

Esercizi 1 dicembre '99

- ξ) Si caratterizzino i punti di discontinuità della seguente funzione e si dica se la stessa è integrabile:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in \{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\} \cup \{0\} \\ \frac{1}{q} & x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}, x = \frac{p}{q}, (p, q) = 1 \end{cases}$$

- η) Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua e $a \in \mathbb{R}$. dimostrare che la funzione

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

è derivabile e che $F'(x) = f(x)$.

- β) Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione qualsiasi. $a \in \mathbb{R}$ determinare la funzione

$$F(x) = \int_a^{f(x)} t dt$$

- ζ) Siano $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua, $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile e $a \in \mathbb{R}$. Si studino le funzioni

$$F(x) = \int_a^{g(x)} f(t) dt$$

$$F(x) = \int_{g(x)}^a f(t) dt$$

e se ne calcolino le derivate (dopo averne dimostrato l'esistenza).

- ν) Si dia un esempio di una funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che, posto $F(x) = \int_a^x f(t) dt$, sia $f(x) \neq F'(x)$.

- λ) Risolvere le seguenti equazioni (laddove soluzioni esistano):

$$\begin{aligned} \int_0^x f(t) dt &= x \\ \int_0^x f(t) dt &= f(x) \\ \int_0^x f(t) dt &= x f(x). \end{aligned}$$