Analisi Matematica 2 e Complementi
Soluzioni prova scritta n. 2

Corso di studio in Ingegneria Chimica, Elettrica ed Energetica
a.a. 2009-2010

26 giugno 2010

1. Si consideri la funzione

$$f(x, y) = x^4 - 2xy^3 + y^2.$$

Determinare i punti critici e specificare se sono massimi o minimi locali.

Soluzione. Calcoliamo le derivate parziali:

$$\begin{aligned} f_x &= 4x^3 - 2y^3 \\ f_y &= -6xy^2 + 2y = 2y(1 - 3xy). \end{aligned}$$

La f_x si annulla sulla retta $y = \sqrt[3]{2}x$. La f_y si annulla sulla retta $y = 0$ e sull'iperbole $xy = 1/3$. Si vede quindi che siamo di fronte a tre punti critici che, con pochi calcoli troviamo essere:

$$(0, 0), \qquad \left(\pm\frac{1}{\sqrt[6]{54}}, \pm\sqrt[6]{\frac{2}{27}}\right).$$

Studiando il segno di f_x, osserviamo che su ogni retta orizzontale il minimo di f viene assunto all'intersezione con la retta $y = \sqrt[3]{2}x$. D'altra parte studiando la funzione $g(x) = f(x, \sqrt[3]{2}x)$ si nota che in $x = 0$ la funzione g (ovvero f ristretta alla retta $f_x = 0$) ha un minimo locale. Dunque si conclude che $(0, 0)$ è un minimo locale per f, in quanto si può affermare che, se $|y| < \sqrt[6]{\frac{2}{27}}$ si ha

$$f(x, y) \geq f(1/\sqrt[3]{2}y, y) \geq f(0, 0).$$

Dunque $(0, 0)$ è un punto di minimo locale per f.

Gli altri due punti sono punti di sella, come si può verificare calcolando il determinante della matrice hessiana, oppure osservando che lungo le rette orizzontali sono punti di minimo mentre sulla retta $f_x = 0$ sono punti di massimo.

2. Si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x}{1+k^2x^2}.$$

Dimostrare che

(a) la serie converge uniformemente sull'intervallo $[1, +\infty)$;

(b) la serie non converge totalmente su tutto $\mathbb{R}$;

(c) la serie non converge uniformemente su tutto $\mathbb{R}$.

Soluzione. Studiando la funzione $f_k(x) = \frac{x}{1+k^2x^2}$ si osserva che tale funzione è dispari, ha un massimo per $x = 1/k$, un minimo per $x = -1/k$ vale 0 in 0 e tende a 0 a $\pm\infty$.

Dunque si ha

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_k(x)| = f_k\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{2k}$$

e visto che $\sum \frac{1}{2k} = +\infty$, la serie non converge totalmente su tutto $\mathbb{R}$.

Sull'intervallo $[1, +\infty)$ osserviamo invece che si ha

$$\sup_{x\geq 1} |f_k(x)| = f_k(1) = \frac{1}{1+k^2}$$

ed essendo $\sum \frac{1}{1+k^2} < +\infty$ la serie converge totalmente e quindi anche uniformemente su tale intervallo.

Per verificare la convergenza uniforme su tutto $\mathbb{R}$, consideriamo la somma della serie:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x).$$

Si ha

$$\begin{aligned} f(1/n) &= \sum_{k=1}^{\infty} f_k(1/n) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{k^2}{n^2}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+k^2} \\ &\geq \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{2n^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Visto che $f(0) = 0$ e $f(1/n) \geq 1/2$ possiamo quindi concludere che la funzione f non è continua in 0. Dunque la convergenza non può essere uniforme su tutto $\mathbb{R}$, altrimenti essendo ogni f_k una funzione continua, anche la somma f dovrebbe essere continua.

3. Si calcoli l'integrale
$$\int_\gamma \frac{1}{z(z^2-1)(z^2-4)}\,dz$$
sulla curva $\gamma(t) = t + i\cos(\pi t)$, $t \in (-\infty, +\infty)$.

Soluzione. La funzione integranda
$$f(z) = \frac{1}{z(z^2-1)(z^2-4)}$$
presenta cinque poli semplici nei punti 0, ± 1 e ± 2.

Osserviamo che la curva γ presa in considerazione è illimitata e non è chiusa. Tra i poli della funzione f osserviamo che ± 1 si trovano al di sopra della curva mentre 0 e ± 2 si trovano al di sotto. Per poter utilizzare il teorema dei residui, dato $R > 0$ consideriamo la curva chiusa γ_R formata dal tratto di γ con $t \in [-R, R]$ e dal tratto di circonferenza centrato in 0 che congiunge gli estremi $\gamma(R)$ e $\gamma(-R)$ in senso antiorario. Se R è maggiore di 1 i poli contenuti all'interno della curva saranno i punti ± 1. Dunque per il teorema dei residui avremo:
$$\int_{\gamma_R} f(z)\,dz = 2\pi i(\mathrm{Res}(f,-1) + \mathrm{Res}(f,1)).$$

D'altra parte per il teorema del grande cerchio (che si può applicare visto che chiaramente $zf(z) \to 0$ per $|z| \to \infty$) la parte di integrale calcolato sulla circonferenza di raggio R tende a zero per $R \to \infty$. Dunque si ha
$$\int_\gamma f(z)\,dz = \lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_R} f(z)\,dz = 2\pi i(\mathrm{Res}(f,-1) + \mathrm{Res}(f,1)).$$

Non ci resta che calcolare i residui:
$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}(f,1) &= (z-1)f(z)|_{z\to 1} = \left.\frac{1}{z(z+1)(z^2-4)}\right|_{z=1} = -\frac{1}{6}\\
\mathrm{Res}(f,-1) &= (z+1)f(z)|_{z\to -1} = \left.\frac{1}{z(z-1)(z^2-4)}\right|_{z=-1} = -\frac{1}{6}
\end{aligned}$$
e quindi l'integrale cercato vale $-\frac{2}{3}\pi i$.

4. Trovare l'antitrasformata di Laplace della funzione
$$F(s) = \frac{1}{(s-1)^2+1}.$$

Soluzione. Ricordiamo che
$$\mathcal{L}[\sin(t)](s) = \frac{1}{s^2+1}$$

mentre

$$\mathcal{L}[e^{at}f(t)](s) = \mathcal{L}[f(t)](s-a)$$

dunque possiamo concludere che

$$\mathcal{L}[e^t \sin t](s) = \frac{1}{(s-1)^2+1}.$$

In conlusione $f(t) = e^t \sin t$ è la funzione cercata.