Analisi Matematica IV modulo
Soluzioni prova scritta preliminare n. 1

Corso di laurea in Matematica, a.a. 2007-2008

18 aprile 2008

1. Risolvere *(8 punti)*

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y}{x}\left(1 + \dfrac{1}{\log y - \log x}\right) \\ y(e) = 1. \end{cases}$$

Soluzione. Scrivendo $\log y - \log x = \log(y/x)$ si osserva che l'equazione è omogenea e dunque possiamo provare a risolverla con la sostituzione $z = y/x$, $y' = z + xz'$. Si ottiene

$$z + xz' = z(1 + \frac{1}{\log z})$$

da cui

$$z'x = \frac{z}{\log z}$$

che è un'equazione a variabili separabili. Visto che $z > 0$ e $x > 0$ (altrimenti $\log y - \log x$ non sarebbe definito) possiamo riscrivere l'equazione come

$$\frac{\log z}{z} z' = \frac{1}{x}.$$

Si tratta dunque di calcolare i due integrali:

$$\int \frac{\log}{z} z\, dz = \frac{1}{2} \log^2 z$$

$$\int \frac{1}{x}\, dx = \log x$$

da cui

$$\frac{1}{2} \log^2 z = \log x + c.$$

È il momento di sostituire la condizione iniziale $y(e) = 1$ che diventa $z(e) = 1/e$:

$$\frac{1}{2} \log^2 \frac{1}{e} = \log e + c$$

cioè

$$\frac{1}{2} = 1 + c$$

da cui si ricava $c = -\frac{1}{2}$ e quindi

$$\log^2 z = 2 \log x - 1.$$

risolvendo in z e ricordando che intorno al dato iniziale $\log z < 0$ si ha

$$\log z = -\sqrt{2 \log x - 1}$$

e quindi

$$y = xz = xe^{-\sqrt{2 \log x - 1}}.$$

2. Si consideri l'equazione differenziale

$$y' = (xy + y)\log y + xy'.$$

(a) Trovare la soluzione con la condizione $y(2) = e$. *(8 punti)*

(b) Discutere se con la condizione $y(1) = 1$ c'è esistenza e unicità della soluzione. *(4 punti)*

Soluzione. L'equazione può essere riscritta come

$$(1 - x)y' = (x + 1)y \log y$$

che, per $x \neq 1$, è un'equazione a variabili separabili. Dopo aver osservato che $y = 1$ è soluzione, dividiamo per $(1 - x)y \log y$ e otteniamo

$$\frac{1}{y \log y} y' = \frac{x + 1}{1 - x}.$$

Dunque dobbiamo calcolare i seguenti integrali (ricordiamo che $y > 0$ perché altrimenti l'equazione data non è definita):

$$\int \frac{1}{y \log y}\, dy = \log|\log y|$$

$$\int \frac{x + 1}{1 - x}\, dx = -\int 1 + \frac{2}{x - 1}\, dx = -x - 2\log|x - 1|.$$

Dunque troviamo

$$\log|\log y| = -x - 2\log|x - 1| + c. \tag{1}$$

Per risolvere il punto (a) imponiamo la condizione iniziale $y(2) = e$

$$\log\log e = -2 - 2\log 1 + c$$

da cui $c = 2$ e quindi, osservando anche che intorno al dato iniziale $\log y > 0$ e $x > 1$, si ha

$$\log\log y = 2 - x - 2\log(x - 1)$$

da cui si ricava

$$y = e^{e^{2-x-2\log(x-1)}} = e^{\frac{e^{2-x}}{(x-1)^2}}.$$

Per risolvere il punto (b) osserviamo che la funzioen $y = 1$ è, per verifica diretta, soluzione dell'equazione data. Per dimostrare l'unicità della soluzione non possiamo però utilizzare il teorema di Cauchy, in quanto l'equazione non è in forma normale. Noi però abbiamo determinato che la formula (1) è valida per tutte le soluzioni dell'equazione differenziale nella parte di piano dove $x \neq 1$, $y \neq 1$ e $y > 0$. Dunque tutte le soluzioni dell'equazione data (tranne $y = 1$), devono soddisfare tale formula per $x \neq 1$. Osserviamo però che passando al limite per $x \to 1^{\pm}$ in (1) si ottiene

$$\log|\log y| \to +\infty$$

da cui $y \to +\infty$ oppure $y \to 0$. Se invece y fosse soluzione del problema di Cauchy con dato $y(1) = 1$ si avrebbe $y \to 1$. Dunque non ci possono essere altre soluzioni oltre ad $y = 1$.

