Integrali di funzioni discontinue

28 marzo 2003

Ricordiamo i seguenti risultati:

Teorema 1 *Sia* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *una funzione limitata e integrabile. Posto*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

allora risulta $F'(x) = f(x)$ *per ogni punto* x *in cui* f *è continua.*

Teorema 2 *Sia* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *una funzione limitata. Se per ogni* $\varepsilon > 0$ *la funzione* f *ristretta all'intervallo* $[a+\varepsilon, b-\varepsilon]$ *è integrabile, allora la funzione* f *è integrabile su tutto* $[a,b]$.

Teorema 3 *Sia* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *una funzione limitata con un numero finito di punti di discontinuità. Allora* f *è integrabile.*

Esercizi.

1. Data $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$
mostrare che la funzione integrale
$$F(x) = \int_0^x f(t)\, dt$$
è ben definita per ogni $x \in \mathbb{R}$. Calcolare $F(x)$.

2. Data $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$$f(x) = \lfloor x \rfloor$$
determinare la funzione integrale
$$F(x) = \int_0^x f(t)\, dt.$$

3. Data $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$$f(x) = x - \lfloor x \rfloor$$
determinare la funzione integrale
$$F(x) = \int_0^x f(t)\, dt.$$

4. Data $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 1/x \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$
dimostrare che f è integrabile.

5. Data $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$
$$f(x) = \begin{cases} \sin(1/x) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$
verificare che f è integrabile.

6. Data $F\colon [0,1] \to \mathbb{R}$
$$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$
verificare che F è derivabile ma che F' non è continua. Mostrare altresì che F' è integrabile e che vale
$$\int_0^1 F'(x)\, dx = F(1) - F(0).$$