Matematica, 12 CFU, Corso di laurea in Scienze Biologiche- A.A. 2010-2011-Corso A

13 Giugno 2011- **COMPITO** 1- Totale punti 40, punteggio minimo 24

Nome

Cognome

(4 punti) Calcolare i seguenti limiti: (a) $\lim_{n\to\infty} \frac{\log(n)+\log(n^5)}{\log(5n)}$, (b) $\lim_{x\to 0^+} \frac{4\sin(e^{4x}-1)}{1-\cos(4x)}$.

(a) 6

(b) $+\infty$

(5 punti) Calcolare il seguente integrale indefinito $\int \frac{(\cos(x)-3)\sin(x)}{\sin^2(x)-\cos^2(x)+3}\, dx$

$$\int \frac{(\cos x-3)\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}^2 x-\cos^2 x+3}\,dx = \begin{matrix}\text{sost.}\\ t=\cos x\end{matrix} = \int \frac{t-3}{1-t^2-t^2+3}\,dt =$$

$$= \int \frac{t-3}{4-2t^2} = -\frac{1}{2}\int \frac{t-3}{t^2-2}\,dt = \text{Razioni rapporto di polinomi} \Rightarrow \frac{t-3}{t^2-2} = \frac{A}{t-\sqrt{2}} + \frac{B}{A+\sqrt{2}} = \text{etc.}$$

(5 punti) Determinare gli asintoti della funzione: $f(x) = \frac{x}{\sqrt{\log(x)+1}} + 3x$

Insieme definizione $\begin{cases} 1+\log x \geq 0 \\ x>0 \end{cases} \Rightarrow x > e^{-1}$

$\lim_{x\to(\frac{1}{e})^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 3$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)-3x = +\infty$

Asint. verticale no asintoto obbliquo

(5 punti) Determinare gli eventuali massimi e minimi relativi ed assoluti della funzione: $f(x) = xe^{\frac{1}{2\log x}}$.

Insieme definizione $x>0$, $2\log x \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$, $f(x) \geq 0 \ \forall x \in]0,1[\cup]1,+\infty$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 0$

$$f'(x) = e^{\frac{1}{2\log x}} \left[1 - \frac{x}{[2\log x]^2} \cdot \frac{2}{x}\right]$$

$f'(x) = 0$ $\underbrace{x = e^{\sqrt{2}}}_{\text{min rel.}}$ $\underbrace{x = e^{-1/\sqrt{2}}}_{\text{max rel.}}$ no max assoluto minimo $= 0$.

punti) Determinare la soluzione dell'equazione differenziale $y' = y\sin x + \sin(2x)$ tale che $y(0) = -2$.

$y' = y \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x$ Equ lineare del primo ordine.

$y(x) = e^{-\cos x} \int e^{\cos x}(2 \underbrace{\operatorname{sen} x \cos x}_{\text{per parti}})\, dx = -2\, e^{-\cos x}\left(\cos x\, e^{\cos x} - e^{\cos x} + c\right]$

$= -2\cos x + 2 - 2c\, e^{-\cos x}$

$y(0) = 2 \Rightarrow c = e.$ $\quad \bar{y}(x) = 2 - 2\cos x - 2e^{1-\cos x}$

4 punti) Da un sacchetto che contiene sette palline numerate da una a sette vengono estratte due palline. Calcolare la probabilita' che esse abbiano due numeri consecutivi (uno e sette non sono da considerarsi consecutivi).

possibili scelte di palline $\binom{7}{2} = 21$ - le scelte di palline con numeri consecutivi sono 6 - La risposta è $\boxed{\frac{6}{21} = \frac{2}{7}}$

4 punti) In un gioco d'azzardo si estrae una carta da un mazzo di cinque carte numerate da 1 a cinque. Se la carta é pari si vince il quadrato del valore della carta (in Euro); se la carta é dispari si perde il doppio del valore della carta (in Euro). Calcolare il valore atteso della variabile aleatoria data dalla vincita (o perdita) al gioco.

valori variabili aleatoria e probabilità corrispondenti.

$1 \to -2$

$2 \to 4$ $\quad$ Prob. $= \frac{1}{5}$, Valore atteso $= \frac{1}{5}(-2) + \frac{1}{5}4 + \frac{1}{5}(-6) + \frac{1}{5}16 + \frac{1}{5}(-10) =$

$3 \to -6$

$4 \to 16$ $\quad = \boxed{\frac{2}{5}}$

$5 \to -10$

(8 punti) **Minimi e massimi relativi. Teorema di Fermat e Teorema di Rolle.**