

Curriculum scientifico di Emanuele Paolini

Dati personali

Emanuele Paolini nato a Udine, nel 1973
residente a Pisa

Recapito Dipartimento di Matematica
Largo Bruno Pontecorvo 5, 56127 Pisa
tel.: 050 221 3244
email: emanuele.paolini@unipi.it
web: <http://pagine.dm.unipi.it/paolini/>

Formazione scientifica

- 1996 Laurea in Matematica presso l'Università di Pisa.
Votazione: 110/110 e lode.
Relatore: Prof. M. Giaquinta, controrelatore: Prof. L. Ambrosio.
- 1997 Diploma di licenza in Matematica presso la Scuola Normale Superiore di Pisa.
Votazione: 70/70 e lode.
- 1997 Perfezionando alla Scuola Normale Superiore di Pisa da gennaio 1997.
- 2000 Ricercatore presso il Dipartimento di Matematica "U. Dini" dell'Università di Firenze.
- 2015 Professore associato presso il Dipartimento di Matematica e Informatica "U. Dini" dell'Università di Firenze.
- 2016 Professore associato presso il Dipartimento di Matematica dell'Università di Pisa

Attività didattica

- 1997-98 Esercitazioni per il corso di *Analisi II* tenuto dal prof. L. Modica per il CdL in Informatica, Università di Pisa
- 1998-99 Esercitazioni per il corso di *Analisi I* tenuto dal prof. M. Giaquinta per il CdL in Fisica, Università di Pisa
- 1999-2000 Tutorato per il corso di *Analisi* tenuto dal prof. M. Giaquinta, Scuola Normale Superiore di Pisa
- 1999-2000 Esercitazioni per il corso di *Matematica per l'Ingegneria* tenuto dalla prof. P. Conti per il CdL in Ingegneria Meccanica e Biomedica, Università di Pisa
- 2000-01 Esercitazioni per il corso di *Matematica I* tenuto dalla prof. G. Papi per il CdL in Biologia, Università di Firenze
- 2001-02 Esercitazioni per il corso di *Analisi Matematica 2* tenuto dal prof. P. Marcellini per il CdL in Matematica, Università di Firenze
- 2002-03, 2004-05 e 2006-07 Esercitazioni per il corso di *Analisi Matematica I e II modulo* tenuto dal prof. P. Marcellini per il CdL in Matematica, Università di Firenze
- 2003-04, 2005-06, 2007-08 Esercitazioni per il corso di *Analisi Matematica III e IV modulo* tenuto dal prof. P. Marcellini per il CdL in Matematica, Università di Firenze

- 2004-05 *Calcolo delle Variazioni II modulo* tenuto insieme al dott. M. Focardi, per il CdL specialistica in Matematica, Università di Firenze
- 2003-04, 2004-05, 2005-06, 2006-07 e 2007-08 *Laboratorio Multimediale* per il CdL in Matematica, Università di Firenze
- 2008-09 Esercitazioni per il corso di *Analisi Matematica I* tenuto dalla prof. E. Masciole per il CdL in Matematica, Università di Firenze
- 2008-09 *Analisi Funzionale* per il CdL in Matematica, Università di Firenze
- 2009-10 Esercitazioni per il corso di *Analisi Matematica 2* tenuto dal prof. P. Marcellini per il CdL in Matematica, Università di Firenze
- 2009-10 *Analisi Matematica 2 e complementi* per il CdS di Ingegneria Chimica, Università di Pisa
- 2011-12 *Matematica per l'insegnamento* cotitolare con Prof. C. Casolo e Prof. F. Battaglia, TFA, Università di Firenze
- 2011-12, 2012-13, 2013-14 *Laboratorio di software applicativi*, CdL in Matematica, Università di Firenze
- 2014-15 *Analisi Matematica II* cotitolare con Prof. L. Poggiolini, per il CdS di Fisica e Astrofisica, Università di Firenze
- 2014-15 *Software Didattici* cotitolare con Prof. M. Maggesi, TFA, Università di Firenze
- 2010-11, 2012-2013, 2014-2015 *Analisi Matematica I*, titolare prof. P. Marcellini, CdL in Matematica, Università di Firenze
- 2009-10, 2010-11, 2011-12, 2012-13, 2015-16 *Matematica I* per il CdL in Ottica e Optometria, Università di Firenze
- 2013-14, 2015-16 *Analisi Matematica I* cotitolare con Prof. L. Poggiolini/F. Bucci, per il CdS di Fisica e Astrofisica, Università di Firenze
- 2016-17 *Analisi Superiore* per il CdL Matematica, Università di Pisa
- 2016-17 *Matematica e Statistica* per il CdS Biotecnologie vegetali e microbiche, Università di Pisa
- 2016-17 *Statistica* per il CdL Viticoltura ed Enologia, Università di Pisa
- 2017-18 *Analisi Matematica (B)* per il CdS Fisica, Università di Pisa

