Analisi Matematica
Soluzioni prova scritta parziale n. 2

Corso di laurea in Fisica, 2019-2020

22 febbraio 2020

1. Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg}\, \sin x - x\cos x}{\operatorname{tg}\left(x - \frac{x^3}{6} - \sin x\right) \cdot \operatorname{arctg}\, \cos x}.$$

Soluzione. Ricordiamo gli sviluppi delle funzioni elementari coinvolte:

$$\begin{aligned}
\operatorname{arctg} x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^5) \\
\sin x &= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5) \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) \\
\operatorname{tg} x &= x + o(x)
\end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned}
\operatorname{arctg}\, \sin x &= \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + \frac{\sin^5 x}{5} + o(\sin^5 x) \\
&= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5) - \frac{\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^3}{3} + \frac{(x + o(x))^5}{5} + o(x^5) \\
&= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^3 - 3x^2 \cdot \frac{x^3}{6} + o(x^5)}{3} + \frac{x^5 + o(x^5)}{5} + o(x^5) \\
&= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{6} + \frac{x^5}{5} + o(x^5) \\
&= x - \frac{x^3}{2} + \frac{3x^5}{8} + o(x^5)
\end{aligned}$$

e

$$x\cos x = x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{24} + o(x^5)$$

poi

$$\operatorname{tg}\left(x-\frac{x^3}{6}-\sin x\right)=\operatorname{tg}\left(-\frac{x^5}{120}+o(x^5)\right)$$
$$=-\frac{x^5}{120}+o(x^5)$$

infine

$$\operatorname{arctg}(\cos x)=\operatorname{arctg}(1+o(1))=\frac{\pi}{4}+o(1).$$

Quindi il limite richiesto è uguale a

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{x^3}{2}+\frac{3x^5}{8}-x+\frac{x^3}{2}-\frac{x^5}{24}+o(x^5)}{\left(-\frac{x^5}{120}+o(x^5)\right)\cdot\left(\frac{\pi}{4}+o(1)\right)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^5}{3}+o(x^5)}{-\frac{\pi x^5}{480}+o(x^5)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}+o(1)}{-\frac{\pi}{480}+o(1)}=-\frac{160}{\pi}.$$

□

2. Data la serie

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty}(-1)^n\left(e^{\frac{1}{n^2}}+\ln\cos\frac{1}{n}-\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}}\right)^{\alpha}$$

dimostrare che, per n_0 sufficientemente grande, la serie è ben definita. Studiarne poi, al variare di $\alpha>0$, la convergenza semplice e la convergenza assoluta.

Soluzione. La serie si può scrivere nella forma

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty}(-1)^n a_n^{\alpha}$$

con

$$a_n=f\left(\frac{1}{n}\right),\qquad f(x)=e^{(x^2)}+\ln\cos x-(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Ricordando gli sviluppi di Taylor per $x\to 0$:

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)$$
$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)$$
$$\cos x=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)$$
$$(1+x)^{-\frac{1}{2}}=1-\frac{x}{2}+\frac{3x^2}{8}+o(x^2)$$

da cui

$$\begin{aligned}
\ln\cos x &= \ln\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)\right)\\
&= -\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)-\frac{\left(-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)^2}{2}+o(x^4)\\
&= -\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^4}{8}+o(x^4) = -\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{12}+o(x^4)
\end{aligned}$$

si osserva che la funzione $f(x)$ è definita in un intorno di 0 e per $x \to 0$ si ha:

$$\begin{aligned}
f(x) &= 1+x^2+\frac{x^4}{2}-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{12}-\left(1-\frac{-x^2}{2}+\frac{3x^4}{8}\right)+o(x^4)\\
&= \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{12}-\frac{3}{8}\right)x^4+o(x^4) = \frac{x^4}{24}\cdot(1+o(1))
\end{aligned}$$

In un opportuno intorno di 0 l'espressione $1+o(1)$ è positiva, dunque esiste $\varepsilon > 0$ tale che per $x \in (0,\varepsilon]$ la funzione è definita e si ha $f(x) > 0$. Posto $n_0 = \lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil$ per ogni $n \geq n_0$ risulta che a_n è ben definita e positiva e dunque $(-1)^n a_n^\alpha$ è ben definita.

Sempre dallo sviluppo di Taylor di f si deduce che

$$f(x) \sim \frac{x^4}{24} \qquad \text{e} \qquad a_n \sim \frac{1}{24\cdot n^4}$$

da cui

$$|(-1)^n a_n^\alpha| = a_n^\alpha \sim \frac{1}{24^\alpha \cdot n^{4\alpha}}.$$

Sappiamo che la serie $\sum \frac{1}{n^{4\alpha}}$ converge se e solo se $4\alpha > 1$ e dunque, per il criterio di confronto asintotico, la serie data converge assolutamente se e solo se $\alpha > \frac{1}{4}$.