3. Studiare qualitativamente le soluzioni dell'equazione differenziale

$$y' = \frac{x}{1+x^2} - xy.$$

In particolare:

(a) Studiare la soluzione passante per il punto $(0, \frac{1}{2})$. *(4 punti)*

(b) Determinare il valore $y(1)$ della soluzione passante per il punto $(-1, 1)$. *(4 punti)*

(c) Dimostrare che la soluzione passante per il punto $(0, 1)$ è strettamente decrescente su tutto l'intervallo $x \geq 0$. *(3 punti)*

(d) Sfruttando il carattere lineare dell'equazione mostrare che la differenza tra due soluzioni tende a zero, per $x \to +\infty$, più velocemente di qualunque potenza. *(3 punti)*

Soluzione. Studiando il segno di y' osserviamo che le soluzioni sono crescenti per $x > 0$ e $y < \frac{1}{1+x^2}$ e per $x < 0$ e $y > \frac{1}{1+x^2}$. Osserviamo anche che se $y(x)$ è una soluzione, allora anche $z(x) = y(-x)$ è soluzione. Inoltre l'equazione è definita su tutto il piano x, y e soddisfa le ipotesi del teorema di esistenza e unicità in grande. Dunque le soluzioni saranno definite per ogni $x \in \mathbb{R}$. Poniamo $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

(a) Nel punto $(0, \frac{1}{2})$, la nostra soluzione $y(x)$ ha derivata nulla. Visto che la soluzione $z(x) = y(-x)$ ha lo stesso dato iniziale $z(0) = \frac{1}{2}$, deduciamo che $y = z$ e dunque la nostra soluzione y è pari e il suo grafico è simmetrico rispetto all'asse delle y. Dunque possiamo studiarla solo per $x \geq 0$. In un intorno destro di $x = 0$ la funzione resterà compresa tra 0 e $\frac{1}{1+x^2}$ dunque sarà strettamente crescente. Necessariamente la soluzione incontra, crescendo, la curva $g(x)$ in un punto $\bar{x} > 0$. In $\bar{x}$ si ha $y'(\bar{x}) = 0$ e per $x > \bar{x}$ si ha necessariamente $y(x) > g(x)$ in quanto la soluzione non può attraversare la curva g "dall'alto verso il basso" quando $g' < 0$. Dunque per $x > \bar{x}$ la soluzione risulta essere strettamente decrescente ed inferiormente limitata. Necessariamente ammette limite finito per $x \to +\infty$. Cioè $y(x) \to \bar{y} \geq 0$ per $x \to +\infty$. Passando al limite nell'equazione differenziale si trova che se fosse $\bar{y} > 0$ si avrebbe $y'(x) \to -\infty$ per $x \to +\infty$ e questo è assurdo per una funzione che ha un asintoto orizzontale. Concludiamo quindi che $\bar{y} = 0$.

(b) La soluzione passante dal punto $(-1, 1)$ deve necessariamente incontrare l'asse $x = 0$ in quanto tutte le soluzioni hanno esistenza globale. Dunque tale soluzione coincide con la sua simmetrica ed è quindi una funzione pari. Concludiamo quindi che $y(1) = y(-1) = 1$.

(c) Vogliamo dimostrare che la soluzione passante per $(0, 1)$ incontra la curva $g(x)$ solamente in corrispondenza di $x = 0$. Osserviamo che se per un certo valore $\bar{x} > 0$ si avesse $y(\bar{x}) = g(\bar{x})$, allora per ogni $x > \bar{x}$ si avrebbe $y(x) > g(x)$ in quanto abbiamo già osservato che la soluzione non può attraversare la curva g dall'alto verso il basso, quando $x > 0$. Dunque ci può essere al massimo un valore $\bar{x} > 0$ per cui $y(\bar{x}) = g(\bar{x})$. Allora per $x \in (0, \bar{x})$ si avrebbe $y(x) < g(x)$ e dunque $y'(x) > 0$. D'altra parte si avrebbe $y(\bar{x}) = g(\bar{x}) < g(0) = y(0)$ e dunque per il teorema di Lagrange dovrebbe esistere un punto $\xi \in (0, \bar{x})$ in cui la derivata è negativa. Questo è assurdo e quindi concludiamo che $y(x) > g(x)$ per ogni $x > 0$. Dunque $y'(x) < 0$ per $x > 0$ e y è strettamente decrescente sull'intervallo $x \geq 0$.

(d) La differenza z tra due soluzioni soddisfa l'equazione lineare omogenea

$$z' = -xz.$$

Infatti se y_1, y_2 sono soluzioni, posto $z = y_1 - y_2$ si ha

$$z' = y_1' - y_2' = g(x) - xy_1 - g(x) + xy_2 = -xz.$$

L'equazione omogenea si risolve facilmente, e ha come soluzioni

$$z = ce^{-\frac{x^2}{2}}, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Chiaramente tutte queste funzioni tendono a zero più velocemente di una potenza di x.

(e) Consideriamo come soluzione particolare dell'equazione data (non omogenea) la soluzione $\bar{y}(x)$ passante per il punto $(0, 2)$. Tale soluzione ha esistenza globale e verifica $\bar{y}(x) > g(x)$ per ogni x. Sia ora $y(x)$ una qualunque soluzione, e poniamo $z = y - \bar{y}$. Per quanto visto al punto precedente sappiamo che

$$\lim_{x\to\infty} g(x)z(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{y - \bar{y}}{1 + x^2} = 0.$$

D'altra parte

$$\frac{y - \bar{y}}{1 + x^2} = \frac{y}{1 + x^2} - \frac{\bar{y}}{1 + x^2}$$

e visto che il sottraendo è maggiore di uno ($\bar{y} > g(x)$) e la differenza tende a zero, il primo addendo dovrà diventare positivo, da un certo punto in poi. Dunque $y(x) > 0$ per x sufficientemente grande.