Relatore di tesi

- 2005 Claudia Amoruso "Tecniche di Rendering" (22 aprile 2005, Laurea triennale)
- 2006 Letizia Ulivi "Frattali Autosimili" (20 luglio 2006, Laurea triennale)
- 2007 Guido de Philippis "Una dimostrazione della minimalità dei coni di Simons" (12 ottobre 2007, Laurea triennale)
- 2008 Letizia Ulivi "Esistenza e regolarità delle connessioni minime" (16 dicembre 2008, Laurea specialistica)
- 2009 Guido de Philippis "Il determinante jacobiano per mappe singolari" (15 ottobre 2009, Laurea specialistica)
- 2009 Ermanno Cioni "Dinamica dei polinomi quadratici complessi e insiemi di Julia" (15 ottobre 2009, Laurea triennale)
- 2010 Pietro Lenarda "Il teorema di Banach-Tarski" (21 luglio 2010, Laurea triennale)

- 2013 Antonio Caserta “Immersioni isometriche, mappe origami e Mozartkugeln” (24 luglio 2013, Laurea triennale)
- 2016 Andrea Tamagnini “Planar Clusters” (18 marzo 2016, Dottorato)
- 2016 Tommaso di Marco “Inclusioni differenziali” (13 ottobre 2016, Laurea magistrale)

Commissione Concorsi

- TFA 2012 In commissione d’esame per il concorso di ammissione al tirocinio formativo abilitante (Pisa-Siena-Firenze).
- SNS 2013, SNS 2016 In commissione d’esame per il concorso di ammissione al corso ordinario della Scuola Normale Superiore di Pisa.

Pubblicazioni scientifiche

- VQR 2010 Le pubblicazioni [12], [15] e [16] sono state giudicate *eccellenti* nella QR 2004-2010 (valutazione qualità della ricerca).
- [1] E. Paolini: *Il teorema del disco topologico di Reifenberg ed il problema di Plateau in dimensione qualunque*, tesi di laurea, Università di Pisa, 1996.
- [2] E. Paolini: *Regularity for minimal boundaries with mean curvature in L^n* , Manuscripta Math. Vol. 97, pagg. 15–35, 1998.
- [3] M. Novaga - E. Paolini: *A computational approach to fractures in crystal growth*, Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei (9) Mat. Appl., Vol. 10, pagg. 47–56, 1999.
- [4] L. Ambrosio - E. Paolini: *Partial regularity for quasi minimizers of perimeter*, Ricerche Mat. Vol. 48, pagg. 167–186, 1999. *Errata-corrige*: Ricerche Mat. Vol. 50, pagg. 191–193, 2001.
- [5] L. Ambrosio - M. Novaga - E. Paolini: *Some regularity results for minimal crystals*, ESAIM: Control Optim. Calc. Var., Vol. 8, pagg. 69–103, 2002.
- [6] M. Novaga - E. Paolini: *Regularity results for boundaries in \mathbf{R}^2 with prescribed anisotropic curvature*, Ann. Mat. Pura Appl., Vol. 184, N. 2, pagg. 239–261, 2005.
- [7] M. Novaga - E. Paolini: *Regularity results for some 1-homogeneous functionals*, Nonlinear Anal. Real World Appl. Vol. 3, N. 4, pagg. 555–566, 2002.
- [8] E. Paolini: *On the Relaxed Total Variation of Singular Maps*, Manuscripta Math. Vol. 111, N. 4, pagg. 499–512, 2003.
- [9] M. Miranda, E. Paolini, E. Stepanov: *On one-dimensional continua uniformly approximating planar sets*, Calc. Var. Partial Diff. Equations Vol. 27, N. 3, pagg. 287–309, 2006.
- [10] E. Paolini, E. Stepanov: *Qualitative properties of maximum distance and average distance minimizers in \mathbf{R}^n* , Journal of Mathematical Sciences Vol. 122, N. 3, pagg. 3290–3309, 2004.
- [11] M. Novaga, E. Paolini: *Stability of Crystalline Evolutions* Math. Models Methods Appl. Sci., Vol. 15, N. 6, pagg. 921–937, 2005.
- [12] G. Bellettini, M. Novaga, E. Paolini: *Global Solutions to the Gradient Flow Equation of a Nonconvex Functional*, SIAM J. Math. Anal., Vol. 37, N. 5, pagg. 1657–1687, 2006.
- [13] E. Paolini, E. Stepanov: *Optimal transportation networks as flat chains*, Interfaces and Free Boundaries, N. 4, pagg. 393–436, 2006

