

Analisi Matematica III modulo

Prova scritta n. 1

Corso di laurea in Matematica, a.a. 2005-2006

17 gennaio 2006

1. Si consideri la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2y - y^3}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- (a) Studiare la continuità e la differenziabilità di f nel punto $(0, 0)$.
- (b) Determinare, se esistono, i valori massimo e minimo assunti da f sul cerchio unitario $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

2. Si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k + (x - k)^2}.$$

- (a) Dire se c'è convergenza totale su tutto \mathbb{R} .
 - (b) Dire se c'è convergenza totale sugli intervalli limitati $[a, b]$.
 - (c) Dire se c'è convergenza uniforme su tutto \mathbb{R} .
3. Sia $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 e tale che

$$|x| = 1 \quad \Rightarrow \quad (\nabla f(x), x) > 0.$$

Dimostrare che il sistema

$$\nabla f(x) = 0$$

ammette almeno una soluzione.

Suggerimento: dimostrare che la funzione ristretta alla palla unitaria non ammette minimi sul bordo.

Nota (18.1.2006): nel testo del secondo esercizio c'era erroneamente scritto $\sum_{k=0}^{\infty}$ invece che $\sum_{k=1}^{\infty}$.