Esercitazioni di Analisi III modulo
Equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti: esercizi svolti

Corso di laurea in Matematica, a.a. 2003-2004

10 dicembre 2003

1 Equazioni omogenee

Trovare tutte le soluzioni reali delle seguenti equazioni differenziali.

$$y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = 0. \tag{1}$$

Il polinomio associato all'equazione differenziale (1) è

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2).$$

Questo polinomio ha due radici reali distinte $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 2$. Dunque due soluzioni indipendenti di questa equazione sono $y_1(x) = e^{\lambda_1 x} = e^x$ e $y_2(x) = e^{\lambda_2 x} = e^{2x}$. Ogni soluzione di questa equazione è dunque una combinazione lineare di queste due soluzione, cioè

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$$

dove c_1 e c_2 sono costanti reali qualunque.

$$y'' - 2y' + 2y = 0. \tag{2}$$

Il polinomio associato è

$$\lambda^2 - 2\lambda + 2.$$

Questo polinomio non ha radici reali ma le due soluzioni complesse sono date da

$$\lambda_{12} = \alpha \pm \beta i.$$

con $\alpha = 1$ e $\beta = 1$. In questo caso due soluzioni reali indipendenti dell'equazione differenziale sono

$$y_1(x) = e^{\alpha x}\sin(\beta x) = e^x \sin x, \qquad y_2(x) = e^{\alpha x}\cos(\beta x) = e^x \cos x.$$

Tutte le soluzioni reali sono quindi del tipo

$$y(x) = c_1 e^x \sin x + c_2 e^x \cos x$$

con c_1 e c_2 costanti reali qualunque.

$$4y'' - 4y' + 1 = 0. \tag{3}$$

Il polinomio associato è $4\lambda^2 - 4\lambda + 1$ che ha una unica radice doppia $\lambda = 1/2$. In questo caso due soluzioni indipendenti sono $y_1(x) = e^{\lambda x} = e^{x/2}$ e $y_2(x) = xe^{\lambda x} = xe^{x/2}$. L'insieme di tutte le soluzioni è dato quindi da

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = (c_1 + c_2 x)e^{x/2}.$$

In generale quando una radice λ ha ordine m, l'insieme delle soluzioni contiene le funzioni

$$y(x) = p(x)e^{\lambda x}$$

dove p è un polinomio di grado minore di m.

$$y''' - y'' = 0. \tag{4}$$

In questo caso il polinomio associato è $\lambda^3 - \lambda^2 = \lambda^2(\lambda - 1)$ che ha la radice $\lambda_1 = 0$ di molteplicità 2 e la radice $\lambda_2 = 1$ con molteplicità 1. Tre soluzioni indipendenti sono dunque

$$y_1(x) = e^{\lambda_1 x} = 1, \qquad y_2(x) = xe^{\lambda_1 x} = x, \qquad y_3 = e^{\lambda_2 x} = e^x.$$

L'insieme di tutte le soluzioni è dato da

$$y(x) = c_1 + c_2 x + c_3 e^x.$$

2 Equazioni non omogenee

Trovare tutte le soluzioni delle seguenti equazioni differenziali.

$$y'' - 3y' + 2y = x^2 e^{3x}. \tag{5}$$

Ogni soluzione $y(x)$ della equazione non omogenea può essere scritta nella forma $y(x) = \bar{y}(x) + y_0(x)$ dove $\bar{y}(x)$ è una soluzione fissata dell'equazione non omogenea e $y_0(x)$ è la soluzione generica dell'equazione omogenea.

Per quanto visto prima sappiamo che ogni soluzione y_0 dell'equazione omogenea associata (1) si può scrivere come

$$y_0(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x}.$$

Non ci resta che trovare una soluzione particolare dell'equazione non omogenea. Un risultato generale ci dice che se il termine noto è del tipo $q(x)e^{\mu x}$ dove $q(x)$ è un polinomio e μ **non è** una radice del polinomio associato all'equazione omogenea, allora si può trovare una soluzione particolare della forma

$$\bar{y}(x) = p(x)e^{\mu x}$$

dove $p(x)$ è un polinomio (da determinare) dello stesso grado di q. Nel nostro caso visto che $\mu = 3$ mentre le radici del polinomio $\lambda^2 - 3\lambda + 2$ sono $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 2$ possiamo dunque cercare una soluzione particolare della forma

$$\bar{y}(x) = (ax^2 + bx + c)e^{3x}.$$

Si avrà dunque

$$\bar{y}'(x) = \left[2ax + b + 3ax^2 + 3bx + 3c\right]e^{3x} = \left[3ax^2 + (2a + 3b)x + b + 3c\right]e^{3x}$$

e

$$\begin{aligned}\bar{y}''(x) &= (6ax + 2a + 3b + 9ax^2 + (6a + 9b)x + 3b + 9c)e^{3x} \\ &= (9ax^2 + (12a + 9b)x + 2a + 6b + 9c)e^{3x}.\end{aligned}$$

Dunque

$$\begin{aligned}\bar{y}'' - 3\bar{y}' + 2\bar{y} &= [(9a - 9a + 2a)x^2 + (12a + 9b - 6a - 9b + 2b)x \\ &\quad +2a + 6b + 9c - 3b - 9c + 2c]\, e^{3x} \\ &= [2ax^2 + (6a + 2b)x + 2a + 3b + 2c]\, e^{3x}.\end{aligned}$$