- [14] E. Paolini, E. Stepanov: *Connecting measures by means of branched transportation networks at finite cost* J. Math. Sciences (N.Y.), Vol. 157, N. 6, pagg. 858–873, 2009.
- [15] B. Dacorogna, P. Marcellini, E. Paolini: *An explicit solution to a system of implicit differential equations* Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire, Vol. 25, N. 1, pagg. 163–171, 2008.
- [16] B. Dacorogna, P. Marcellini, E. Paolini: *Lipschitz-continuous local isometric immersions: rigid maps and origami* J. Math. Pures Appl. N. 90, pagg. 66–81, 2008
- [17] B. Dacorogna, P. Marcellini, E. Paolini: *On the n -dimensional Dirichlet problem for isometric maps* J. Funct. Anal. Vol. 255, pagg. 3274–3280, 2008
- [18] G. De Philippis, E. Paolini: *A short proof of the minimality of Simons cone* Rend. Sem. Mat. Univ. Padova Vol. 121, pagg. 233–241, 2009
- [19] B. Dacorogna, P. Marcellini, E. Paolini: *Functions with orthogonal Hessian* Differential and Integral Equations Vol. 23, N. 1–2, pagg. 51–61, 2010
- [20] E. Paolini, L. Ulivi: *The Steiner problem for infinitely many points* Rend. Sem. Mat. Univ. Padova Vol. 124, pagg. 43–56, 2010
- [21] E. Paolini, E. Stepanov: *Existence and regularity results for the Steiner problem* Calc. Var. Partial Diff. Equations Vol. 46, N. 3, pagg. 837–860, 2013
- [22] B. Dacorogna, P. Marcellini, E. Paolini: *Origami and Partial Differential Equations* Notices of the AMS Vol. 57, N. 5, pagg. 598–606, May 2010
- [23] B. Dacorogna, P. Marcellini, E. Paolini: *The two well problem for piecewise affine maps* Adv. Differential Equations Vol. 17, N. 7/8, pagg. 673–696, 2012
- [24] B. Dacorogna, P. Marcellini, E. Paolini: *The degenerate two well problem for piecewise affine maps* Nonlinear Differ. Equ. Appl. NoDEA Vol. 20, N. 2, pagg. 345–359 2013
- [25] E. Paolini, E. Stepanov: *Decomposition of acyclic normal currents in a metric space* J. Funct. Anal. Vol. 263, N. 11, pagg. 3358–3390 2012
- [26] E. Paolini: *Minimal connections: the classical Steiner problem and generalizations* Bruno Pini Mathematical Analysis Seminar Vol. 3, N. 1, pagg. 72 2012
- [27] E. Paolini, E. Stepanov: *Structure of metric cycles and normal one-dimensional currents* J. Funct. Anal. Vol. 264, N. 6, pagg. 1269–1295, 2013
- [28] E. Paolini, E. Stepanov, Y. Teplitskaya: *An example of an infinite Steiner tree connecting an uncountable set* Adv. Calc. Var. Vol. 8, N. 3, pagg. 267–290 2015
- [29] E. Paolini: *Dehn e Banach-Tarski: opposti paradossi* Matematica, cultura e società Vol. 2, N. 1, pagg. 81–95 2017
- [30] E. Paolini, E. Stepanov: *Flows of measures generated by vector fields* Proc. Royal Soc. Edinburgh Ser. A - Mathematics (pubblicato online) 2018
- [31] E. Paolini, A. Tamagnini: *Minimal clusters of four planar regions with the same area* ESAIM: COCV Vol. 24, N. 3, pagg. 1303–1331 2018
- [32] E. Paolini, A. Tamagnini: *Minimal cluster computation for four planar regions with the same area* Geometric Flows Vol. 3, N. 1, pagg. 90–96 2018

