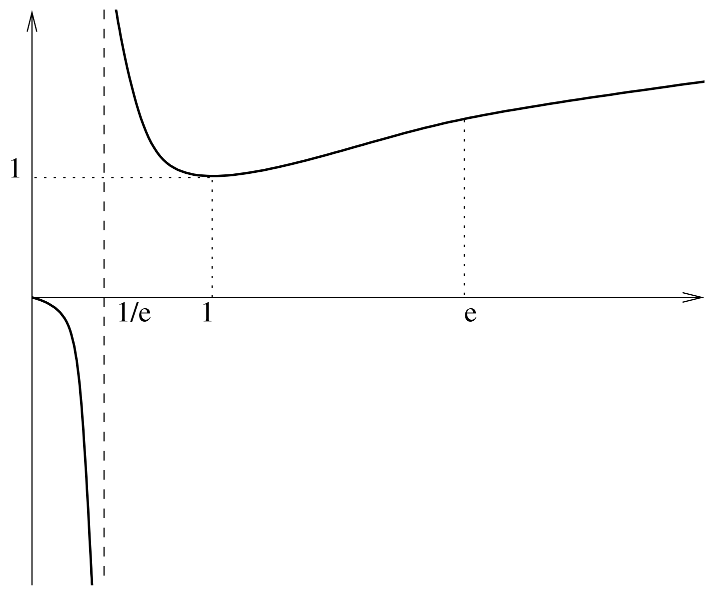
Analisi Matematica I e II modulo
Soluzioni prova scritta n. 4

Corso di laurea in Matematica, a.a. 2002-2003

9 febbraio 2004

1. Dopo aver disegnato il grafico della funzione
$$f(x) = \frac{x}{1+\log x}$$
determinare per quali valori del parametro m la retta $y = mx$ interseca il grafico della funzione $y = f(x)$.

   Soluzione. La funzione è definita per $x > 0$ e $x \neq 1/e$. Si ha
$$f'(x) = \frac{\log x}{(1+\log x)^2}, \quad f''(x) = \frac{1-\log x}{x(1+\log x)^3}.$$
Dunque la funzione è decrescente per $x \leq 1$, ed è convessa per $1/e \leq x \leq e$. In $x = 1$ c'è un punto di minimo relativo $f(1) = 1$. Per $x \to 0^+$ si ha $f(x) \to 0$ e $f'(x) \to 0$; per $x \to 1/e$ si ha $f(x) \to \pm\infty$; per $x \to +\infty$ si ha $f(x) \to +\infty$. Si può quindi concludere che il grafico della funzione ha l'andamento riportato in figura.



   Per trovare le rette che intersecano il grafico della funzione è sufficiente risolvere il sistema:
$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = mx \end{cases}$$
trovando che ogni valore di m è ammissibile, tranne il valore $m = 0$.

2. Calcolare, se esiste, il seguente limite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2n\sqrt{n^2+n}-2n^2-n}{n^2} \cdot \frac{(n+1)^{n+1}}{(n-1)^{n-1}}$$

Soluzione. Notiamo che si ha

$$\frac{1}{n^2}\frac{(n+1)^{(n+1)}}{(n-1)^{(n-1)}} = \frac{(n+1)^2}{n^2}\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{n-1} = \frac{n^2+2n+1}{n^2}\left(1+\frac{2}{n-1}\right)^{n-1} \to e^2.$$

D'altra parte si ha

$$\begin{aligned} 2n\sqrt{n^2+n}-2n^2-n &= \frac{4n^2(n^2+n)-(2n^2+n)^2}{2n\sqrt{n^2+n}+2n^2+n} \\ &= \frac{-n^2}{2n^2(\sqrt{1+1/n}+1)+n} \to -\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

In definitiva il limite richiesto vale $-e^2/4$.

3. Calcolare il seguente integrale definito

$$\int_{-e}^{-1} -\log^2|x|\,dx.$$

Soluzione. Posto $x=-e^t$, $dx=-e^t dt$ si trova

$$\begin{aligned} -\int_{-e}^{-1}\log^2|x|\,dx &= -\int_{-e}^{-1}\log^2(-x)\,dx = -\int_1^0 t^2(-e^t)dt \\ &= -\int_0^1 t^2e^t\,dt = -[(t^2-2t+2)e^t]_0^1 = -(e-2) = 2-e. \end{aligned}$$

4. Dire per quali valori del parametro $\alpha>0$ la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-\log n}{n^\alpha}$$

converge.

Soluzione. Utilizziamo il criterio degli infinitesimi per confrontare la serie data con la serie di termine generico $\frac{1}{n^{\alpha-1}}$. Si ha

$$n^{\alpha-1}a_n = n^{\alpha-1}\frac{n-\log n}{n^\alpha} = 1-\frac{\log n}{n} \to 1 \quad \text{per } n\to\infty.$$

Dunque la serie data ha lo stesso carattere della serie $\sum 1/n^{\alpha-1}$ e quindi converge per $\alpha>2$ e diverge altrimenti.