COMPITO IN CLASSE
20 novembre 1998
(Analisi I, C.d.L. Fisica)

Rispondere ad almeno due punti per esercizio. I punti contrassegnati da $\bullet$ potrebbero risultare piú impegnativi.

1. (a) *Siano $\mathcal{A}$ un insieme generico, ed $f : \mathcal{A} \to \mathbf{R}$, $g : \mathcal{A} \to \mathbf{R}$ due funzioni inferiormente limitate definite su $\mathcal{A}$. Si provi:*

$$\inf_{P\in\mathcal{A}} f(P) \;-\; \inf_{Q\in\mathcal{A}} g(Q) \;\leq\; \sup_{R\in\mathcal{A}} \big(f(R) - g(R)\big).$$

Soluzione. Dato comunque $\varepsilon > 0$ possiamo trovare un punto $X \in \mathcal{A}$ tale che $g(X) \leq \inf_{P\in\mathcal{A}} g(P) + \varepsilon$. Dunque si ha

$$\sup_{R\in\mathcal{A}} (f(R) - g(R)) \geq f(X) - g(X) \geq \inf_{P\in\mathcal{A}} f(P) - \inf_{Q\in\mathcal{A}} g(Q) - \varepsilon.$$

Siccome questo è vero per ogni ε si ottiene la disuguaglianza cercata.
Soluzione alternativa. Per ogni $Q \in \mathcal{A}$ si ha

$$\sup_{R\in\mathcal{A}} (f(R) - g(R)) \geq f(Q) - g(Q)$$

essendo anche $f(Q) \geq \inf_{P\in\mathcal{A}} f(P)$ si ottiene

$$g(Q) \geq \inf_{P\in\mathcal{A}} f(P) - \sup_{R\in\mathcal{A}} (f(R) - g(R)).$$

Essendo quest'ultima disuguaglianza vera per ogni $Q \in \mathcal{A}$ si ottiene dunque

$$\inf_{Q\in\mathcal{A}} g(Q) \geq \inf_{P\in\mathcal{A}} - \sup_{R\in\mathcal{A}} .$$

(b) *Sia $\mathcal{A} \subseteq \mathbf{R}^2$, e si consideri un punto che si muove con moto rettilineo uniforme partendo dall'origine: $B(t) = (t, 0)$. Si consideri la distanza $d(t)$ di $B(t)$ dall'insieme $\mathcal{A}$:*

$$d(t) \;=_{\text{def}}\; \inf_{P\in\mathcal{A}} \operatorname{dist}(B(t), P) \;=\; \inf_{P=(p_1,p_2)\in\mathcal{A}} \sqrt{(t-p_1)^2 + p_2^2}.$$

Si provi che la funzione $d(t)$ è continua. Puó essere utile la diseguaglianza triangolare per la distanza euclidea in $\mathbf{R}^2$: $dist(U, V) \leq dist(U, W) + dist(W, V)$, e quanto provato nel punto (a).
Soluzione. Per quanto visto nel punto precedente si ha

$$d(t) - d(s) \leq \sup_{P\in\mathcal{A}} (\operatorname{dist}(B(t), P) - \operatorname{dist}(B(s), P))$$

e dalla disuguaglianza triangolare otteniamo

$$d(t) - d(s) \leq \sup_{P\in\mathcal{A}} \operatorname{dist}(B(t), B(s)) = \operatorname{dist}(B(t), B(s)) = |t - s|.$$

Siccome lo stesso risultato è vero scambiando t con s, otteniamo $|d(t) - d(s)| \leq |t - s|$. Dunque per ogni $\varepsilon > 0$ posto $\delta = \varepsilon$ si ha che se $|s - t| \leq \delta$ allora $|d(t) - d(s)| \leq |t - s| \leq \varepsilon$.
Soluzione alternativa. Siano $s, t \in \mathbf{R}$. Per la disuguaglianza triangolare si ha, per ogni punto $P \in \mathcal{A}$

$$\operatorname{dist}(B(s), P) \leq \operatorname{dist}(B(s), B(t)) + \operatorname{dist}(B(t), P).$$

Prendendo l'estremo inferiore di ambo i membri si ottiene (notando anche che $\mathrm{dist}(B(s), B(t)) = |s - t|$)

$$d(s) \leq |s - t| + d(t)$$

cioè $d(s) - d(t) \leq |s - t|$. Si conclude quindi come nella soluzione precedente.

