

# Analisi Matematica I

## Prova scritta n. 3

Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2014-2015

14 luglio 2015

1. Dimostrare che per ogni  $y > 0$  l'equazione

$$e^{-x} = xy$$

ha una unica soluzione positiva. Denotiamo con  $f(y)$  la funzione che ad ogni  $y > 0$  associa tale soluzione (ad esempio si osservi che  $f(1/e) = 1$ ). Dimostrare che  $f$  è una funzione derivabile e calcolare  $f'(1/e)$ . Dimostrare inoltre che  $f$  è convessa sull'intervallo  $(0, +\infty)$ .

2. Studiare la seguente funzione e disegnarne il grafico

$$f(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}.$$

Inoltre verificare che vale la disuguaglianza

$$f(x) \geq \cos x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Utilizzare tale disuguaglianza per mostrare che

$$\pi < 2\sqrt{6 - 2\sqrt{3}}.$$

3. Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \int_0^x e^{t^2 - x^2} dt.$$

4. Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\log n}{n};$$

stabilire inoltre se la serie converge assolutamente.