SOLUZIONI PROVA SCRITTA N. 2
5/7/2011

1. $$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)! - n!}{\sqrt{(2n)!}}$$

$$(n+1)! - n! = (n+1)\, n! - n! = (n+1-1)\, n! = n \cdot n!$$

Applichiamo il criterio del rapporto a $a_n = \dfrac{n \cdot n!}{\sqrt{(2n)!}}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)(n+1)!}{\sqrt{(2(n+1))!}} \cdot \frac{\sqrt{(2n)!}}{n \cdot n!} =$$

$$= \frac{(n+1)^2\, \cancel{n!}}{n\, \cancel{n!}} \cdot \sqrt{\frac{(2n)!}{(2n+2)!}} = \frac{(n+1)^2}{n} \sqrt{\frac{\cancel{(2n)!}}{(2n+2)(2n+1)\cancel{(2n)!}}}$$

$$= \frac{(n+1)^2}{n\sqrt{(2n+2)(2n+1)}} = \frac{n^2 + 2n + 1}{2n^2 \sqrt{\left(1 + \frac{2}{2n}\right)\left(1 + \frac{1}{2n}\right)}}$$

$$= \frac{1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}{2\sqrt{\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{1}{2n}\right)}} \longrightarrow \frac{1}{2} \quad \text{per } n \to \infty$$

Quindi il limite cercato è 0.

2. Studio la funzione $f(x)=\dfrac{x^4+2}{x^4-3x}$

La funzione è definita ~~per~~ quando $x^4-3x\neq 0$

Cioè: $x^4-3x = x(x^3-3)$

Segno e C.E.:

		0		$\sqrt[3]{3}$	
Numeratore	+	+	+	+	+
Denominatore	+	0	−	0	+
$f(x)$	+	$\nexists$	−	$\nexists$	+

$\lim_{x\to 0^-} f(x)=+\infty$, $\lim_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$,

$\lim_{x\to \sqrt[3]{3}^-} f(x)=-\infty$, $\lim_{x\to \sqrt[3]{3}^+} f(x)=+\infty$.

$\lim_{x\to \pm\infty} f(x)=1.$

Derivata:

$$f'(x)=\frac{4x^3(x^4-3x)-(x^4+2)(4x^3-3)}{(x^4-3x)^2}$$

$$=\frac{\cancel{4x^7}-12x^4-\cancel{4x^7}-8x^3+3x^4+6}{\%}$$

$$=\frac{-9x^4-8x^3+6}{\%}$$

Pongo $g(x)=-9x^4-8x^3+6$

$$g'(x) = -36x^3 - 24x^2 = -12x^2(3x+2)$$

x:		$-\frac{2}{3}$		0	
$g'(x)$:	$+$	0	$-$	0	$-$
$g(x)$	$\nearrow$	max	$\searrow$	flesso	$\searrow$

$$g(0) = 6 \Rightarrow g\left(-\frac{2}{3}\right) > g(0) > 0.$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} g(x) = -\infty.$$

Da queste informazioni, per la stretta monotonia di f negli intervalli $\left(-\infty, -\frac{2}{3}\right]$ e $[0, +\infty)$ possiamo affermare che $g(x)$ ha 2 zeri:

