Analisi Matematica III e IV modulo
Soluzioni prova scritta

Corso di laurea in Matematica, a.a. 2005-2006

25 settembre 2006

1. Determinare i punti critici della funzione

$$f(x, y) = x^5 + 2x^3y + 2y^2$$

specificando se sono massimo o minimi relativi.

Soluzione. Si ha

$$\begin{aligned} f_x &= 5x^4 + 6x^2y = x^2(5x^2 + 6y), \\ f_y &= 2x^3 + 4y \end{aligned}$$

da cui si trovano un punto critico per $x = 0$ e $y = 0$ e un punto critico per x, y che risolvono

$$\begin{cases} y = -\frac{5}{6}x^2 \\ y = -\frac{1}{2}x^3 \end{cases}$$

cioè: $x = 5/3$, $y = -125/54$.

Il determinante Hessiano di f nel punto $(0, 0)$ risulta essere nullo, quindi le condizioni del secondo ordine non sono sufficienti a determinare la natura di questo punto critico.

Osserviamo però che $f(x, 0) = x^5$ assume segno positivo per $x > 0$ e negativo per $x < 0$. Dunque il punto $(0, 0)$ non è né massimo né minimo relativo per f.

Per quanto riguarda l'altro punto critico $(\bar{x}, \bar{y}) = (5/3, -125, 54)$ si puó facilmente calcolare la matrice Hessiana di f e osservare che tale matrice ha determinante negativo. Dunque questo punto critico è un punto di sella.

In alternativa si puó osservare che sulla curva $y = -x^3/3$ dove si annulla la derivata f_y, la derivata f_x è positiva per $x < \bar{x}$ e negativa per $x > \bar{x}$. Dunque su tale curva la funzione ha un massimo relativo in $(\bar{x}, \bar{y})$. D'altra parte sulla retta $y = \bar{y}$ la derivata parziale f_x è positiva per $x > \bar{x}$ e negativa per

$x < \bar{x}$. Dunque su tale retta il punto $(\bar{x}, \bar{y})$ è un punto di minimo relativo. Nel complesso, dunque, concludiamo che il punto critico $(\bar{x}, \bar{y})$ non è né un massimo né un minimo relativo.

2. Si consideri la serie di funzioni

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^x}{(x^2+k)^k}.$$

   (a) La serie converge puntualmente su tutto $\mathbb{R}$?

   (b) La serie converge totalmente su tutto $\mathbb{R}$?

   (c) La somma $f(x)$ è una funzione continua?

   Soluzione. La serie converge puntualmente per ogni $x \in \mathbb{R}$. Infatti fissato x si ha

$$0 < \frac{e^x}{(x^2+k)^k} \leq \frac{e^x}{k^k}$$

   e la serie $\sum e^x/k^k$ è convergente (ad esempio si può osservare che per $k > 1$ si ha $e^x/k^k \leq e^x/k^2$).

   La serie $\sum f_k(x)$ con $f_k(x) = \frac{e^x}{(x^2+k)^k}$ non converge totalmente su tutto $\mathbb{R}$ in quanto banalmente

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_k(x)| \geq |lim_{x\to\infty} f_k(x)| = +\infty.$$

   D'altra parte si ha

$$\sup_{x \leq b} |f_k(x)| \leq \sup_{x \leq b} \frac{e^x}{k^k} = \frac{e^b}{k^k}$$

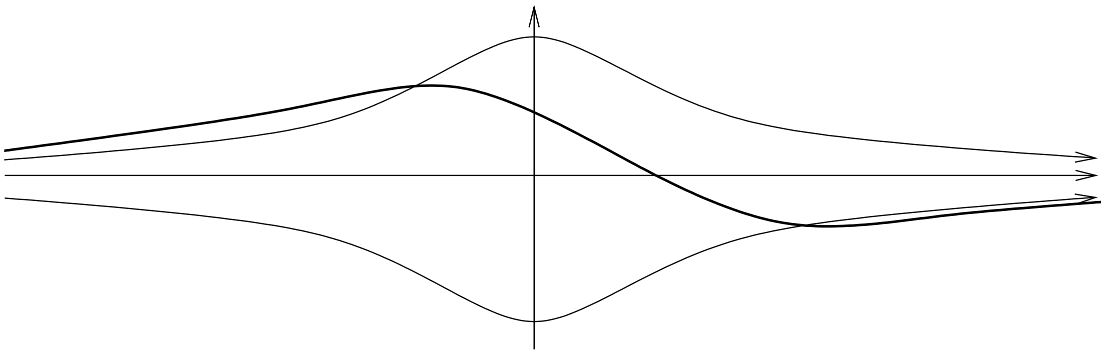
   ed essendo $\sum \frac{e^b}{k^k} < +\infty$ troviamo che la serie converge totalmente (e quindi uniformemente) sugli intervalli limitati a destra: $(-\infty, b]$.

