Analisi Matematica 1
Soluzioni prova scritta n. 3

Corso di laurea in Matematica, a.a. 2008-2009

16 settembre 2009

1. Calcolare
$$\lim_{x\to 0} \frac{8(e^{-x^2} - \cos x)^3 + x^6}{4x^2(\cos x - 1)^2 \cos^2 x - x^6}.$$

Soluzione. Tramite gli sviluppi di Taylor sappiamo che
$$\begin{aligned} e^{-x^2} &= 1 - x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4) \\ \cos x &= 1 - x^2 + \frac{x^4}{24} + o(x^4). \end{aligned}$$

Dunque
$$\begin{aligned} (e^{-x^2} - \cos x)^3 &= \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{11}{24}x^4 + o(x^4)\right)^3 \\ &= -\frac{x^6}{8} + \frac{11}{32}x^8 + o(x^8). \end{aligned}$$

D'altra parte
$$\begin{aligned} &4x^2(\cos x - 1)^2 \cos^2 x - x^6 \\ &= 4x^2(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^5))^2(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2))^2 - x^6 \\ &= 4x^2(\frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{24} + o(x^7))(1 - x^2 + o(x^2)) - x^6 \\ &= (x^6 - \frac{x^8}{6} + o(x^9))(1 - x^2 + o(x^2)) - x^6 \\ &= x^6 - \frac{x^8}{6} - x^8 + o(x^8) - x^6 \\ &= -\frac{7}{6}x^8 + o(x^8). \end{aligned}$$

In conclusione il limite cercato è

$$\lim_{x\to 0}\frac{8(-\frac{x^6}{8}+\frac{11}{32}x^8+o(x^8))+x^6}{-\frac{7}{6}x^8+o(x^8)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{11}{4}+o(1)}{-\frac{7}{6}+o(1)}=-\frac{33}{14}.$$

2. Calcolare

$$\int_{-1}^{1}(x+e^x)^2(e^x-e^{-x})\,dx.$$

Soluzione. Abbiamo

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}(x+e^x)^2(e^x-e^{-x})\,dx &= \int_{-1}^{1}(x^2+2xe^x+e^{2x})(e^x-e^{-x})\,dx\\ &= \int_{-1}^{1}x^2(e^x-e^{-x})\,dx+\int_{-1}^{1}2xe^{2x}\,dx+\int_{-1}^{1}-2x+e^{3x}-e^x\,dx.\end{aligned}$$

Il primo integrale è nullo inquanto la funzione integranda è dispari e il dominio è simmetrico. Il secondo integrale si svolge per parti:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}2xe^{2x}\,dx &= \left[xe^{2x}\right]_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}e^{2x}\,dx\\ &= e^2+e^{-2}-\left[\frac{e^{2x}}{2}\right]_{-1}^{1}\\ &= e^2+e^{-2}-\frac{e^2}{2}+\frac{e^{-2}}{2}=\frac{e^2}{2}+\frac{3}{2}e^{-2}.\end{aligned}$$

L'ultimo integrale è immediato:

$$\int_{-1}^{1}-2x+e^{3x}-e^x\,dx=[-x^2+\frac{e^{3x}}{3}-e^x]_{-1}^{1}=-1+\frac{e^3}{3}-e+1-\frac{e^{-3}}{3}+e^{-1}.$$

In conclusione si ha

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}(x+e^x)^2(e^x-e^{-x})\,dx &= \frac{e^2}{2}+\frac{3}{2}e^{-2}-1+\frac{e^3}{3}-e+1-\frac{e^{-3}}{3}+e^{-1}\\ &= \frac{e^3}{3}+\frac{e^2}{2}-e+e^{-1}+\frac{3}{2}e^{-2}-\frac{e^{-3}}{3}.\end{aligned}$$

3. Al variare del parametro $\alpha\in\mathbb{R}$ determinare il numero di soluzioni dell'equazione

$$x+\alpha=2\log x.$$

Soluzione. Posto $f(x)=2\log x-x$ si tratta di trovare il numero di soluzioni dell'equazione $f(x)=\alpha$ al variare di $\alpha\in\mathbb{R}$. La funzione (e l'equazione) è definita per $x>0$ e si ha

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=-\infty,\qquad \lim_{x\to+\infty}f(x)=-\infty.$$

Dallo studio della derivata prima

$$f'(x) = \frac{2}{x} - 1 > 0 \Leftrightarrow x < 2$$

notiamo che la funzione è crescente nell'intervallo $(0, 2]$ e decrescente nell'intervallo $[2, +\infty)$ ed ha quindi un punto di massimo per $x = 2$. Il valore massimo è dunque $f(2) = 2\log 2 - 2$. Di conseguenza l'equazione $f(x) = \alpha$ non ha soluzioni se $\alpha > 2\log 2 - 2$, ha l'unica soluzione $x = 2$ se $\alpha = 2\log 2 - 2$ ed ha 2 soluzioni (una maggiore e una minore di 2) se $\alpha > 2\log 2 - 2$.

