Analisi Matematica 1
Prova scritta n. 1

Corso di laurea in Matematica, a.a. 2008-2009

15 giugno 2009

`*AA**AA*`

1. Sia a_n la successione definita per ricorrenza:
$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{3}{2}a_n - a_n^3, \\ a_1 = \frac{3}{2}. \end{cases}$$
Calcolare $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

2. Al variare del parametro $x \in \mathbb{R}$ determinare il carattere della serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n^2} x^n$$

3. Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ calcolare
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\left(\sin^2 x + \cos(x^2) - x^2\right)^3 - 1}{x^\alpha \log(1+x)}.$$

4. Determinare il numero di soluzioni dell'equazione
$$\frac{\pi}{4} + \log(x^3 - x) = \operatorname{arctg} x.$$

5. Si consideri la funzione
$$f(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\log t}\, dt$$
definita per $x > 0$ e $x \neq 1$.
   (a) Dimostrare che f, f' e f'' sono definite e positive in ogni punto del dominio di f (cioè per $x > 0$ e $x \neq 1$).
   (b) Calcolare $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
   (c) Dimostrare che $\lim\limits_{x\to 1} f(x) - f(1/x) = 0$.
   (d) Dimostrare che la funzione f può essere estesa per continuità nel punto $x = 1$.

N.B. Sulla prima pagina del compito occorre scrivere, oltre al proprio nome e cognome, il codice di 8 lettere riportato nel riquadro in alto. Non è necessario consegnare questo foglio.

Analisi Matematica 1
Prova scritta n. 1

Corso di laurea in Matematica, a.a. 2008-2009

15 giugno 2009

*BB**BB*

1. Sia a_n la successione definita per ricorrenza:
$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{3}{2}a_n - a_n^3, \\ a_1 = -\frac{3}{2}. \end{cases}$$
Calcolare $\lim_{n\to\infty} a_n$.

2. Al variare del parametro $x \in \mathbb{R}$ determinare il carattere della serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2-n}{n^2} x^n$$

3. Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ calcolare
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\left(\tan^2 x + \cos(x^2) - x^2\right)^3 - 1}{x \log(1+x^\alpha)}.$$

4. Determinare il numero di soluzioni dell'equazione
$$\frac{\pi}{4} + \log(x - x^3) + \operatorname{arctg} x = 0.$$

5. Si consideri la funzione
$$f(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\log t}\, dt$$
definita per $x > 0$ e $x \neq 1$.
   (a) Dimostrare che f, f' e f'' sono definite e positive in ogni punto del dominio di f (cioè per $x > 0$ e $x \neq 1$).
   (b) Calcolare $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ e $\lim_{x\to +\infty} f(x)$.
   (c) Dimostrare che $\lim_{x\to 1} f(x) - f(1/x) = 0$.
   (d) Dimostrare che la funzione f può essere estesa per continuità nel punto $x = 1$.

N.B. Sulla prima pagina del compito occorre scrivere, oltre al proprio nome e cognome, il codice di 8 lettere riportato nel riquadro in alto. Non è necessario consegnare questo foglio.

Analisi Matematica 1
Prova scritta n. 1

Corso di laurea in Matematica, a.a. 2008-2009

15 giugno 2009

`*CC**CC*`

1. Sia a_n la successione definita per ricorrenza:
$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{3}{2}(a_n - a_n^3), \\ a_1 = \frac{6}{5}. \end{cases}$$
Calcolare $\lim_{n\to\infty} a_n$.

2. Al variare del parametro $x \in \mathbb{R}$ determinare il carattere della serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+2} x^n$$

3. Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ calcolare
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\left(\tan^2 x + e^{(x^4)} - x^2\right)^3 - 1}{x^\alpha \log(1+x^2)}.$$

4. Determinare il numero di soluzioni dell'equazione
$$\frac{\pi}{4} + \log(x^3 - x) = \operatorname{arctg} x.$$

5. Si consideri la funzione
$$f(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\log t}\, dt$$
definita per $x > 0$ e $x \neq 1$.
   (a) Dimostrare che f, f' e f'' sono definite e positive in ogni punto del dominio di f (cioè per $x > 0$ e $x \neq 1$).
   (b) Calcolare $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
   (c) Dimostrare che $\lim_{x\to 1} f(x) - f(1/x) = 0$.
   (d) Dimostrare che la funzione f può essere estesa per continuità nel punto $x = 1$.

N.B. Sulla prima pagina del compito occorre scrivere, oltre al proprio nome e cognome, il codice di 8 lettere riportato nel riquadro in alto. Non è necessario consegnare questo foglio.

Analisi Matematica 1
Prova scritta n. 1

Corso di laurea in Matematica, a.a. 2008-2009

15 giugno 2009

`*DD**DD*`

1. Sia a_n la successione definita per ricorrenza:
$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{3}{2}a_n - a_n^3, \\ a_1 = -\frac{6}{5}. \end{cases}$$
Calcolare $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

2. Al variare del parametro $x \in \mathbb{R}$ determinare il carattere della serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1+n^2} x^n$$

3. Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ calcolare
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\left(\sin^2 x + e^{(x^4)} - x^2\right)^3 - 1}{x^2 \log(1+x^\alpha)}.$$

4. Determinare il numero di soluzioni dell'equazione
$$\frac{\pi}{4} + \log(x - x^3) + \operatorname{arctg} x = 0.$$

5. Si consideri la funzione
$$f(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\log t}\, dt$$
definita per $x > 0$ e $x \neq 1$.
   (a) Dimostrare che f, f' e f'' sono definite e positive in ogni punto del dominio di f (cioè per $x > 0$ e $x \neq 1$).
   (b) Calcolare $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.
   (c) Dimostrare che $\lim\limits_{x\to 1} f(x) - f(1/x) = 0$.
   (d) Dimostrare che la funzione f può essere estesa per continuità nel punto $x = 1$.

N.B. Sulla prima pagina del compito occorre scrivere, oltre al proprio nome e cognome, il codice di 8 lettere riportato nel riquadro in alto. Non è necessario consegnare questo foglio.