Argomenti svolti durante le esercitazioni

Analisi Matematica II modulo

a.a. 2004-2005

---[3.3.2005 (2 ore)]

Insiemi equipotenti, cardinalità. Costruzione dei numeri naturali, interi, razionali e reali. Insiemi infiniti, $\#2^X > \#X$.

Funzioni derivabili con derivata crescente. Studio della convessità di $f(x) = x^p$. Convessità delle funzioni elementari. Provare che $f(x) = x(x + |x|)$ è convessa. Trovare una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ decrescente e convessa. Dimostrare che le uniche funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convesse e limitate sono le funzioni costanti.

---[9.3.2005 (2 ore)]

Insiemi convessi. Definizione di funzione convessa. Una funzione è convessa se e solo se il suo epigrafico è convesso. Il rapporto incrementale di una funzione convessa è crescente. Le funzioni convesse e derivabili *stanno sopra* la retta tangente. Le funzioni derivabili e convesse hanno derivata crescente.

---[10.3.2005 (2 ore)]

Ancora sulle funzioni convesse. Le funzioni convesse al di fuori di un intervallo *stanno al di sopra* della retta secante. Le funzioni con derivata crescente sono convesse. Le funzioni convesse definite su un intervallo aperto, sono continue. Esempio di funzione convessa ma non continua. La disuguaglianza di Young. Funzioni concave e funzioni sub-additive. Le funzioni crescenti ammettono sempre derivate destra e sinistra.

---[17.3.2005 (2 ore)]

Derivabilità (unilaterale) delle funzioni convesse. Studio di funzione. Asintoti verticali e obliqui. Simmetrie. Studio della funzione $f(x) = x\exp(1/(1 - |x|))$.

____[21.3.2005 (1 ora)]

Terminato lo studio di funzione della lezione precedente.

____[30.3.2005 (2 ore)]

Studio di funzione:

$$f(x) = \sqrt{x}\left|1 + \frac{1}{\log x}\right|.$$

____[31.3.2005 (2 ore)]

Studio di funzione:

$$f(x) = x\left[e^x(x^2-1) + \frac{1}{2}\right].$$

____[4.4.2005 (1 ora)]

Studi di funzione:

$$f(x) = x^3 e^{\frac{1}{x}}, \qquad f(x) = 1 - \frac{1}{2}\left|\sqrt[3]{1-x^3}\right|.$$

____[7.4.2005 (2 ore)]

Studi di funzione:

$$f(x) = \sqrt{1+\sin x} + \sin x.$$

____[11.4.2005 (2 ore)]

Prova scritta preliminare n. 1.

____[13.4.2005 (2 ore)]

Uniforme continuità. Le funzioni uniformemente continue sono continue. Le funzioni continue su $[a,b]$ sono uniformemente continue (dimostrato a lezione). Se $|x_k - y_k| \to 0$ e $|f(x_k) - f(y_k)| \to \alpha > 0$ allora f non è uniformemente continua. Funzioni lipschitziane. Le funzioni lipschitziane sono uniformemente continue. Criterio di lipschitzianità per le funzioni derivabili su un intervallo. Uniforme continuità di funzioni ottenute “attaccando” due funzioni uniformemente continue (dimostrato il 18.4.2005). Esempi: $|x|$, $\sqrt(|x|)$, $\sin(x)$, x^2, $1/x$.

[18.4.2005 (1 ora)]

Studio della continuità uniforme delle seguenti funzioni:

$$f(x) = \sqrt{x}\log x, \qquad g(x) = \sin(x^2).$$

[21.4.2005 (2 ore)]

Trovare una primitiva delle seguenti funzioni:

$$\frac{1}{x\log x}, \quad \cos^2 x, \quad \cos^2 x \sin x, \quad \arctan x, \quad \arcsin x, \quad x\arctan x,$$

$$(x^4 + 1(\log^2 x - 1), \quad \cos^4 x \sin^3 x, \quad \frac{x^3+3}{x^2-3x+2}, \quad \frac{x-3}{x^2+x+1}, \quad \frac{x-1}{(x+2)^2}.$$