   Dunque la funzione somma $f(x)$ risulta essere continua in ogni intervallo $(-\infty, b]$ (per il Teorema della continuità del limite) e dunque $f(x)$ è continua su tutto $\mathbb{R}$.

3. Disegnare approssimativamente il grafico della soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y^2 - \frac{1}{1+x^2} \\ y(3) = 0. \end{cases}$$

   Soluzione. La zona di piano $y^2 \leq \frac{1}{1+x^2}$ è quella riportata in figura. In tale zona la soluzione è decrescente, al di fuori di tale zona la soluzione è crescente. Il punto iniziale $(3, 0)$ si trova all'interno di tale zona, e dunque



in un intorno di tale punto la soluzione é decrescente. In particolare in un intorno destro di $x = 0$ la soluzione sarà negativa e descrescente. Visto che la funzione $g(x) = -1/\sqrt{1+x^2}$ sul cui grafico si ha $y' = 0$, è crescente (per $x > 0$) e tende a zero, la soluzione $y(x)$ deve necessariamente incontrare tale curva in un punto $x_1 > 3$. In tale punto si ha dunque $y'(x_1) = 0$. Per $x > x_1$ la soluzione $y(x)$ non puó intersecare nuovamente il grafico di $g(x)$ in quanto per $x > x_1$ si ha $g'(x) > 0$ mentre la nostra soluzione $y'(x)$ dovrebbe avere derivata nulla nel punto di intersezione.

Dunque la soluzione $y(x)$ per $x > x_1$ è sempre strettamente crescente e negativa. In particolare esiste finito il limite

$$\lim_{x\to+\infty} y(x) = \ell.$$

Dunque, utilizzando l'equazione differenziale, si ha

$$\lim_{x\to+\infty} y'(x) = \lim_{x\to+\infty} y(x)^2 - \frac{1}{1+x^2} = \ell^2.$$

Ma sappiamo che se y ha un asintoto orizzonatale, l'unico possibile limite per y' è zero. Dunque $\ell^2 = 0$ cioè $\ell = 0$. Questo significa che $y(x)$ ha come asintoto orizzontale l'asse delle x.

Con un ragionamento analogo si capisce che per $x < 3$ la soluzione $y(x)$ cresce (al decrescere di x) fino ad incontrare necessariamente il grafico della funzione $h(x) = 1/\sqrt{1+x^2}$ in un punto $x_2 < 0$. In tale punto $y(x)$ assume il valore massimo e poi decresce (al decrescere di x) tendendo a zero.

4. Calcolare l'integrale $\int_\gamma \omega$ della forma differenziale

$$\omega = (2x^2y + 2xy^3 + 1)e^{x^2y}dx + (x^3 + x^2y^2 + 2y)e^{x^2y}dy$$

sulla curva

$$\gamma(t) = ((1+t)\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)) \qquad t \in [0,1].$$

Soluzione. Posto $\omega = a(x,y)dx + b(x,y)dy$, si trova facilmente che

$$\frac{\partial a}{\partial y} = \frac{\partial b}{\partial x} = 3x^2 + 6xy^2 + 2x^4y + 2x^3y^3.$$

Dunque ω è una forma chiusa definita su tutto il piano e di conseguenza ω è una forma esatta.

Sappiamo dunque che l'integrale di ω su una curva γ dipende solo dagli estremi della curva. Scegliamo dunque una curva rettilinea η con gli stessi estremi di γ: $\eta(t) = (t, 0)$ con $t \in [1, 2]$. Si avrà dunque

$$\int_\gamma \omega = \int_\eta \omega = \int_1^2 [(0+1)e^0 + 0e^0 0]\, dt = \int_1^2 dt = 1.$$