Analisi Matematica A e B
Soluzioni Prova scritta n. 3

Corso di laurea in Fisica, 2017-2018

9 luglio 2018

1. Si consideri per $\alpha = 1, 2, 5, 8$ la seguente funzione funzione $F_\alpha \colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$

$$F_\alpha(x) = \int_{x^3}^{x} \frac{\sin \sqrt[3]{t}}{|t|^{\frac{\alpha}{6}}}\, dt.$$

Dire se F_α può essere estesa per continuità a tutto $\mathbb{R}$ e in tal caso verificare se l'estensione è di classe C^1.

Soluzione. Poniamo

$$f_\alpha(t) = \frac{\sin \sqrt[3]{t}}{|t|^{\frac{\alpha}{6}}}$$

e osserviamo che f_α è dispari: $f_\alpha(-t) = -f_\alpha(t)$. Dunque la funzione $F_\alpha(x)$ è pari, in quanto facendo la sostituzione $s = -t$, $ds = -dt$ si nota che:

$$F_\alpha(-x) = \int_{-x^3}^{-x} f_\alpha(t)\, dt = -\int_{x^3}^{x} f_\alpha(-s)\, ds = F_\alpha(x).$$

Sarà quindi sufficiente studiare la funzione $F_\alpha(x)$ per $x \geq 0$.

Osserviamo che esiste un $\delta > 0$ tale che per ogni $x \in [0, \delta]$ si ha $\sin x \geq x/2$ (ad esempio si può prendere $\delta = \pi/6$) mentre per ogni $x > 0$ si ha sempre $\sin x \leq x$. Dunque possiamo affermare che per $t \in [0, \delta^3]$ risulta

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{t^{\frac{1}{3}}}{t^{\frac{\alpha}{6}}} \leq f_\alpha(t) \leq \frac{t^{\frac{1}{3}}}{t^{\frac{\alpha}{6}}}$$

Per $\alpha = 8$ sappiamo dunque che

$$f_8(t) \geq \frac{1}{2} \frac{t^{\frac{1}{3}}}{t^{\frac{8}{6}}} = \frac{1}{2t}$$

e di conseguenza, per $x \to 0^+$,

$$F_8(x) \geq \int_{x^3}^{x} f_8(t)\,dt = \frac{1}{2}\int_{x^3}^{x} \frac{1}{t}\,dt = \frac{1}{2}(\ln x - 3\ln x) \to +\infty.$$

Dunque la funzione $F_8(x)$ non può essere estesa con continuità a $x = 0$.

Se $\alpha = 5$ si ha $f_5(t) \leq t^{-\frac{1}{2}}$ in un intorno di 0^+. Dunque, per $x \to 0^+$,

$$0 \leq \int_{x^3}^{x} f_5(t)\,dt \leq \int_{x^3}^{x} t^{-\frac{1}{2}}\,dt = 2\left(x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}}\right) \to 0.$$

Per il teorema dei due carabinieri abbiamo dunque $F_5(x) \to 0$ per $x \to 0^+$ e per simmetria $F_5(x) \to 0$ per $x \to 0^-$. Dunque F_5 si estende con continuità a $x = 0$, ponendo $F_5(0) = 0$. Lo stesso vale se $\alpha = 1$ o $\alpha = 2$ in quanto $0 \leq f_1(t) \leq f_2(t) \leq f_5(t)$ per $t \in (0, 1]$ e quindi $0 \leq F_1(x) \leq F_2(x) \leq F_5(x)$ per $x \in (0, 1]$.