$$x_1 < -\frac{2}{3} < 0 < x_2$$

$$g(x_1) = 0, \quad g(x_2) = 0.$$

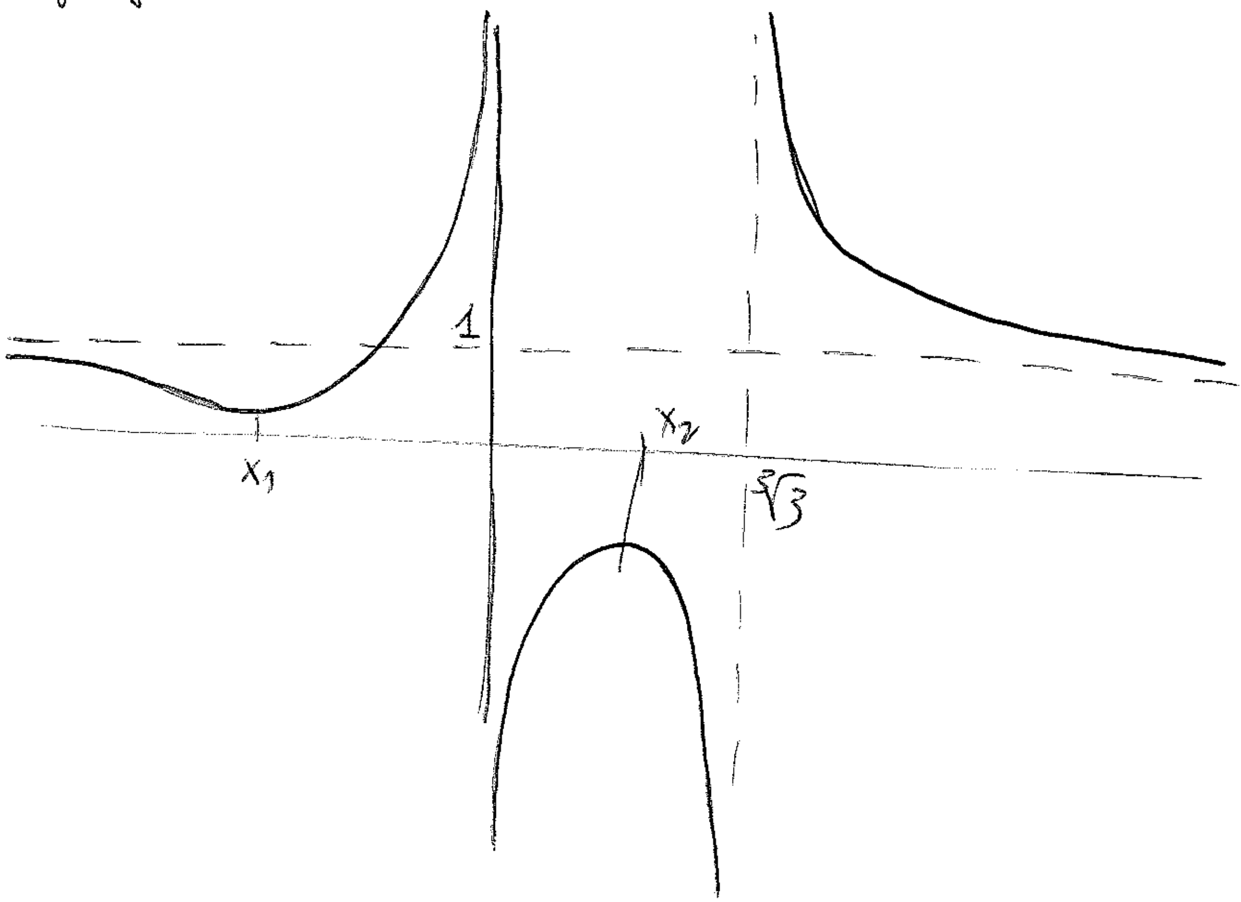
Essendo $g(\sqrt[3]{3}) = -9\sqrt[3]{3} \cdot 3 - 8 \cdot 3 + 6 < 0$

deduciamo anche che $\quad x_2 < \sqrt[3]{3}.$

Dunque abbiamo il segno di $g(x)$ e quello di $f'(x)$:

x:		x_1		0		x_2		$\sqrt[3]{3}$	
$g(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$\nexists$	$+$	0	$-$	$\nexists$	$-$
$f(x)$	$\searrow$	min	$\nearrow$		$\nearrow$	max	$\searrow$	$\nexists$	$\searrow$

Dagli elementi raccolti otteniamo il seguente grafico:



Evitiamo lo studio della derivata seconda...

3. Posto $F(x) = \int_0^x \cos(t^2)\, dt$

dobbiamo calcolare:

$$\lim_{x \to 0} \frac{F(x^2) - F(x)}{x^3}$$ forma indet. $\frac{0}{0}$

Sapendo che $F'(x) = \cos(x^2)$ (Teorema fondamentale del Calcolo)

~~possiamo~~ Possiamo provare ad applicare l'Hôpital:

$$\lim_{x \to 0} \frac{F'(x^2) \cdot 2x - F'(x)}{3x^2} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\overset{\to 0}{\cos(x^4) \cdot 2x} - \overset{\to 1}{\cos(x^2)}}{\underset{\to 0}{3x^2}} = -\infty$$