Esercizi di preparazione alla prima prova scritta preliminare

Analisi Matematica II

3 novembre 2014

Forme differenziali lineari

1. Calcolare $\int_\gamma \omega$ dove γ la curva formata dai segmenti che congiungono, nell'ordine, i punti di coordinate: $(2,0)$, $(3,1)$, $(4,0)$, $(5,1)$, $(6,0)$, $(7,1)$, $(8,0)$, $(9,1)$, $(10,0)$ e
$$\omega = \frac{x\,dx + y\,dy}{x^2+y^2}.$$
(Suggerimento: osservare che la forma è esatta, trovando una primitiva). (Risultato: $\log 5$)

2. Calcolare $\int_\gamma \omega$ dove
$$\omega = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2}$$
e $\gamma(t) = (1,t)$ con $t \in [0,1]$. (Risultato: $\frac{\pi}{4}$)

3. Calcolare
$$\int_\gamma \frac{x\,dy - y\,dx}{\sqrt{x^2+y^2}}$$
con $\gamma(t) = R(\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$. (Risultato: $2\pi R$)

4. Dimostrare che se ω è una curva semplice chiusa che percorre in senso antiorario la frontiera di un insieme E del piano, allora
$$|E| = \frac{1}{2}\int_\gamma x\,dy - y\,dx.$$
(Suggerimento: utilizzare le formule di Green)

Teorema del rotore e della divergenza

1. Sia $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2+y^2 \le 1,\ z = x^2+y^2\}$ una superficie orientata con la normale che ha componente z positiva. Sia $\xi(x,y,z) = (x+y, z, xy)$

un campo vettoriale su $\mathbb{R}^3$. Verificare il teorema di Stokes, calcolando entrambi gli integrali:

$$\int_S (\operatorname{rot}\xi, \nu_S)\, d\sigma = \int_{\partial S} (\xi, \tau_{\partial S})\, ds.$$

(Risultato: $-\pi$)

2. Sia $E = \{(x, y, z) \colon |x| \leq 1,\ y^2 + z^2 \leq 1\}$. Sia $\xi(x, y, z) = (x^2 - 1, 0, y^2 z)$. Verificare il teorema della divergenza:

$$\int_E \operatorname{div}\xi = \int_{\partial E} (\xi, \nu_{\partial E})\, d\sigma.$$

(Risultato: $\pi/2$)

3. Sia γ la spezzata che percorre i lati del triangolo di vertici $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$ in $\mathbb{R}^3$ nell'ordine indicato. Sia $\xi(x, y, z) = (z^2, y^2, x)$. Calcolare:

$$\int_\gamma (\xi, \gamma'(t))\, dt.$$

(Risultato: $-1/6$).

4. Sia $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 \leq \pi/2,\ z = \cos(x^2 + y^2)\}$ una superficie orientata con la normale che ha componente z positiva (cioè rivolta verso l'alto). Sia $\xi = \operatorname{rot}(z^2, x^3, xz)$. Calcolare

$$\int_S (\xi, \nu_S)\, d\sigma.$$

(Suggerimento: considerare un'altra superficie con lo stesso bordo di S sulla quale sia più facile calcolare l'integrale. Per il teorema di Stokes l'integrale di un rotore su due superfici con lo stesso bordo è uguale.) (Risultato: $\frac{3}{16}\pi^3$)

5. Sia V l'interno di un cilindro retto con base un cerchio di raggio R di centro $(0, 0, 0)$ contenuto nel piano $z = 0$, altezza pari a H, e asse sull'asse z. Sia $\xi(x, y, z) = (xz, y^2, z^2)$. Verificare il teorema della divergenza:

$$\int_V \operatorname{div}\xi = \int_{\partial V} (\xi, \nu_{\partial V})\, d\sigma.$$

(Risultato: $\frac{3}{2}\pi H^2 R^2$)

6. Calcolare

$$\int_S (\xi, \nu_S)\, d\sigma$$

per $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 + z^2 = 9\}$, $\xi = (3x, 2y, 0)$. (Risultato: 180π).

7. Calcolare
$$\int_S (\xi, \nu_S)\, d\sigma$$
dove $S = \partial Q$, $Q = [-1,1] \times [-1,1] \times [0,2]$ e $\xi = (y^2 z, y^3, xz)$. (Risultato: 8)

8. Calcolare
$$\int_{\partial E} (\xi, \nu_{\partial E})\, d\sigma$$
dove $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 \leq z \leq 1\}$, $\xi = (y, x, z^2)$. (Risultato: $\frac{2}{3}\pi$)

9. Sia γ la circonferenza di equazioni:
$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 2 + 2\cos t \\ z = 2 + 2\sin t \end{cases}$$
con $t \in [0, 2\pi]$. Calcolare
$$\int_\gamma x^2 e^{5z}\, dx + x\cos y\, dy + 3y\, dz.$$
(Risultato: 12π)

10. Sia $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon z = x(1-x)y(1-y),\ x \in [0,1],\ y \in [0,1]\}$, $\xi = (0,0,x)$. Calcolare
$$\int_S (\xi, \nu_S)\, d\sigma.$$
(Risultato: $\frac{1}{2}$)