- [33] E. Paolini, V. M. Tortorelli: *The quadruple planar bubble enclosing equal areas is symmetric* Calc. Var. Vol. 59, N. 1 2020

Organizzazione Convegni

- 2005 "Weekend di Calcolo delle Variazioni". Firenze, 4–6 novembre.
- 2009 "Workshop on Calculus of Variations and PDEs". Firenze, 23–24 gennaio.
- 2017 "New Trends on Calculus of Variations and PDE's". Montecatini, 12–15 giugno.
- 2019 "Incontri di Analisi Matematica tra Firenze, Pisa e Siena" Firenze, 17 maggio 2019.
- 2019 "Incontri di Analisi Matematica tra Firenze, Pisa e Siena" Pisa, 22 novembre 2019.

Progetti di ricerca

- PRIN 2002 Partecipante al progetto "Teoria Geometrica della Misura e Calcolo delle Variazioni"
- PRIN 2004 Partecipante al progetto "Calcolo delle variazioni: problemi vettoriali e regolarità"
- PRIN 2006 Partecipante al progetto "Equazioni ellittiche e paraboliche: problemi vettoriali e regolarità"
- PRIN 2008 Partecipante al progetto "Equazioni ellittiche: problemi vettoriali e regolarità"
- GNAMPA 2009 Responsabile del progetto "Esistenza e regolarità per le soluzioni di problemi vettoriali e reti di trasporto" che ha ottenuto per il 2009 un finanziamento da parte dello GNAMPA (gruppo INDAM).
- PRIN 2010 Partecipante al progetto "Calcolo delle Variazioni"
- GNAMPA 2012 Responsabile del progetto "Esistenza e regolarità per problemi vettoriali e variazionali" che ha ottenuto per il 2012 un finanziamento da parte dello GNAMPA (gruppo INDAM).
- PRIN 2015 Partecipante al progetto "Calcolo delle variazioni".
- PRIN 2017 Partecipante al progetto "Gradient flows, Optimal Transport and Metric Measure Structures".

Cariche Delegato erasmus del Corso di Laurea in Matematica dell'Università di Firenze dal 2013 al 2015.

Delegato all'informatica del dipartimento di matematica di Pisa dal 2016.

Amministratore e programmatore dei server web

- CVGMT Preprint Server <http://cvgmt.sns.it/>
- CDVEDP gruppo di Calcolo delle Variazioni e EDP di Firenze <http://www.math.unifi.it/users/cdvedp/>
- CRM Centro De Giorgi <http://www.crm.sns.it/>
- GEMETHNES progetto ERC <http://gemethnes.sns.it/>

Altre attività

- * Ha collaborato alla stesura della raccolta: “Ennio De Giorgi: Selected Papers”, Springer, 2006.
- * Attività di *Referee* per le riviste: *manuscripta Math.*, *SIAM J. Math. Anal.*, *Calc. Var. Partial Differential Equations, Interfaces and Free Boundaries*, *Scienze e Ricerche*, *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations*, *Operator Theory Advances and Applications*, *Annali della Scuola Normale Superiore*, *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, *Kodai Mathematical Journal*, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*.
- * Programmazione sportiva: dal 2011 partecipa alla competizione *google code jam*. Nel 2016 si è classificato 1245-esimo (7° italiano).