Imponendo $\bar{y}'' - 3\bar{y}' + 2\bar{y} = x^2 e^{3x}$ si ottengono dunque le seguenti condizioni:

$$\begin{cases} 2a = 1 \\ 6a + 2b = 0 \\ 2a + 3b + 2c = 0 \end{cases}$$

che risolte danno $a = \frac{1}{2}$, $b = -\frac{3}{2}$ e $c = \frac{7}{4}$. La nostra soluzione particolare è quindi

$$\bar{y}(x) = \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{7}{4}\right) e^{3x}.$$

In conclusione l'insieme di tutte le soluzioni dell'equazione non omogenea è dato da

$$y(x) = \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{7}{4}\right) e^{3x} + c_1 e^x + c_2 e^{2x}$$

al variare dei parametri c_1 e c_2.

$$y'' - y = xe^x. \tag{6}$$

Le radici del polinomio associato sono $\lambda_{12} = \pm 1$, e quindi le soluzione dell'equazione omogenea sono

$$y_0(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x}.$$

Il termine noto xe^x è della forma $p(x)e^{\mu x}$ dove $\mu = 1$ è una radice, con molteplicità 1 del polinomio associato all'equazione differenziale. Dunque possiamo cercare una soluzione particolare della forma

$$\bar{y}(x) = (ax + b)x\, e^x = (ax^2 + bx)\, e^x.$$

Si ha

$$\begin{aligned}\bar{y}'(x) &= [ax^2 + (b + 2a)x + b]\, e^x \\ \bar{y}''(x) &= [ax^2 + (b + 4a)x + 2b + 2a]\, e^x\end{aligned}$$

da cui

$$\bar{y}'' - \bar{y} = (4ax + 2b + 2a)\, e^x$$

e imponendo $\bar{y}'' - \bar{y} = xe^x$ si ottiene $a = \frac{1}{4}$, $b = -\frac{1}{4}$ da cui

$$\bar{y} = \frac{1}{4}(x^2 - x)\, e^x.$$

La soluzione generica dell'equazione non omogenea è dunque

$$y(x) = \left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x + c_1\right) e^x + c_2 e^{-x}.$$

$$y'' - 2y' + 2y = e^x \sin x. \tag{7}$$

L'equazione omogenea associata (2) ha le soluzioni

$$y_0(x) = c_1 e^x \sin x + c_2 e^x \cos x$$

che corrispondono alle radici complesse $\lambda_1 = 1 + i$ e $\lambda_2 = 1 - i$ del polinomio associato.

Notiamo che

$$e^x \sin x = e^x \frac{e^{ix} - e{-}ix}{2i} = \frac{1}{2i} e^{(1+i)x} - \frac{1}{2i} e^{(1-i)x}.$$

In generale quando il termine noto è del tipo

$$q(x)e^{\mu x}$$

dove $q(x)$ è un polinomio e μ è una radice del polinomio associato all'equazione omogenea, allora è possibile trovare una soluzione particolare dell'equazione non omogenea, della forma

$$\bar{y}(x) = p(x)\, x^m\, e^{\mu x}$$

dove $p(x)$ è un polinomio (da determinare) dello stesso grado di $q(x)$ e m è la molteplicità di μ come radice del polinomio associato all'equazione differenziale.

Nel nostro caso il termine noto si scrive come

$$e^x \sin x = e^x \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \frac{1}{2i} e^{(1+i)x} - \frac{1}{2i} e^{(1-i)x}.$$

Ricordando che sia $1 + i$ che $1 - i$ sono radici del polinomio associato all'equazione, dobbiamo cercare una soluzione particolare della forma

$$\bar{y}(x) = Axe^{(1+i)x} + Bxe^{(1-i)x}$$

dove A e B sono coefficienti complessi da determinare. Visto che siamo interessati a trovare solo le soluzioni reali dell'equazione, possiamo equivalentemente scrivere

$$\bar{y}(x) = axe^x \sin x + bxe^x \cos x$$

dove a e b sono coefficienti reali.

Dunque si ha

$$\begin{aligned}
\bar{y}'(x) &= ae^x \sin x + axe^x \sin x + axe^x \cos x + be^x \cos x + bxe^x \cos x - bxe^x \sin x \\
&= [(a-b)x + a]e^x \sin x + [(a+b)x + b]e^x \cos x \\
\bar{y}''(x) &= \ldots = (-2bx - 2b + 2a)e^x \sin x + (2ax + 2b + 2a)e^x \cos x
\end{aligned}$$

da cui

$$\bar{y}'' - 2\bar{y}' + 2\bar{y} = \ldots = 2ae^x \cos x - 2be^x \sin x$$

da cui, imponendo $\bar{y}'' - 2\bar{y}' + 2\bar{y} = e^x \sin x$, si ottiene $a = 0$ e $b = -\frac{1}{2}$ e quindi

$$\bar{y}(x) = -\frac{1}{2} x\, e^x\, \cos x$$

e in conclusione ogni soluzione (reale) si scrive come

$$y(x) = c_1\, e^x\, \sin x + (c_2 - \frac{1}{2}x)x\, e^x\, \cos x$$

al variare delle due costanti (reali) c_1 e c_2.