Analisi Matematica I modulo
Soluzioni della prova scritta preliminare n. 2

Corso di laurea in Matematica, a.a. 2002-2003

16 dicembre 2002

1. Determinare gli intervalli di monotonia e di convessità della seguente funzione:
$$f(x) = e^{1-x^2}.$$

   Soluzione. Si ha
$$f'(x) = -2xe^{1-x^2}, \qquad f''(x) = (4x^2 - 2x)e^{1-x^2}.$$

   Studiando il segno delle derivate prima e seconda si trova
$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 0, \quad f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$$
$$f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ o } x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

   Dunque f è monotòna crescente sull'intervallo $]-\infty, 0]$ è monotòna decrescente sull'intervallo $[0, +\infty[$ ed è convessa sugli intervalli $]-\infty, -2/\sqrt{2}]$ e $[2/\sqrt{2}, +\infty[$.

2. Determinare gli intervalli di monotonia e di convessità della seguente funzione:
$$f(x) = \log(1 + x^2).$$

   Soluzione. Si ha
$$f'(x) = \frac{2x}{1+x^2}, \qquad f''(x) = 2\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}.$$

   Studiando il segno delle derivate prima e seconda si trova
$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0, \quad f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 0$$
$$f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$$

   Dunque f è monotòna decrescente sull'intervallo $]-\infty, 0]$ è monotòna crescente sull'intervallo $[0, +\infty[$ ed è convessa sull'intervallo $[-1, 1]$.

3. Sia $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definita da

$$f(x) = (\sqrt[3]{x} + \sin x)^3.$$

Verificare che f è derivabile su tutto $\mathbf{R}$ e calcolare la derivata f'. Studiare la continuità di f'.

Soluzione. Notiamo che $\sqrt[3]{x}$ non è derivabile per $x = 0$. Le altre funzioni coinvolte sono derivabili in ogni punto. Dunque, per $x \neq 0$ la funzione f è derivabile e possiamo applicare le regole di derivazione della funzione composta e della somma per ottenere

$$f'(x) = 3(\sqrt[3]{x} + \sin x)^2 \left(\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + \cos x \right) = \left(1 + \frac{\sin x}{\sqrt[3]{x}} \right)^2 (1 + 3\sqrt[3]{x^2}\cos x).$$

Per $x = 0$ calcoliamo il limite del rapporto incrementale per verificare che anche in questo caso la derivata esiste:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt[3]{h} + \sin h)^3}{h} = \lim_{h\to 0} \left(1 + \frac{\sin h}{\sqrt[3]{h}} \right)^3 = 1$$

(si noti infatti che $\frac{\sin h}{\sqrt[3]{h}} = \sqrt[3]{h^2}\, \frac{\sin h}{h} \to 0$).

Otteniamo dunque

$$f'(x) = \begin{cases} \left(1 + \frac{\sin x}{\sqrt[3]{x}} \right)^3 (\sqrt[3]{x} + 3x\cos x) & \text{se } x \neq 0, \\ 1 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Notiamo che la funzione f' coincide intorno ad ogni punto $x \neq 0$ con una funzione che è composizione di funzioni continue. Dunque f' è continua in ogni punto $x \neq 0$. Inoltre f è continua anche in 0 infatti

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0} \left(1 + \frac{\sin x}{\sqrt[3]{x}} \right)^2 (1 + 3\sqrt[3]{x^2}\cos x) = 1 = f'(0).$$

4. Sia $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definita da

$$f(x) = (\sqrt[5]{x} + \sin x)^5.$$

Verificare che f è derivabile su tutto $\mathbf{R}$ e calcolare la derivata f'. Studiare la continuità di f'.

Soluzione. Si veda l'esercizio precedente (sostituendo ogni 3 con un 5 e ogni 2 con 4).

5. Dire quante soluzioni reali ha l'equazione

$$x^4 - 4x - 1 = 0$$

motivando rigorosamente la risposta.