[28.4.2005 (2 ore)]

Calcolare i seguenti integrali

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{0} \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}\,dx, \qquad \int_{-1}^{1} \frac{\cos x(e^x - e^- x)}{\sqrt{1+x^2}}\,dx,$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^7(x)\,dx, \qquad \int_0^{2\pi} \sin^2(x)\,dx, \qquad \int_{-1}^{1} (x^2 + \sin x)\log(1+x^2)\,dx.$$

Studiare la funzione $\mathrm{erf}(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt$. Calcolare la derivata della funzione $f(x) = \int_{-x}^{x^2} e^{t^3}\,dt$.

[4.5.2005 (2 ore)]

Alcuni risultati sull'integrabilità di funzioni limitate ma non continue. La formula di Taylor, "¡o piccolo"¿ e "¡O grande"¿. Calcolo del limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}$$

mediante l'uso di "¡o piccolo"¿.

[11.5.2005 (1 ora)]

Calcolo dei seguenti limiti utilizzando gli "¡O grande"¿ e "¡o piccolo"¿.

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} + 2\cos x - 3}{x\sin^3 x}, \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x - x\cos x}{\sqrt{\tan^3 x^2}},$$

[12.5.2005 (2 ore)]

Calcolo dei seguenti limiti

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x^2}-\frac{1}{\sin x},\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\cos x-e^x+2+x^3/3}{2\log(1+x)+e^x\sin x-3\tan x},$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin(\arctan(1/x))-1}{x^2},\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x^2}-\cos x}{\cos(e^x-1-\sin x)-1}.$$

[16.5.2005 (2 ore)]

Dimostrare che il punto $x=0$ è un minimo relativo per la funzione

$$f(x)=x(6\sin x-6x+x^3)(2\cos x-2+x^2)+x^2(e^{x^4}-1-x^4).$$

Calcolare $f^{iv}(0)$ (la derivata quarta calcolata in 0) per

$$f(x)=(\sin x^2+e^x)\log(1+x).$$

Calcolare

$$\lim_{x\to 0}\frac{24e^{x^2}-24\cos x-36x\sin x-17x^4}{(\cos x-e^x)^2}.$$

Calcolare

$$\int\frac{1}{(1+x^2)^3}\,dx,\qquad \int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\,dx,\qquad \int\sqrt{1+x^2}\,dx.$$

Breve digressione sulle funzioni iperboliche. Integrali da $15''$:

$$\int\frac{e^x+\cos x}{e^x+\sin x}\,dx,\qquad \int\frac{2\,dx}{\sqrt{x}-\sqrt{x+2}},\qquad \int\frac{\log\log x}{x}\,dx.$$

[25.5.2005 (2 ore)]

Criteri del confronto, degli infinitesimi, del rapporto, della radice e integrale. Determinare il carattere delle seguenti serie.

$$\sum_k e^{\frac{1}{k}},\qquad \sum_k e^{-3x},\qquad \sum_k \sin\frac{1}{k},\qquad \sum_k\sqrt{\frac{1}{k}-\sin\frac{1}{k}}$$

$$\sum_k\frac{k!}{k^k},\qquad \sum_k\left(\frac{k-1}{k}\right)^{(k^2)},\qquad \sum_k\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}},\qquad \sum_k\frac{1}{k\log k}.$$

Dimostrazione del criterio della radice, del criterio del confronto asintotico e del criterio integrale. Determinare il carattere delle seguenti serie

$$\sum_k \frac{1}{k+\sqrt{k}}, \qquad \sum_k \frac{1}{\sqrt{k^3-k}}, \qquad \sum_k \frac{2^k\sqrt{k}}{k^k \log k},$$

$$\sum_k \frac{1}{\log(k!)}.$$

Determinare il carattere del prodotto infinito

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg}(k^2).$$