

# Analisi Matematica A e B

## Prova scritta n. 1

Corso di laurea in Fisica, 2018-2019

3 giugno 2019

1. Calcolare, se esiste

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x + \ln(e^x - x) - \sin \frac{x^3}{6}}{(1 - \cos x) \cdot \operatorname{tg}(x^2)}.$$

2. Dimostrare che l'equazione

$$x^5 = x + 1$$

ha una unica soluzione reale  $x_0$ . Determinare la parte intera di  $x_0$ . Dire quindi per quali  $\alpha > x_0$  la successione definita ricorsivamente da

$$\begin{cases} a_1 = \alpha \\ a_{n+1} = \sqrt[5]{1 + a_n} \end{cases}$$

converge a  $x_0$ .

3. Determinare tutte le soluzioni  $u(x)$  dell'equazione

$$u' + 2xu = x^3.$$

Determinare  $\alpha \in \mathbb{R}$  per cui la sostituzione  $u = v^\alpha$  permette di ricondurre alla precedente l'equazione

$$v' = xv - \frac{x^3}{2}v^3.$$

Risolvere quindi il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} v' = xv - \frac{x^3}{2}v^3 \\ v(1) = 1 \end{cases}$$

determinando l'intervallo massimale di esistenza della soluzione.