Calcoliamo per $x > 0$ la derivata, utilizzando il teorema fondamentale del calcolo integrale:

$$F_5'(x) = f_5(x) - 3x^2 f_5(x^3) = \frac{\sin\sqrt[3]{x}}{x^{\frac{5}{6}}} - 3x^2\frac{\sin x}{x^{\frac{5}{2}}} \to +\infty$$

per $x \to 0^+$. Questo significa che la funzione estesa non può essere derivabile in $x = 0$ perché se lo fosse si avrebbe, per il teorema di de L'Hospital:

$$F_5'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{F_5(h)}{h} = \lim_{h\to 0} F_5'(h) = +\infty.$$

Per $\alpha = 2$ abbiamo già visto che la funzione può essere estesa per continuità, come nel caso $\alpha = 5$. In questo caso la derivata (calcolata come nel caso precedente) è, per $x \to 0^+$:

$$F_2'(x) = \frac{\sin\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}} - 3x^2\frac{\sin x}{x} \to 1.$$

Per simmetria (la derivata di una funzione pari è dispari) si avrà allora:

$$F_2'(x) \to -1 \qquad \text{per } x \to 0^-.$$

Ma allora $F_2(x)$ ha un punto angoloso per $x = 0$, non è derivabile e tantomento C^1.

Per $\alpha = 1$ si ha, come nei casi precedenti che $F_1(x)$ si estende con continuità in $x = 0$. Calcolando la derivata si ha, per $x \to 0^+$,

$$F_1'(x) = \frac{\sin\sqrt[3]{x}}{x^{\frac{1}{6}}} - 3x^2\frac{\sin x}{x^{\frac{1}{2}}} \to 0.$$

Per simmetria si avrà quindi

$$F_1'(x) \to -0 = 0 \qquad \text{per } x \to 0^-$$

e quindi, utilizzando il teorema di de l'Hospital per calcolare il limite del rapporto incrementale si ottiene che l'estensione continua di $F_1(x)$ è derivabile in $x = 0$ con derivata nulla. Per $x \neq 0$ è chiaro che $F_1'(x) = f_1(x) - 3x^2 f_1(x^3)$ è continua, e per $x \to 0$ abbiamo verificato che $F_1'(x) \to 0$, dunque F_1' è continua e F_1 è di classe C^1. □

2. Sia $a_n = (\ln n)(\operatorname{arctg} n)\left(1 - \cos \frac{1}{n}\right)$. Studiare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, la convergenza semplice e la convergenza assoluta della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n^\alpha.$$

Soluzione. Per $n \to +\infty$ si ha $\operatorname{arctg} n \to \pi/2$ e $\cos(1/n) = 1 - 1/(2n^2) + o(1/n^2)$ da cui

$$a_n \sim \frac{\pi}{4} \frac{\ln n}{n^2}.$$

Per quanto riguarda la convergenza assoluta si ha $|(-1)^n a_n^\alpha| = a_n^\alpha$ e si ottiene quindi la serie

$$\sum a_n^\alpha$$

che, per il criterio di confronto asintotico, ha lo stesso carattere della serie

$$\sum \frac{\ln^\alpha n}{n^{2\alpha}}.$$

Sappiamo che per ogni $\varepsilon > 0$ si ha $\ln n \ll n^\varepsilon$ e dunque

$$\frac{\ln^\alpha n}{n^{2\alpha}} \ll \frac{1}{n^{(2-\varepsilon)\alpha}} = \frac{1}{n^p}$$

con $p = (2 - \varepsilon)\alpha$. Ma la serie $\sum 1/n^p$ (serie armonica generalizzata) è convergente se $p > 1$. Se $\alpha > 1/2$ sarà sempre possibile trovare un $\varepsilon > 0$ per cui $p > 1$, e dunque la nostra serie sarà assolutamente convergente. Viceversa si ha

$$a_n^\alpha \sim \frac{\ln^\alpha n}{n^{2\alpha}} \gg \frac{1}{n^{2\alpha}}$$

e dunque se $\alpha \leq 1/2$ la serie non è assolutamente convergente.

