0 \end{cases}$$

SCAN ME

Eq. differenziali lineari

(in forma normale, di ordine n) $\quad a_0, \dots, a_{n-1}, b$ sono funzioni

$$u^{(n)} = a_0 u + a_1 u' + \dots + a_{n-1} u^{(n-1)} + b$$

non omogenea se $b \neq 0$

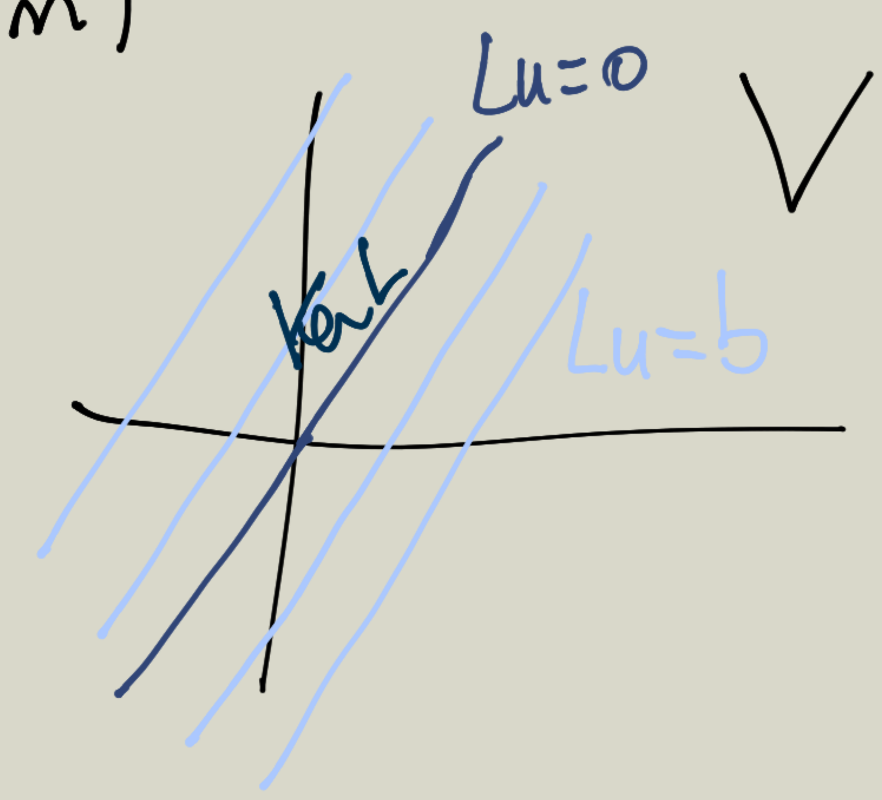
$$\underbrace{u^{(n)} - a_{n-1} u^{(n-1)} - a_{n-2} u^{(n-2)} - \dots - a_1 u' - a_0 u}_{= L(u)} = b$$

omogenea se $b = 0$

$u \in V$, $L : V \to V$ lineare $\quad L(u) = b$

Lo spazio delle soluzioni della omogenea è un sottospazio vettoriale (se $b=0$) (di dimensione n)

Le sol. di una eq. non omogenea ($b \neq 0$) sono uno spazio affine di dim n ottenuto traslando $\operatorname{Ker} L$



$V = C^\infty(\mathbb{R})$

$K = \mathbb{R}$

Es

$u'' = -\sin u$ ← pendolo

$u'' = -u$ ← oscillatore armonico

↑

Eq. lineare: $u'' + u = 0$.

le soluzioni sono combinazioni di $\sin x$, $\cos x$

$u(x) = a \sin x + b \cos x$.

Dati $u(0)$, $u'(0)$

Trovare a, b.

$u = a \sin + b \cos$

$u' = a \cos - b \sin$

$u(0) = b$

$u'(0) = a$

Es

$$u''(x) = x \cdot u'(x) - \frac{u(x)}{1+x} + \cos x$$

è lineare.

$$Lu = x \cdot u' - \frac{u}{1+x} + \cos x$$

↑ è lineare

$V = C^\infty(\mathbb{R} \setminus \{-1\})$

$L : V \to V$ è affine.