Analisi Matematica III e IV modulo
Soluzioni prova scritta n. 3/III e n. 6/IV

Corso di laurea in Matematica, a.a. 2003-2004

20 settembre 2004

1. Determinare i punti critici della funzione

$$f(x,y) = 2x^4 + y^6 - 6xy^3$$

specificando se sono massimi o minimi relativi.

Soluzione. Si ha

$$f_x = 8x^3 - 6y^3, \qquad f_y = 6y^5 - 18xy^2$$

da cui si trova che i punti critici soddisfano le relazioni

$$\begin{cases} y^3 = \frac{4}{3}x^3, \text{ ovvero } y = \sqrt[3]{\frac{4}{3}} \\ \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{5}{3}} - 3\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{2}{3}} x^3 = 0. \end{cases}$$

Risolvendo il sistema si ottengono come soluzioni i tre punti critici

$$(0,0), \qquad (\pm\frac{3}{2}, \pm\sqrt[3]{\frac{9}{2}}).$$

La matrice delle derivate seconde è

$$\begin{pmatrix} 24x^2 & -18y^2 \\ -18y^2 & 30y^4 - 36xy \end{pmatrix}.$$

Nel punto $(0,0)$ la matrice è nulla. Negli altri due punti critici il determinante Hessiano risulta essere pari a $2^{\frac{5}{3}}3^{\frac{20}{3}} > 0$ ed essendo anche $f_xx > 0$ si conclude che questi due punti critici sono dei minimi relativi.

Veniamo ora al punto $(0,0)$. Notiamo che si ha

$$f(x,0) = 2x^4$$

e quindi il punto $(0,0)$ è un minimo relativo lungo l'asse delle x. D'altra parte si ha anche

$$f(x,x) = x^4(x^2 - 4)$$

che è una funzione con un punto di massimo per $x = 0$. Dunque lungo la retta $y = x$ il punto $(0,0)$ è un punto di massimo relativo. In conclusione il punto $(0,0)$ non è né massimo né minimo relativo.

2. Trovare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale

$$y'' + y = \sin x.$$

Soluzione. L'equazione algebrica associata $\lambda^2 + 1 = 0$ ha due soluzioni complesse coniugate $\lambda_{12} = \pm i$. Dunque le soluzioni dell'equazione omogenea sono

$$y_o = \alpha \sin x + \beta \cos x.$$

Siccome il termine noto $\sin x$ è pure soluzione dell'omogenea, cerco una soluzione particolare dell'equazione non omogenea che abbia la forma:

$$\bar{y} = ax \sin x + bx \cos x.$$

Si ha

$$\bar{y}' = a \sin x + ax \cos x + b \cos x - bx \sin x$$
$$\bar{y}'' = 2a \cos x - ax \sin x - 2b \sin x - bx \cos x$$

da cui imponendo che $\bar{y}$ soddisfi l'equazione data si ottiene

$$2a \cos x - 2b \sin x = \sin x$$

e quindi $a = 0$, $b = -1/2$. Una soluzione particolare è dunque $\bar{y} = -x \cos x/2$ e la soluzione generale dell'equazione è

$$y = \alpha \sin x + (\beta - x/2) \cos x.$$

3. Si consideri la forma differenziale

$$\omega = \frac{x\, dy - y\, dx}{(x+y)^2 + y^2}.$$

   (a) Dire se la forma è chiusa;
   (b) calcolare l'integrale curvilineo $\int_\gamma \omega$ sulla circonferenza unitaria $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$;
   (c) dire se la forma è esatta.

Soluzione. Posto $\omega = a\, dx + b\, dy$ si può verificare facilmente che vale

$$a_y = b_x = \frac{2y^2 - x^2}{[(x+y)^2 + y^2]^2}$$

e dunque la forma differenziale è chiusa.

Invece che calcolare l'integrale curvilineo sulla curva circonferenza γ otterremo dunque lo stesso risultato calcolandola sulla ellisse η di equazioni

$$x = \cos t - \sin t, \qquad y = \sin t, \qquad t \in [0, 2\pi].$$

Si ha dunque

$$\int_\gamma \omega = \int_\eta \omega = \int_0^{2\pi} \frac{(\cos t - \sin t)\cos t - \sin t(-\sin t - \cos t)}{\cos^2 t + \sin^2 t}\, dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.$$

Visto che sulla curva chiusa η l'integrale di ω non è nullo, la forma differenziale non è esatta.

4. Calcolare l'area della regione D formata dai punti (x, y) del piano che soddisfano le seguenti condizioni

$$\begin{cases} \tan \frac{\pi\sqrt{x^2+y^2}}{2} \geq \left|\frac{y}{x}\right| \\ x^2 + y^2 \leq 1 \end{cases}$$

Soluzione. Notiamo innanzitutto che il dominio D è simmetrico rispetto ad entrambi gli assi coordinati. Infatti cambiando il segno di x o di y le condizioni che definiscono D non cambiano. Ci restringiamo dunque a calcolare l'area della parte D_1 del dominio D contenuta nel primo quadrante $x \geq 0$, $y \geq 0$.

Il dominio D_1 in coordinate polari (ρ, θ) diventa il triangolo D_1' definito da

$$\begin{cases} \theta \in [0, \pi/2] \\ \rho \in [0, 1] \\ \frac{\pi\rho}{2} \geq \theta. \end{cases}$$

In conclusione l'area cercata si può calcolare come segue

$$\iint_D dx\, dy = 4 \iint_{D_1} dx\, dy = 4 \iint_{D_1'} \rho\, d\rho\, d\theta = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{2\theta}{\pi}}^1 \rho\, d\rho\, d\theta = ... = \frac{2}{3}\pi.$$