Seminari e comunicazioni tenute

- 1998 “Superfici minime e superfici con curvatura assegnata”. Levico Terme, 21 aprile.
- 1998 “Il teorema del disco topologico di Reifenberg”. Dipartimento di matematica dell’Università di Trento, 13 maggio.
- 2001 “Regolarità per funzionali 1-omogenei: un esempio”. “Questioni di Teoria Geometrica della Misura e di Calcolo delle Variazioni”. Levico, 28 marzo.
- 2002 “On the relaxed total variation of singular maps”. Workshop “Recent Advances in Calculus of Variations and PDE’s – a young researchers meeting”. Pisa, 7–9 novembre.
- 2003 “Variazione totale di mappe singolari”. Dipartimento di matematica dell’Università di Lecce, luglio.
- 2004 “Reti di trasporto ottimale”, “Meeting on Geometric Measure Theory and Calculus of Variations” Levico, 1–6 febbraio.
- 2004 “Reti di trasporto ottimale” Dipartimento di matematica dell’Università di Lecce, 6 luglio.
- 2005 “Reti di trasporto tramite flat chains”. Convegno “giornate di lavoro su questioni di Teoria Geometrica della Misura e Calcolo delle Variazioni”. Levico Terme 30 gennaio–4 febbraio.
- 2007 “On the relaxed total variation of singular maps”. Convegno “New Trends in Partial Differential Equations and Calculus of Variations” Cortona, 6–12 maggio.
- 2007 “How to solve a PDE inclusion using origami”. Seminario su invito. EPFL Lausanne, 20 giugno.
- 2008 “Mappe rigide e origami: il problema di Dirichlet per mappe con gradiente ortogonale”. “XVIII Convegno Nazionale di Calcolo delle Variazioni” Levico Terme, 10–15 febbraio.
- 2008 “Come utilizzare gli origami per risolvere un sistema di equazioni alle derivate parziali”. Seminari di Analisi. Firenze, 9 maggio 2008.
- 2008 “Dirichlet problem for maps with orthogonal gradient: rigid maps and origami”. “Workshop on elliptic and parabolic equations and systems” Napoli, 18–20 giugno.
- 2010 “The Steiner problem for infinitely many points”. “Optimal transport and image processing in geoinformatics and computer vision” St Petersburg, 11–15 giugno.

- 2010 “On the n -dimensional Dirichlet problem for isometric maps”. “INdAM Workshop on vector-valued mappings and systems of PDE’s” Roma, 17–21 maggio.
- 2010 “Maps with orthogonal gradient”. “Workshop on some problems of the Calculus of Variation” Milano, 7–8 settembre.
- 2010 “Origami and PDEs”. “Seminaire d’Analyse” EPFL Lausanne, 3 dicembre.
- 2011 “La matematica negli origami”. “Matematica e Cultura 2011” Venezia, 25–27 marzo.
- 2011 “On the Steiner Problem” Pisa, 11 maggio.
- 2012 “Minimal connections: the classical Steiner problem and generalizations” Bologna, 23 febbraio.
- 2012 “Reti minime di Steiner: il problema classico e recenti generalizzazioni” Firenze, 16 aprile.
- 2012 “Origami frattali e multidimensionali” Mathesis Vicenza, 31 ottobre.
- 2013 “Il problema di Steiner e sue generalizzazioni” Levico, 6 febbraio.
- 2013 “Decomposition of one dimensional currents” ERC workshop Pisa, 11 ottobre.
- 2013 “Piecewise affine solutions to differential inclusions” Lausanne, 11 giugno.
- 2013 “Piecewise affine solutions to the two well problem” Cetraro, 10 luglio.
- 2013 “La matematica degli origami nel piano e nello spazio” Celebration of mind Brescia, 21 ottobre.
- 2013 “Smirnov decomposition of one dimensional currents” Brescia, 22 ottobre.
- 2014 “Decomposition of one-dimensional currents” Padova, 14 novembre.
- 2015 “da Caccioppoli ai frattali autosimilari” Firenze, 15 aprile
- 2015 “Dal Teorema di Banach-Caccioppoli ai Frattali Autosimili” Napoli, 5 giugno
- 2015 “La geometria degli origami: modelli frattali e iperdimensionali” