

Compito di Analisi II/A
30 gennaio 1998

1. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' &= \sin^2(x-t) \\ x(0) &= 0. \end{cases}$$

(Traccia: si operi la sostituzione $y(t) = x(t) - t$.)

Soluzione. Con la sostituzione $y = x - t$ si ottiene $y' = x' - 1$ e quindi

$$y' = \sin^2 y - 1 = -\cos^2 y.$$

L'equazione è a variabili separabili e si risolve così:

$$\begin{aligned} \frac{y'}{\cos^2 y} &= -1 \\ \int \frac{y'}{\cos^2 y} dt &= \int -1 dt \\ \tan y &= -t + c \\ y &= \arctan(c - t) \end{aligned}$$

quindi

$$x(t) = t + y(t) = t + \arctan(c - t).$$

Ponendo la condizione $x(0) = 0$ si ottiene $c = 0$ e quindi la soluzione cercata è

$$x(t) = t - \arctan t.$$

2. Si consideri la successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{1}{nx - x^n} \quad (n = 2, 3, 4, \dots)$$

per $x \in [1/2, 1]$. Calcolare il limite di (f_n) e dire se la convergenza è uniforme.

Soluzione.

Fissato $x \in [1/2, 1[$, si ha

$$\begin{aligned} nx &\rightarrow +\infty \\ x^n &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

dunque $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$ per $x \in [1/2, 1[$. Per $x = 1$ si ha $f_n(1) = \frac{1}{n-1}$ e dunque anche $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(1) = 0$. Ne segue che la successione (f_n) converge a $f_\infty \equiv 0$ per ogni $x \in [1/2, 1]$.

Per verificare se la convergenza è uniforme, occorre calcolare

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in [1/2, 1]} |f_n(x) - f_\infty(x)| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in [1/2, 1]} \frac{1}{nx - x^n}$$

in quanto $nx > x^n$ per ogni $x < \sqrt[n]{n}$ e quindi $f_n(x) > 0$ per ogni $x \in [1/2, 1]$. Poiché

$$f'_n(x) = \frac{-n + nx^{n-1}}{(nx - x^n)^2}$$

si ha che $f'_n(x) > 0$ se e solo se

$$nx^{n-1} > n$$

quindi per $x > 1$. Sull'intervallo $[1/2, 1]$ allora f_n è decrescente e

$$\sup_{x \in [1/2, 1]} f_n(x) = f_n(1/2) = \frac{1}{\frac{n}{2} - \frac{1}{2^n}}.$$

Passando al limite per $n \rightarrow +\infty$, si ha che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in [1/2, 1]} \frac{1}{nx - x^n} = 0$$

quindi la convergenza è uniforme.

3. *Calcolare il valore massimo e il valore minimo della funzione*

$$f(x, y) = x^3 + y^2 - 3x$$

sul cerchio $C = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq 4\}$.

Soluzione.

Il gradiente di $f(x, y)$ è

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y$$

quindi i punti stazionari sono dati da

$$\begin{cases} 3x^2 - 3 = 0 \\ 2y = 0 \end{cases}$$

e sono $(1, 0)$ e $(-1, 0)$, ambedue appartenenti a C . Calcolando l'hessiano si ha

$$\mathcal{H}f(1, 0) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

quindi $(1, 0)$ è di minimo relativo ($f(1, 0) = -2$), mentre

$$\mathcal{H}f(-1, 0) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

quindi $(-1, 0)$ è di sella.

Passiamo ai punti della frontiera: $x^2 + y^2 = 4$. Si ha $y^2 = 4 - x^2$ e quindi basta studiare

$$\varphi(x) = x^3 + 4 - x^2 - 3x$$

per $x \in [-2, 2]$. Si ha

$$\varphi'(x) = 3x^2 - 2x - 3$$

quindi

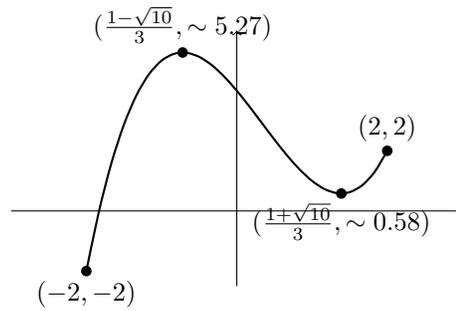
$$\varphi'(x) = 0 \iff x = \frac{1 \pm \sqrt{10}}{3} = \begin{cases} \sim 1.39 \\ \sim -0.72 \end{cases}$$

Un grafico di φ ha la forma

quindi $\max \varphi = \varphi(\frac{1-\sqrt{10}}{3}) \approx 5.27$ e $\min \varphi = \varphi(-2) = -2$.

Ne segue che anche

$$\begin{aligned} \max f &= f\left(\frac{1-\sqrt{10}}{3}, 4 - \left(\frac{1-\sqrt{10}}{3}\right)^2\right) \approx 5.27 \\ \min f &= f(1, 0) = f(-2, 0) = -2. \end{aligned}$$



4. Calcolare il polinomio di Taylor di grado 2 della funzione

$$f(x, y) = e^x \sin y$$

attorno a $(0, 0)$.

Soluzione.

Basta calcolare

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= e^x \sin y \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= e^x \cos y \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= e^x \sin y \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= e^x \cos y \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= -e^x \sin y \end{aligned}$$

quindi

$$\begin{aligned} f(0, 0) &= 0 \\ \nabla f(0, 0) &= (0, 1) \\ \mathcal{H}f(0, 0) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

e la formula di Taylor cercata è

$$f(x, y) = f(0, 0) + \nabla f(0, 0) \cdot (x, y) + (\mathcal{H}f(0, 0)(x, y)) \cdot (x, y) = y + xy + o(x^2 + y^2).$$