# Analisi Matematica I e II modulo
# Soluzioni prova scritta n. 2/I-II, n. 4/I

Corso di laurea in Matematica, a.a. 2002-2003

8 luglio 2003

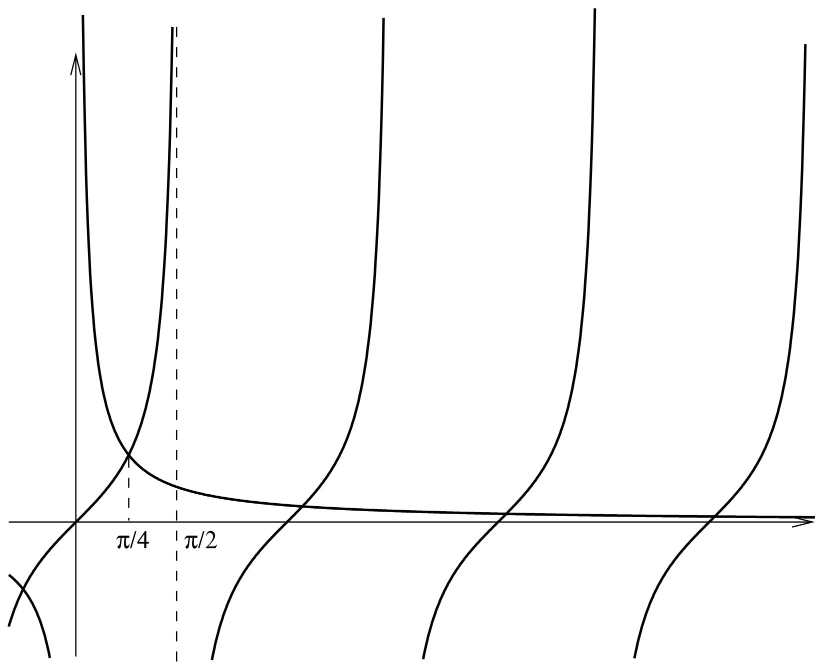
1. Determinare (se esistono) i valori massimo e minimo assoluti assunti dalla funzione
$$f(x) = e^{-\frac{2x^2}{\pi}} \sin x.$$

   *Soluzione.* Notiamo che la funzione tende a 0 per $x \to \pm\infty$, quindi avrà dei punti di massimo e minimo assoluti su $\mathbb{R}$ e in tali punti necessariamente la derivata prima dovrà annullarsi. Calcoliamo quindi
$$f'(x) = (\cos x - \frac{4x}{\pi} \sin x) e^{-\frac{2x^2}{\pi}}$$
   e l'equazione $f'(x) = 0$ diventa
$$\cos x = \frac{4x}{\pi} \sin x$$
   ovvero
$$\tan x = \frac{\pi}{4x}.$$
   Ricordando l'andamento dei grafici della funzione tangente e dell'iperbole a secondo membro ci si rende conto che quest'ultima equazione ha infinite soluzioni che corrispondono quindi ad infiniti punti critici per la funzione $f(x)$ (si veda la figura). La prima soluzione positiva di questa equazione sarà compresa tra 0 e $\pi/2$ e fortunatamente, per verifica diretta, si trova che tale soluzione è $\bar{x} = \pi/4$. Il successivo punto critico sarà compreso tra $\pi$ e $3\pi/2$.

   La derivata prima in 0 della funzione è pari a $f'(0) = 1$ e quindi la derivata prima è positiva per $x \in [0, \bar{x}[$. Dunque in $\bar{x}$ c'è un punto di massimo relativo di $f$ e si ha
$$f(\bar{x}) = e^{-\frac{\pi}{8}} \frac{\sqrt{2}}{2}$$

   Vogliamo dimostrare che questo è un massimo assoluto. I successivi punti critici di $f$ si hanno per $x > \pi$. Dunque essendo $|f(x)| \leq e^{-\frac{2x^2}{\pi}}$ nei successivi punti critici si avrà $x > \pi \Rightarrow |f(x)| < e^{-2\pi}$ mentre si vede facilmente che $|f(\bar{x})| = e^{-\frac{\pi}{8}} \frac{\sqrt{2}}{2} > e^{-2\pi}$.

