Analisi Matematica I e II modulo
Prova scritta n. 1

Corso di laurea in Matematica, a.a. 2004-2005

10 giugno 2005

1. Determinare gli intervalli di monotonia della funzione
$$f(x) = \sin x - \cos x.$$

2. Si consideri la funzione $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da
$$g(y) = y - \operatorname{arctg}(y-1) - 1.$$
   (a) Si dimostri che g è bigettiva e si chiami $f = g^{-1}$ la funzione inversa di g.
   (b) Dire in quali punti la funzione f risulta essere derivabile.
   (c) Dimostrare che f è strettamente crescente.
   (d) Sia $y = m(\bar{x})\,x + q(\bar{x})$ l'equazione della retta tangente al grafico $y = f(x)$ nel punto $(\bar{x}, f(\bar{x}))$. Calcolare i seguenti limiti
$$\lim_{\bar{x}\to+\infty} m(\bar{x}), \qquad \lim_{\bar{x}\to+\infty} q(\bar{x}).$$

3. Si consideri la funzione $f\colon [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ definita da
$$f(x) = \int_{\sqrt{x}}^{x} e^{-t^4}\,dt.$$
   Dire se f
   (a) è continua;
   (b) è uniformemente continua;
   (c) è lipschitziana;
   (d) è derivabile.

4. Determinare il carattere della seguente serie numerica
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{k^2}\right)^{k^3} - e^k}{2^k}.$$