1 dicembre 1999

1. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua, e siano $a, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ due funzioni derivabili. Posto
$$G(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$$
si provi che G è derivabile e che
$$G'(x) = f(b(x))b'(x) - f(a(x))a'(x).$$

2. Per ogni $\epsilon > 0$ sia data $g_\epsilon \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua e tale che

   (a) $|t| > \epsilon \Rightarrow g_\epsilon(t) = 0$;

   (b) $\int_{\mathbb{R}} g_\epsilon(t)\,\mathrm{d}t = 1$;

   (c) $g_\epsilon(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

   Dimostrare che se $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione continua, allora
$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{\mathbb{R}} f(t) g_\epsilon(t)\,\mathrm{d}t = f(0).$$

   Provare inoltre che se le g_ϵ e f sono funzioni derivabili con derivata continua, allora
$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{\mathbb{R}} f(t) g'_\epsilon(t)\,\mathrm{d}t = -f'(0).$$

3. Sia $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione crescente, e sia $X \subset \mathbb{R}$ l'insieme dei punti in cui f non è continua. Dimostrare che l'insieme X è al più numerabile cioè che esiste una funzione iniettiva $g \colon X \to \mathbb{N}$. (Suggerimento: cercare una funzione iniettiva $h \colon X \to \mathbb{Q}$).

4. Sia $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua con derivata continua tale che
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}.$$

   Dire (giustificandolo) quali delle seguenti affermazioni sono vere:

   (a)
$$\lim_{x \to +\infty} f'(x) = 0;$$

   (b)
$$\lim_{x \to +\infty} \int_0^x (f(x) - l)\,\mathrm{d}x = 0;$$

   (c)
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = l.$$