(c) *Si provi che se la proiezione ortogonale di $\mathcal{A}$ sul primo asse delle coordinate, $\{x \in \mathbf{R} : \exists y \in \mathbf{R}(x, y) \in \mathcal{A}\}$, è un sottoinsieme limitato in $\mathbf{R}$, allora vi è un istante in cui tale distanza è minima.*

<u>Soluzione.</u> Supponiamo dunque che la proiezione di $\mathcal{A}$ sulla retta $r = B(\mathbf{R}) = \{(t, 0) : t \in \mathbf{R}\}$ sia contenuta nell'intervallo $[-M; M]$. Siccome, per il punto precedente, la funzione $d\colon [-M; M] \to \mathbf{R}$ è continua, tale funzione ammette un punto di minimo t_0 nell'intervallo $[-M; M]$. D'altra parte possiamo anche dimostrare che se $t < -M$ (o se $t > M$) allora $d(t) > d(t_0)$. Infatti per ogni $\varepsilon > 0$ sia $P \in \mathcal{A}$ un punto tale che $d(B(t), P) \leq d(t) + \varepsilon$. Per ipotesi la proiezione di P su r è un punto $B(t')$ con $t' \in [-M; M]$ e tale punto è il punto di r di minima distanza da P, cioè $d(P, B(t)) > d(P, B(t'))$ ma sappiamo anche che $d(P, B(t')) \geq d(t') \geq d(t_0)$. In conclusione abbiamo verificato che (se $t \notin [-M; M]$) per ogni $\varepsilon > 0$ si ha $d(t) > d(t_0) - \varepsilon$ e quindi t_0 è un punto di minimo assoluto per d.

(d) *Si trovi un $\mathcal{A} \subseteq \mathbf{R}^2$ per cui la funzione $d(t)$ non ha minimo.*

<u>Soluzione.</u> Si può prendere ad esempio l'insieme $\mathcal{A} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2\colon y \geq \mathrm{e}^x\}$. Essendo $0 < d(t) \leq \mathrm{dist}\,(B(t), (t, \mathrm{e}^t)) = e^t$ per ogni $t \in \mathbf{R}$, si trova per confronto che $\lim_{t\to-\infty} d(t) = 0$. Dunque l'estremo inferiore dell'insieme $d(\mathbf{R})$ è zero ma non esiste nessun punto di minimo.

2. *Dire nei seguenti casi se vi sono funzioni con la proprietà specificata. In caso affermativo si trovi un esempio, in caso negativo si provi quanto asserito:*

   (a) $f :]0; 1[\to \mathbf{R}$ *bigettiva e continua;*
   <u>Soluzione.</u> Un esempio è la funzione $f(x) = \tan\left(\pi x - \frac{\pi}{2}\right)$.

   (b) $f : [0; 1] \to \mathbf{R}$ *surgettiva e continua;*
   <u>Soluzione.</u> Non esiste. Infatti se $f\colon [0, 1] \to \mathbf{R}$ è continua, allora assume valore massimo e non assume valori maggiori del valore massimo. Dunque non è surgettiva.

   (c) $f : [0; 1[\to \mathbf{R}$ *surgettiva e continua;*
   <u>Soluzione.</u> Un esempio è la funzione $f(x) = \frac{\sin \frac{1}{1-x}}{1-x}$.

   (d) • $f : [0; 1] \to \mathbf{R}$ *bigettiva.*
   <u>Soluzione.</u> Costruiamo dapprima una funzione bigettiva : $\lambda\colon [0, 1] \to]0, 1[$. Questo può essere fatto ad esempio in questo modo:

$$\lambda(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{k+1}} & \text{se} \quad x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^k} \text{ con } k \geq 1 \text{ intero} \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{k+1}} & \text{se} \quad x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^k} \text{ con } k \geq 1 \text{ intero} \\ x \quad \text{altrimenti} \end{cases}$$

   Quindi basta porre $f(x) = \tan\left(\pi\lambda(x) - \frac{\pi}{2}\right)$.

3. *Si consideri la funzione $h : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $h(x, y) = x(x - 1)^2 - 2y^2$.*

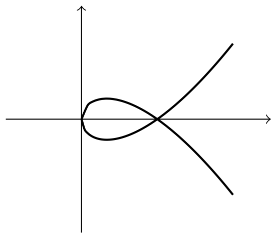
(a) *Trovare l'estremo superiore e l'estremo inferiore di $h(x,y)$ sull'insieme $S = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : |x| \leq 2\}$. Specificare se sono rispettivamente valori di massimo e di minimo, e nel caso trovare tutti i punti di S ove tali valori vengono assunti.*

Soluzione. Se $|x| \leq 2$ si ha $h(x,y) \leq 2$ in quanto $x \leq |x| \leq 2$, $x - 1 \leq |x| - 1 \leq 1$ e $-y^2 \leq 0$. Analogamente se $|x| < 2$ o $y \neq 0$ si ha la disuguaglianza stretta $h(x,y) < 2$. Dunque l'unico punto di massimo si ha per $x = 2$, $y = 0$ e il valore di h è $h(2,0) = 2$.