Possiamo però dimostrare che la serie converge semplicemente per ogni $\alpha > 0$ utilizzando il criterio di Leibniz. La successione $(-1)^n a_n^\alpha$ è a segni alterni ed è infinitesima. Rimane solo da verificare che a_n^α è decrescente, almeno per n sufficientemente grande ovvero che a_n è decrescente. Per fare ciò poniamo $a_n = f(n)$ con

$$f(x) = \ln x \cdot \operatorname{arctg} x \cdot \left(1 - \cos \frac{1}{x}\right).$$

Si ha

$$\begin{aligned} f'(x) = &\frac{\operatorname{arctg} x}{x} \cdot \left(1 - \cos \frac{1}{x}\right) + \frac{\ln x}{1 + x^2} \cdot \left(1 - \cos \frac{1}{x}\right) \\ &- \ln x \cdot \operatorname{arctg} x \cdot \frac{\sin \frac{1}{x}}{x^2} \end{aligned}$$

Per $x \to +\infty$ si ha

$$\begin{aligned} \operatorname{arctg} x &= O(1), & \ln x &= o(x), \\ 1 - \cos \frac{1}{x} &= O\left(\frac{1}{x^2}\right), & \sin \frac{1}{x} &= \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} f'(x) &= O\left(\frac{1}{x^3}\right) + o\left(\frac{1}{x^3}\right) - \ln x \cdot \operatorname{arctg} x \cdot \left(\frac{1}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)\right) \\ &= O\left(\frac{1}{x^3}\right) - \frac{\ln x \cdot \operatorname{arctg} x}{x^3} \end{aligned}$$

cioè, per $x \to +\infty$

$$x^3 f'(x) = (1 - \ln x \cdot \operatorname{arctg} x) \cdot O(1) \to -\infty.$$

Significa che per x sufficientemente grande deve essere $f'(x) < 0$. Dunque $f(x)$ è decrescente per x abbastanza grande e $a_n = f(n)$ è decrescente per n sufficientemente grande. □

3. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} (x-3)^2 y' = x(y-1), \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

specificando l'intervallo massimale di esistenza della soluzione.

Soluzione. Se $x \neq 3$ e se $y(x) \neq 1$ possiamo dividere l'equazione per $(x - 3)^2(y - 1)$ per ottenere una equazione a variabili separate:

$$\frac{y'}{y-1} = \frac{x}{(x-3)^2}.$$

Passando alle primitive si ha

$$\int \frac{1}{y-1}\,dy = \int \frac{x}{(x-3)^2}\,dx.$$

Da un lato

$$\int \frac{1}{y-1}\,dy = \ln|y-1|$$

e dall'altro

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{(x-3)^2}\,dx = \int \frac{x-3+3}{(x-3)^2}\,dx &= \int \frac{1}{x-3}\,dx + \int \frac{3}{(x-3)^2}\,dx \\ &= \ln|x-3| - \frac{3}{x-3}.\end{aligned}$$

La primitiva in y è definita per $y < 1$ e per $y > 1$, mentre la primitiva in x è definita per $x < 3$ e per $x > 3$. Siccome abbiamo il dato iniziale in $x = 0$ e $y = 0$ scegliamo gli intervalli $x < 3$ e $y < 1$ cosicché $|y-1| = 1-y$ e $|x-3| = 3-x$. Sull'intervallo $x < 3$ le due primitive possono differire per una costante $c \in \mathbb{R}$:

$$\ln(1-y) = \ln(3-x) - \frac{3}{x-3} + c$$

ovvero

$$y = 1 - (3-x)\cdot e^{\frac{3}{3-x}} \cdot e^c$$

ma imponendo $y(0) = 0$ si ottiene

$$0 = 1 - 3e \cdot e^c$$

da cui $e^c = 1/(3e)$ e dunque

$$y(x) = 1 - \frac{3-x}{3e} \cdot e^{\frac{3}{3-x}}. \tag{1}$$

Abbiamo fin qui ottenuto che se $y(x)$ è una soluzione del problema e se $x < 3$ e $y(x) < 1$ allora certamente vale (1). Ma la funzione in (1) non si avvicina mai a $y = 1$, dunque se $x < 3$ la soluzione dovrà sempre soddisfare la condizione $y(x) < 1$. D'altra parte per $x \to 3^-$ si osserva che $y(x) \to -\infty$ dunque non è possibile che la soluzione possa essere estesa ad una funzione continua definita su un intervallo più grande. L'intervallo massimale di esistenza è dunque $(-\infty, 3)$. $\square$