Per quanto appena osservato, se $\alpha \leq 0$ i termini della serie non sono infinitesimi e dunque la serie non può convergere neanche semplicemente. Se invece $\alpha > 0$ la serie è infinitesima e a segni alterni e abbiamo quindi speranza di poter applicare il criterio di Leibniz per le serie a segni alterni. E' sufficiente verificare che a_n^α è decrescente, almeno definitivamente. Affinché a_n^α sia decrescente è sufficiente mostrare che a_n lo è. Ma visto che $a_n = f(1/n)$ basta mostrare che f è crescente in un intorno destro di 0. Per ottenere ciò basta mostrare che la derivata $f'(x)$ è positiva in un intorno destro di 0. Sapendo che il polinomio di Taylor di f' è la derivata del polinomio di Taylor di f possiamo affermare che risulta

$$f'(x) = \frac{x^3}{6}+o(x^3) = \frac{x^3}{6}\cdot(1+o(1))$$

ed è chiaro che per x sufficientemente piccolo si ha $1 + o(1) > 0$ e quindi $f'(x) > 0$.

Dunque se $\alpha > 0$ si applica il criterio di Leibniz e la serie converge semplicemente. $\square$

3. Si consideri la funzione $f(x) = (x-1)(x^2+x+3)$.

   (a) Dopo aver verificato che $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è bigettiva si consideri la funzione inversa $g(y) = f^{-1}(y)$.

   (b) Determinare $g(0)$, $g'(0)$ e $g''(0)$.

   (c) Calcolare
$$\lim_{y\to 0} \frac{g(y^2) - g(5y) + y}{(g(y)-1)^2}.$$

Soluzione. Si ha $f(x) = x^3 + 2x - 3$ e $f'(x) = 3x^2 + 2$. Visto che per ogni $x \in \mathbb{R}$ risulta $f'(x) > 0$ dai criteri di monotonia deduciamo che la funzione f è strettamente crescente e dunque iniettiva. Visto poi che per $x \to \pm\infty$ si ha $f(x) \to \pm\infty$ dal teorema dei valori intermedi (chiaramente f è continua) si deduce che f è anche suriettiva.

Se g è la funzione inversa di f, essendo $f' \neq 0$, possiamo applicare il teorema della derivata della funzione inversa per ottenere che g è derivabile su tutto $\mathbb{R}$ e vale:
$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))}.$$

Si osserva ora che se $g \in C^n$ allora il lato destro di quest'ultima uguaglianza è una funzione di classe C^n (in quanto la funzione g viene composta con la funzione $1/f'$ che è di classe C^∞). Dunque se $g \in C^n$ allora $g' \in C^n$ ovvero $g \in C^{n+1}$. Sappiamo che g è derivabile e dunque è di classe C^0 e quindi, per induzione, $g \in C^n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ ovvero $g \in C^\infty$.

Derivando ancora si ha
$$g''(y) = -\frac{f''(g(y)) \cdot g'(y)}{\left(f'(g(y))\right)^2}.$$

Si osserva ora che $f(1) = 0$ e dunque $g(0) = 1$. Dunque sostituendo $y = 0$ nelle formule precedenti si ottiene (avendo calcolato $f''(x) = 6x$)
$$g'(0) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{5}, \qquad g''(0) = -\frac{f''(1)g'(0)}{\left(f'(1)\right)^2} = -\frac{6 \cdot \frac{1}{5}}{5^2} = -\frac{6}{125}.$$

Possiamo quindi scrivere la formula di Taylor per $y \to 0$
$$g(y) = g(0) + g'(0)y + \frac{g''(0)}{2}y^2 + o(y^2) = 1 + \frac{y}{5} - \frac{3}{125}y^2 + o(y^2)$$

da cui si trova facilmente il limite richiesto

$$
\begin{aligned}
\lim_{y\to 0} \frac{g(y^2)-g(5y)+y}{(g(y)-1)^2} &= \lim_{y\to 0} \frac{1+\frac{y^2}{5}-1-y+\frac{3}{125}(5y)^2+y+o(y^2)}{\left(\frac{y}{5}+o(y)\right)^2} \\
&= \lim_{y\to 0} \frac{\frac{4}{5}y^2+o(y^2)}{\frac{y^2}{25}+o(y^2)} = \lim_{y\to 0} \frac{\frac{4}{5}+o(1)}{\frac{1}{25}+o(1)} = 20.
\end{aligned}
$$

□