L'estremo inferiore di h è $-\infty$ in quanto per ogni $M > 1$ se $y > M$ e $x = 0$ si ha $h(x,y) = -2M^2 < -M$. Dunque non esistono punti di minimo per h.

(b) Si disegni approssimativamente l'insieme $L = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : h(x,y) = 0\}$.

Soluzione. Scrivendo L come grafico otteniamo $L = \{(x,y) \colon x(x-1)^2 = 2y^2\} = \{(x,y) \colon x \geq 0 \text{ e } y = \sqrt{\frac{x}{2}}(x-1)\} \cup \{(x,y) \colon x \geq 0 \text{ e } y = -\sqrt{\frac{x}{2}}(x-1)\}$. Dunque basterà studiare il grafico della funzione $f \colon [0; +\infty[\to \mathbf{R}$, $f(x) = \sqrt{\frac{x}{2}}(x-1)$ e disegnare quindi tale grafico e il simmetrico rispetto all'asse delle x:



(c) *Si definisca una funzione $\gamma : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$, $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$, con γ_1, γ_2 funzioni coordinate* **continue** *da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$, per cui*

$$\mathrm{Im}_{t \in \mathbf{R}}\, \gamma(t) \;=\; L.$$

Soluzione. Basterà porre

$$\gamma_1(t) = |t|$$

e

$$\gamma_2(t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{t}{2}}(t-1) & \text{se} \quad t \geq 0 \\ -\sqrt{\frac{-t}{2}}(-t-1) & \text{se} \quad t < 0 \end{cases} .$$

Ovviamente γ_1 è continua. Per quanto riguarda γ_2, sappiamo che è continua per $t \geq 0$ ed è anche continua per $t \leq 0$. Dunque è continua su tutto $\mathbf{R}$.

Un'altra possibile soluzione è

$$\begin{aligned} \gamma_1(t) &= t^2 \\ \gamma_2(t) &= \frac{t(t^2-1)}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

(d) • *Si provi che ogni funzione $\gamma : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$ con coordinate continue per cui $Im_{\mathbf{R}}\gamma = L$ non puó essere iniettiva.*

Consideriamo in $\mathbf{R}^2$ i punti $P_1 = (2,1)$, $P_2 = (0,0)$ e $P_3 = (2,-1)$ che sono tutti punti di L. Esisteranno dunque dei punti $t_1, t_2, t_3 \in \mathbf{R}$ tali che $\gamma(t_i) = P_i$ $(i = 1,2,3)$. A seconda dell'ordine dei punti t_1, t_2, t_3 si possono avere ora vari casi.

- $t_1 < t_2 < t_3$. Siccome si ha $\gamma_1(t_2) = 0$ e $\gamma_1(t_1) = \gamma_1(t_2) = 2$ per il teorema degli zeri dovranno esistere dei punti $t' \in]t_1, t_2[$ e $t'' \in]t_2; t_3[$ tali che $\gamma_1(t') = \gamma_1(t'') = 1$. Ma l'unico punto di L con ascissa pari a 1 è il punto $(1, 0)$ e quindi $\gamma(t') = \gamma(t'') = (1, 0)$ ed essendo $t' \neq t''$ abbiamo provato che γ non è iniettiva.
- $t_1 < t_3 < t_2$. Come nel caso precedente, nell'intervallo $]t_3; t_2[$ ci dev'essere un punto t'' con $\gamma_1(t'') = 1$ e quindi $\gamma(t'') = (1, 0)$. D'altra si ha $\gamma_2(t_1) = 1$ e $\gamma_2(t_3) = -1$ dunque sempre per il teorema degli zeri ci dev'essere un punto $t' \in]t_1; t_3[$ tale che $\gamma_2(t') = 0$. Ma ci sono solo due punti con ordinata pari a 0: $P_2 = (0, 0)$ e $(1, 0)$. Dunque se $\gamma(t') = (0, 0)$ allora $\gamma(t') = \gamma(t_2)$ e se $\gamma(t') = (1, 0)$ allora $\gamma(t') = \gamma(t'')$. In ogni caso γ non è iniettiva.
- Gli altri casi si riconducono ai due appena studiati considerando invece della funzione $\gamma(t)$ le funzioni $\gamma(-t)$, $-\gamma(t)$ e $-\gamma(-t)$.