4. Determinare il carattere della serie

$$\sum_n \cos(2n \operatorname{arctg} n) \operatorname{arctg} \frac{1}{n}.$$

Soluzione. Notiamo che[1]

$$\begin{aligned} \cos(2n \operatorname{arctg} n) &= \cos\left(\pi n + 2n\left(\operatorname{arctg} n - \frac{\pi}{2}\right)\right) \\ &= \cos(\pi n) \cos\left(2n\left(\operatorname{arctg} n - \frac{\pi}{2}\right)\right) \\ &= (-1)^n \cos\left(2n \operatorname{arctg} \frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

Dunque la serie data si può riscrivere come

$$\sum_n (-1)^{n+1} f\left(\frac{1}{n}\right)$$

avendo posto

$$f(x) = -\cos\left(2\frac{\operatorname{arctg} x}{x}\right) \operatorname{arctg} x.$$

Per poter applicare il criterio di convergenza per le serie a segni alterni è sufficiente verificare che

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$$

e che $f(x)$ è crescente in un intorno destro di 0 in modo che $f(1/n)$ sia decrescente e non negativo per n abbastanza grande.

Che il limite di $f(x)$ sia zero è immediato in quanto $f(x)$ è prodotto di una funzione limitata per una funzione infinitesima.

[1] Abbiamo sfruttato il fatto che $\sin(\pi n) = 0$ e $\cos(\pi n) = (-1)^n$ e la relazione $\operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x$ valida per $x > 0$.

Per verificare la monotonia di f studiamo la derivata prima:

$$f'(x) = 2\sin\left(2\frac{\operatorname{arctg} x}{x}\right)\frac{\frac{x}{1+x^2}+\operatorname{arctg} x}{x^2}\operatorname{arctg} x - \frac{\cos\left(2\frac{\operatorname{arctg} x}{x}\right)}{1+x^2}. \tag{1}$$

Osserviamo immediatamente che

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\cos\left(2\frac{\operatorname{arctg} x}{x}\right)}{1+x^2} = \cos 2 < 0$$

e dunque per il teorema della permanenza del segno il sottraendo in (1) è negativo in tutto un intorno destro di 0. Si ha anche

$$\lim_{x\to 0^+}\sin(2\frac{\operatorname{arctg} x}{x}) = \sin 2 > 0$$

e per ogni $x > 0$

$$\frac{\frac{x}{1+x^2}+\operatorname{arctg} x}{x^2}\operatorname{arctg} x > 0$$

dunque il minuendo è positivo in un opportuno intorno di 0. Di conseguenza, come volevamo dimostrare, $f'(x) > 0$ in un intorno destro di zero e quindi f è strettamente crescente in tale intorno.

Si può quindi concludere che la serie è convergente.

5. Sia $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile con le seguenti proprietà:

   (a) $f(0) = f(1) = 1$;

   (b) l'insieme degli zeri, $Z = \{x \in [0,1]\colon f(x) = 0\}$, ha 7 elementi.

   Dimostrare che esiste un punto $\bar{x} \in Z$ tale che $f'(\bar{x}) = 0$.

   Soluzione. L'idea della dimostrazione è che attraversando un punto di zero, una funzione derivabile cambia segno, a meno che la derivata non si annulli nel punto stesso. Dunque se la derivata non si annullasse mai nell'insieme degli zeri, la funzione dovrebbe cambiare segno ad ogni attraversamento degli zeri. Se abbiamo un numero dispari di zeri compresi tra 0 e 1, come nel nostro caso, i valori $f(0)$ e $f(1)$ dovrebbero avere segni opposti.

   Per formalizzare questo ragionamento sarà sufficiente dimostrare la seguente proprietà: *se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è una funzione derivabile e per un certo $x_0 \in (a,b)$ si ha $f(x_0) = 0$ e $f'(x_0) \neq 0$ allora esiste un intorno U di x_0 tale che in $U \cap \{x > x_0\}$ e in $U \cap \{x < x_0\}$ la funzione f assume segni opposti.*

   Supponiamo per fissare le idee che $f'(x_0) > 0$ (l'altro caso è del tutto analogo). Allora si ha

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} > 0.$$

Per il teorema della permanenza del segno esiste un intorno U di x_0 tale che per ogni $x \in U \setminus \{x_0\}$ vale

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$$

cioè

$$f(x) - f(x_0) > 0 \qquad \text{per } x \in U,\ x > x_0 f(x) - f(x_0) < 0 \qquad \text{per } x \in U,\ x < x_0.$$

In particolare visto che $f(x_0) = 0$ abbiamo dimostrato che in U per $x > x_0$ si ha $f(x) > 0$ e per $x < x_0$ si ha $f(x) < 0$. Questo conclude la dimostrazione della proprietà che avevamo annunciato.