Ancora funzioni in due variabili

18 ottobre 2001

1. Sia $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ una funzione continua tale che $f^{-1}(]-\infty, l])$ è un sottoinsieme limitato di $\mathbf{R}^2$ per ogni $l \in \mathbf{R}$. Provare che f ammette minimo.

2. Sia $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ una funzione continua tale che esistono delle costanti positive a, b, c per le quali vale
$$f(x, y) \geq a(x^2 + y^2)^b - c.$$
Provare che f ammette minimo.

3. Sia $O = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$. Sia $A \subset \mathbf{R}^2$ e $f : A \to \mathbf{R}$ una funzione continua. Provare che se esiste una funzione continua e iniettiva $\gamma\colon O \to A$ allora f non è iniettiva.

   Trovare un altro insieme $Y \subset \mathbf{R}^2$ che abbia la stessa proprietà di O e che sia "di tipo diverso" da O nel senso che non deve esistere una funzione continua e iniettiva $\gamma\colon O \to Y$.

4. Sia $f \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}^2, \mathbf{R})$ una funzione tale che se $x^2 + y^2 = 1$ allora $\nabla f(x, y) \cdot (x, y) < 0$. Provare che esiste un punto (x_0, y_0) tale che $\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)$.

5. Si provi il seguente teorema (tipo Lagrange). Sia C un sottoinsieme aperto e convesso di $\mathbf{R}^2$ e sia $f : C \to \mathbf{R}$ una funzione derivabile in ogni punto di C. Scelti comunque $p, q \in C$ esiste $\xi \in [p, q]$ ($[p, q]$ è il segmento congiungente p e q) tale che
$$f(q) - f(p) = \nabla f(\xi) \cdot (q - p).$$

6. Si trovi una funzione $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ tale che
$$\begin{cases} f(0,0) = 7 \\ \nabla f(x, y) = (y, x + 2y) \end{cases}$$
provando inoltre che tale soluzione è unica.

7. Si provi che non esiste nessuna funzione $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ tale che
$$\nabla f(x, y) = (xy, 1).$$

8. Si provi che non esiste nessuna funzione $f\colon \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbf{R}$ tale che
$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right).$$
9. Sia $f \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}^2, \mathbf{R})$ tale che $f(\sin t, \sin 2t) = 0$ per ogni $t \in \mathbf{R}$. Provare che $\nabla f(0,0) = (0,0)$.
10. Sia $f \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}^2, \mathbf{R})$ tale che $f(\sin t, \sin t \sin 2t) = 0$ per ogni $t \in \mathbf{R}$. Provare che $\nabla f(0,0) = (0,0)$.

Modifiche: 26.11.2003: ho corretto l'enunciato del terzo esercizio.