Analisi Matematica IV modulo
Soluzioni prova scritta preliminare n. 2

Corso di laurea in Matematica, a.a. 2007-2008

23 maggio 2008

1. Disegnare approssimativamente le curve di livello della funzione

$$f(x,y) = 2x^3 - 3x^2 - y^4 - y^2.$$

In particolare dire per quali valori di $c \in \mathbb{R}$ l'insieme di livello

$$L_c = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon f(x,y) = c\}$$

è connesso e per quali è limitato.

(facoltativo) Dire se esiste una curva continua $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ tale che

$$\gamma(0) = (0, 1/2), \quad \gamma(1) = (2,1) \quad \text{e} \quad f(\gamma(t)) \geq f(\gamma(0)) \quad \forall t \in [0,1].$$

Soluzione. Studiando le derivate parziali prime e seconde della funzione, possiamo determinare la presenza di due punti critici: $(0,0)$ e $(1,0)$ che sono rispettivamente un massimo locale e un punto di sella. I corrispondenti valori della funzione sono $f(0,0) = 0$, e $f(1,0) = -1$. Attorno al punto $(0,0)$ (che è un punto isolato dell'insieme di livello L_0) gli insiemi L_c con $c < 0$ formano delle curve chiuse di forma approssimativamente ellittica. Attorno al punto di sella $(1,0)$ le curve di livello saranno approssimativamente delle iperboli. L'insieme di livello L_{-1} avrà in questo punto sarà formato da due curve che si incrociano a "X". Ogni insieme di livello è limitato a sinistra, in quanto se si avesse $x \to -\infty$, si avrebbe $f(x,y) \to -\infty$ e questo non può accadere su un insieme di livello. Inoltre gli insiemi di livello sono simmetrici rispetto all'asse delle x, in quanto $f(x,y) = f(x,-y)$.

Per $x \to +\infty$ si osserva che deve essere $y \to \pm\infty$ e si verifica facilmente che ogni insieme di livello è illimitato a destra. Visto che $f(x,0)$ assume tutti i valori reali, ogni insieme di livello incontra l'asse delle x, e quindi nessun insieme di livello è vuoto.

Si può quindi osservare che per $c > 0$ i livelli L_c hanno una forma simile a parabole, con asse $y = 0$, concavità verso destra e vertice in $(x,0)$ con $x > 3/2$.

Per $c = 0$ il livello L_0 ha un punto isolato in $(0,0)$, e una "specie" di parabola con vertice $(3/2, 0)$ rivolta verso destra.

Per $-1 < c < 0$ i livelli hanno due componenti connesse. Una curva chiusa intorno al punto $(0,0)$ (tipo ellisse), e una curva illimitata tipo parabola, con vertice in $(x,0)$, $1 < x < 3/2$ e concavità a destra.

Per $c = -1$ l'insieme di livello è a forma di "cappio" con una singolarità in $(1,0)$.

Per $c < -1$ i livelli racchiudono entrambi i punti critici, formando una curva con una strozzatura per $x = 1$.

In definitiva nessun livello è limitato, e i livelli L_c con $c \leq -1$ oppure $c > 0$ sono connessi.

Supponiamo ora di avere una curva γ con le proprietà indicate nel testo. Osserviamo che $f(\gamma(0)) = -5/16$ e i punti $\gamma(0)$ e $\gamma(1)$ si trovano in due componenti connesse distinte del sopralivello $\{f \geq -5/16\}$. Dunque γ non può essere una curva continua.

In alternativa si può osservare che posto $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ la componente $x(t)$ è una funzione continua con $x(0) = 0$, $x(1) = 2$. Dunque ci dovrà essere un valore $\bar{t}$ per il quale $x(\bar{t}) = 1$. Ma $f(1, y)$ assume valore massimo -1 per $y = 0$ e dunque $f(\gamma(\bar{t})) \leq -1 < f(\gamma(0))$.

2. Si consideri la forma differenziale

$$\omega = \frac{y}{x^2 + y^2} dx - \frac{x + x^4 + x^2 y^2}{x^2 + y^2} dy.$$

Dire se ω è chiusa e se è esatta. Calcolare $\int_\gamma \omega$ sulla curva

$$\gamma(t) = (\cos(4t), \operatorname{sen}(3t)), \qquad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Soluzione. Posto

$$\omega_1 = \frac{y\, dx - x\, dy}{x^2 + y^2}, \qquad \omega_2 = x^2 dy$$

osserviamo che vale $\omega = \omega_1 - \omega_2$. Si verifica facilmente che la forma differenziale ω_1 è chiusa, mentre ω_2 non lo è. Siccome la somma di forme chiuse è chiusa, possiamo concludere che la forma ω non è chiusa e di conseguenza non è esatta.

Per additività sappiamo che vale

$$\int_\gamma \omega = \int_\gamma \omega_1 - \int_\gamma \omega_2$$

e calcoleremo quindi separatamente i due integrali.

