Analisi Matematica III modulo
Prova scritta n. 3

Corso di laurea in Matematica, a.a. 2003-2004

16 aprile 2004

1. Dire se la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2-y^3}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

   è continua e se è differenziabile in nel punto $(0,0)$.

2. Dimostrare che la funzione

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\arctan(x + k^2) - \frac{\pi}{2} \right]$$

   è definita, è derivabile e la derivata è continua su tutta la retta reale $\mathbb{R}$ (suggerimento: studiare la convergenza totale della serie delle derivate).

3. Sia $f \colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ una funzione di classe $\mathcal{C}^2$ su Ω e continua su $\overline{\Omega}$ dove $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ è un insieme aperto e limitato. Dimostrare che se f verifica le seguenti condizioni:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x,y) = 0 \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,y) \neq 0 \end{cases} \qquad \forall (x,y) \in \Omega$$

   allora il massimo di f su $\overline{\Omega}$ è uguale al massimo di f su $\partial\Omega$.

modifiche

16 aprile 2004 nel testo del secondo esercizio c'era erroneamente scritto $x + k$ invece che $x + k^2$.