Soluzione. Posto $f(x) = x^4 - 4x - 1$ si ha $f'(x) = 4(x^3 - 1)$. Dunque dallo studio del segno della derivata troviamo che la funzione è strettamente crescente per $x > 1$ e strettamente decrescente per $x < 1$. Notiamo che

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty, \quad f(1) = -6 < 0, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

Dalla definizione di limite infinito deduciamo quindi che esitono $x_1 > 1$ con $f(x_1) > 0$ e $x_2 < 1$ con $f(x_2) < 0$. Dunque per il teorema di esistenza degli zeri esistono due soluzioni dell'equazione $f(x) = 0$ negli intervalli $]-\infty, 1[$ e $]1, +\infty[$. Siccome in tali intervalli la funzione è strettamente monotòna e quindi iniettiva, non ci possono essere altre soluzioni. In definitiva ci sono dunque esattamente 2 soluzioni.

6. Dire quante soluzioni reali ha l'equazione

$$e^x = 3x$$

motivando rigorosamente la risposta.

Soluzione. Posto $f(x) = e^x - 3x$ si tratta di trovare il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = 0$. Si ha $f'(x) = e^x - 3$ e dunque la funzione è strettamente crescente per $x > \log 3$ e strettamente decrescente per $x < \log 3$. Notiamo che

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty, \quad f(\log 3) = 3(1 - \log 3) < 0, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

Dalla definizione di limite infinito deduciamo quindi che esitono $x_1 > \log 3$ con $f(x_1) > 0$ e $x_2 < \log 3$ con $f(x_2) < 0$. Dunque per il teorema di esistenza degli zeri esistono due soluzioni dell'equazione $f(x) = 0$ negli intervalli $]-\infty, \log 3[$ e $]\log 3, +\infty[$. Siccome in tali intervalli la funzione è strettamente monotòna e quindi iniettiva, non ci possono essere altre soluzioni. In definitiva ci sono dunque esattamente 2 soluzioni.

7. Sia $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione derivabile che si annulla in tre punti distinti (e non più di tre). Dimostrare che f non è convessa.

Soluzione. Supponiamo per assurdo che f sia convessa. Siano $x_1 < x_2 < x_3$ i tre punti in cui si annulla f. La retta tangente al grafico di f nel punto x_2 ha equazione $y = m(x - x_2)$ con $m = f'(x_2)$. Siccome la funzione è convessa il grafico della funzione deve trovarsi al di sopra della retta tangente in x_2 cioè $f(x) \ge m(x - x_2)$ per ogni $x \in \mathbf{R}$; in particolare questo deve essere vero per $x = x_1$ e per $x = x_3$. Otteniamo dunque $0 = f(x_1) \ge m(x_1 - x_2)$ e $0 = f(x_3) \ge m(x_3 - x_2)$ da cui si ottiene $f'(x_2) = m = 0$. Dunque per ogni x si ha $f(x) \ge 0$. D'altra parte essendo f convessa, $f'(x)$ deve essere crescente e sapendo che $f'(x_2) = 0$ si ha $f'(x) \ge 0$ per ogni $x \ge x_2$. Dunque la funzione f è crescente per $x \ge x_2$ e quindi $f(x) \le f(x_3)$ per $x \in [x_2, x_3]$. Dunque abbiamo ottenuto che $f(x) = 0$ per ogni $x \in [x_2, x_3]$ che contraddice l'ipotesi per cui f non si annulla in più di tre punti.

8. Sia $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione derivabile due volte tale che $f(1) = 1$, $f(0) = 0$ e $f(-1) = -1$. Provare che esiste un punto x tale che $f''(x) = 0$.

   Soluzione. Per il teorema di Lagrange sappiamo esistere due punti $x_1 \in]-1, 0[$ e $x_2 \in]0, 1[$ tali che

   $$f'(x_1) = \frac{f(0) - f(-1)}{1} = 1, \quad f'(x_2) = \frac{f(1) - f(0)}{1} = 1.$$

   Applicando nuovamente il teorema di Lagrange nell'intervallo $[x_1, x_2]$ (notiamo che $x_1 < x_2$) alla funzione f' otteniamo l'esistenza di un punto $\bar{x}$ tale che

   $$f''(\bar{x}) = \frac{f'(x_2) - f'(x_1)}{x_2 - x_1} = 0.$$

9.2.2006 Corretti alcuni errori di calcolo nelle soluzioni degli esercizi 2 e 3.