La curva γ non è chiusa, ma ha estremi $\gamma(0) = (1, 0)$ e $\gamma(\pi/2) = (1, -1)$. Con un rapido studio di funzione si osserva che per $t \in [0, \pi/2]$ la curva "gira" attorno all'origine in senso antiorario. Consideriamo dunque una nuova curva formata da due tratti:

$$\gamma_1(t) = (\cos t, \sin t), \qquad t \in [0, 2\pi]$$

e

$$\gamma_2(t) = (1, t), \qquad t \in [-1, 0].$$

Osserviamo che la curva $\gamma + \gamma_2 - \gamma_1$ è una curva chiusa che non si avvolge attorno all'origine. Essendo ω_1 chiusa possiamo quindi inferire che

$$\int_\gamma \omega_1 + \int_{\gamma_2} \omega_1 - \int_{\gamma_1} \omega_1 = 0$$

da cui

$$\int_\gamma \omega_1 = \int_{\gamma_1} \omega_1 - \int_{\gamma_2} \omega_1.$$

Questi ultimi due integrali sono molto semplici da calcolare e si ha

$$\int_{\gamma_1} \omega_1 = -2\pi, \qquad \int_{\gamma_2} \omega_1 = -\frac{\pi}{4}$$

da cui
$$\int_\gamma \omega_1 = -2\pi + \frac{\pi}{4} = -\frac{7}{4}\pi.$$
Ci rimane da calcolare
$$\int_\gamma \omega_2 = 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(4t)\cos(3t)\,dt.$$
Applicando la formula di bisezione abbiamo:
$$\cos^2(4t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(8t)$$
da cui
$$\cos^2(4t)\cos(3t) = \frac{1}{2}\cos(3t) + \frac{1}{2}\cos(8t)\cos(3t)$$
e utilizzando le formule di prostaferesi[1] troviamo
$$2\cos(8t)\cos(3t) = \cos(11t) + \cos(5t)$$
da cui
$$\cos^2(4t)\cos(3t) = \frac{1}{2}\cos(3t) + \frac{1}{4}\cos(11t) + \frac{1}{4}\cos(5t).$$
Dunque l'integrale cercato è
$$\int_\gamma \omega_2 = \frac{23}{55}$$
e quindi
$$\int_\gamma \omega = -\frac{7}{8}\pi - \frac{23}{55}.$$

3. Calcolare l'area della regione di piano
$$C = \{(x,y)\colon y \le 2 - x^2, y \ge x\} \cup \{(x,y)\colon x \le 2 - y^2, y \le x\}.$$
Calcolare inoltre l'integrale
$$\iint_C \frac{y-x}{1+x^2+y^2}\,dx\,dy.$$

Soluzione. La regione C a forma "di cuore", è formata dalle due parti simmetriche rispetto alla retta $y = x$
$$C_1 = \{x \le y \le 2 - x^2\}, \qquad C_2 = \{y \le x \le 2 - y^2\}.$$

[1] Ma il modo più immediato per trovare queste formule si ha utilizzando la formula di Gauss: $e^{ix} = \cos x + i\sin x$ da cui
$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}.$$
Infatti si ha
$$\begin{aligned}\cos^2(4t)\cos(3t) &= \frac{1}{8}(e^{4it} + e^{-4it})^2(e^{3it} + e^{-3it}) \\ &= \frac{1}{8}(e^{8it} + e^{-8it} + 2)(e^{3it} + e^{-3it}) \\ &= \frac{1}{8}(e^{11it} + e^{5it} + e^{-5it} + e^{-11it} + 2e^{3it} + 2e^{-3it}) \\ &= \frac{1}{8}(2\cos(11t) + 2\cos(5t) + 4\cos(3t)).\end{aligned}$$

Dallo studio delle soluzioni di $x = 2 - x^2$ si osserva che le variabili x (e y) variano tra -2 e 1.

l'intersezione di queste due regioni è contenuta nella retta $y = x$ e quindi ha area nulla. Si ha dunque $|C| = |C_1| + |C_2| = 2|C_1|$ (dove con $|\cdot|$ denotiamo l'area di una regione di piano).

Utilizzando le formule di riduzione si ha

$$\begin{aligned}
|C_1| &= \int_{-2}^{1} \left[\int_{x}^{2-x^2} dy \right] dx \\
&= \int_{-2}^{1} 2 - x^2 - x \, dx = \left[2x - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 \right]_{-2}^{1} \\
&= \frac{9}{2}
\end{aligned}$$

da cui $|C| = 9$.

Per quanto riguarda l'integrale della funzione

$$f(x, y) = \frac{y - x}{1 + x^2 + y^2}$$

osserviamo che si ha $f(y, x) = -f(x, y)$ e questo significa che la funzione è antisimmetrica rispetto alla retta $y = x$. Dunque si ha

$$\int_C f = \int_{C_1} f + \int_{C_2} f = \int_{C_1} f - \int_{C_1} f = 0.$$

Per avere conferma diretta possiamo anche fare il calcolo esplicito con le formule di riduzione e scambiare i nomi delle variabili (cosa che non cambia il valore degli integrali)

$$\begin{aligned}
\int_{C_1} f(x, y) \, dx \, dy &= \int_{-2}^{1} \left[\int_{x}^{2-x^2} f(x, y) \, dy \right] dx \\
&= \int_{-2}^{1} \left[\int_{y}^{2-y^2} f(y, x) \, dx \right] dy \\
&= -\int_{-2}^{1} \left[\int_{y}^{2-y^2} f(x, y) \, dx \right] dy \\
&= -\int_{C_2} f(x, y) \, dx \, dy
\end{aligned}$$