

**Analisi Matematica I** – CdL Fisica e Astrofisica  
Quarto appello - 16 Giugno 2014

**Esercizio 1.** Sia  $A \subseteq \mathbb{R}$  un insieme con le seguenti proprietà:

- (i)  $x \in A \Rightarrow -\frac{x}{2} \in A$ ,
- (ii)  $x \in A \Rightarrow -x \notin A$ ,
- (iii)  $2014 \in A$ .

Dimostrare che

- (a)  $0 \notin A$ ,
- (b)  $0 \in \partial A$ ,
- (c)  $\partial A$  è un insieme infinito (facoltativo).

**Esercizio 2.** Calcolare i seguenti integrali:

$$\int_{-1}^0 \frac{x+1}{(x-1)^2} dx, \quad \int_2^{\infty} \left( \frac{x+1}{(x-1)^2} - \frac{1}{x} \right) dx.$$

**Esercizio 3.** Al variare del parametro reale  $\beta$  determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^{\beta} \log(1+2^n).$$

**Esercizio 4.** Al variare del parametro reale positivo  $a$  si consideri la funzione

$$f_a(x) = x^a \log(x)$$

1. Provare che l'estremo superiore di  $f_a$  è  $+\infty$ ;
2. Provare che  $f_a$  ammette minimo e che esiste un unico punto di minimo;
3. Detto  $m_a$  il minimo di  $f_a$  ed  $x_a$  l'unico punto di minimo di  $f_a$  calcolare, se esistono,

$$\lim_{a \rightarrow \infty} m_a; \quad \lim_{a \rightarrow 0^+} m_a; \quad \lim_{a \rightarrow \infty} x_a; \quad \lim_{a \rightarrow 0^+} x_a.$$