   Abbiamo quindi mostrato che per $x > 0$ la funzione $f(x)$ ha massimo assoluto in $\bar{x}$ e che questo valore è massimo anche per la funzione $|f(x)|$. Essendo $f(x)$ una funzione dispari possiamo quindi concludere che $\bar{x}$ è il massimo assoluto di $f$ e $-\bar{x}$ è il minimo assoluto. I rispettivi valori massimo e minimo sono dunque $\pm e^{-\frac{\pi}{8}} \frac{\sqrt{2}}{2}$.




2. Calcolare
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+n}{n^2-2}\right)^{\left(n^3-n^4\tan\frac{1}{n}\right)}.$$

*Soluzione.* Siamo di fronte alla forma indeterminata $1^\infty$, vogliamo ricondurci al limite notevole $(1+1/a_n)^{a_n}\to e$ per $a_n\to+\infty$.

Dunque riscriviamo la successione nel seguente modo:
$$\left(\frac{n^2+n}{n^2-2}\right)^{\left(n^3-n^4\tan\frac{1}{n}\right)}=\left[\left(1+\frac{n+2}{n^2-2}\right)^{\frac{n^2-2}{n+2}}\right]^{\frac{n+2}{n^2-2}\left(n^3-n^4\tan\frac{1}{n}\right)}.$$

Notiamo che $\frac{n^2-2}{n+2}\to+\infty$ dunque l'espressione tra parentesi quadre tende ad $e$. Per quanto riguarda l'esponente si ha
$$\frac{n+2}{n^2-2}(n^3-n^4\tan\frac{1}{n})=\frac{n(n+2)}{n^2-2}\cdot\frac{\frac{1}{n}-\tan\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^3}}.$$

Il primo fattore di questo prodotto tende chiaramente a 1. Per quanto riguarda il secondo fattore passiamo dal limite di successione ad un limite di funzione ponendo $x=1/n$. Possiamo quindi applicare il teorema de l'Hopitâl per ottenere
$$\lim_{x\to0}\frac{x-\tan x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{-\tan^2 x}{3x^2}=-\frac{1}{3}\lim_{x\to0}\left(\frac{\tan x}{x}\right)^2=-\frac{1}{3}.$$

In definitiva otteniamo quindi che il limite cercato è $e^{-\frac{1}{3}}$.

3. Calcolare
$$\int_0^\pi \sin^2 x\,\cos^2 x\,dx.$$

*Soluzione.* Si ha

$$\int_0^\pi \sin^2 x \cos^2 x \, dx = \int_0^\pi \left(\frac{\sin(2x)}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{8}\int_0^{2\pi} \sin^2 y \, dy.$$

Notiamo che $\int_0^{2\pi} \sin^2 y \, dy = \int_0^{2\pi} \cos^2 y \, dy$ in quanto le funzioni sin e cos sono l'una la traslata dell'altra e in quanto l'integrale viene fatto su un periodo. Inoltre la somma di questi integrali è $2\pi$ in quanto $\sin^2 y + \cos^2 y = 1$. Dunque $\int_0^{2\pi} \sin^2 y \, dy = \pi$ e l'integrale cercato vale $\frac{\pi}{8}$.

Come alternativa si poteva calcolare l'integrale di $\sin^2 y$ sfruttando l'identità $\sin^2 y = \frac{1-\cos(2y)}{2}$.

4. (a) Determinare per quali valori del parametro reale $x$ risulta convergente la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n} e^{nx}}.$$

   (b) *Facoltativo:* studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(n!)}{n^3}.$$

*Soluzione.*

(a) Vogliamo utilizzare il criterio della radice. Si ha

$$\sqrt[n]{\frac{1}{\sqrt{n} e^{nx}}} = e^{-x} \frac{1}{\sqrt{\sqrt[n]{n}}}.$$

Il secondo fattore del prodotto tende ad 1, mentre il primo fattore tende a 0 se $x > 0$, tende a 1 se $x = 0$ e tende ad infinito se $x > 0$. Dunque possiamo concludere che per $x > 0$ la serie converge e per $x < 0$ la serie diverge. Se $x = 0$ la serie si riduce a $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ che sappiamo divergere.

(b) Essendo $n! \leq n^n$ si ha

$$\frac{\log n!}{n^3} \leq \frac{\log n^n}{n^3} = \frac{\log n}{n^2}.$$

Utilizzando il criterio degli infinitesimi si vede che questa serie ha lo stesso carattere della serie $\sum \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ e quindi converge.