Esercitazioni di Analisi III modulo
Strumenti per lo studio qualitativo delle soluzioni di equazioni differenziali

Corso di laurea in Matematica, a.a. 2003-2004

10 marzo 2004

Proposizione 1 *Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo su cui sono definite due funzioni derivabili $f(x)$ e $g(x)$. Siano $x_0 < x_1$ due punti di I. Se $f(x_1) < g(x_1)$ e $f(x_2) > g(x_2)$ allora esiste un punto $\bar{x} \in (x_1, x_2)$ tale che $f(\bar{x}) = g(\bar{x})$ e $f'(\bar{x}) \geq g'(\bar{x})$.*

Proposizione 2 *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ e $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione che verifica il Teorema di Esistenza e Unicità Locale su Ω (ad esempio è sufficiente supporre $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$). Sia $(x_0, y_0) \in \Omega$ e sia $y(x)$ l'unica soluzione massimale del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

definita sull'intervallo massimale $I \subset \mathbb{R}$.

Dato un qualunque compatto $K \subset \Omega$ esistono due punti $x_1, x_2 \in I$ tali che $x_1 < x_0$, $x_2 > x_0$ e tali che $(x_1, y(x_1)) \notin K$ e $(x_2, y(x_2)) \notin K$.

In parole povere: la soluzione massimale $y(x)$ esce da qualunque compatto $K \subset \Omega$ sia a destra che a sinistra di x_0.

Proposizione 3 *Consideriamo due funzioni $y(x)$ e $z(x)$ soluzioni dei rispettivi problemi di Cauchy*

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} z'(x) = g(x, z(x)) \\ z(x_0) = y_0 \end{cases}$$

su un intervallo I che contiene il punto x_0. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un sottoinsieme degli insiemi di definizione di f e g tale che i grafici delle soluzioni $y(x)$ e $z(x)$ siano contenuti in Ω al variare di $x \in I$. Supponiamo che per ogni $(x, y) \in \Omega$ si abbia $f(x, y) < g(x, y)$. Allora per ogni $x \in I$, $x > x_0$ si ha $y(x) < z(x)$ mentre per ogni $x \in I$, $x < x_0$ si ha $y(x) > z(x)$.

Proposizione 4 *Sia $f\colon (x_0, +\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione di classe $\mathcal{C}^1$ tale che il limite*

$$\lim_{x \to +\infty} f'(x) = \ell$$

esiste, finito o infinito. Se $\ell \neq 0$ allora f non può avere un asintoto orizzontale per $x \to +\infty$.

Modifiche

17.3.2004 Ho modificato l'enunciato della Proposizione 3.

31.3.2006 Ho aggiunto la Proposizione 4.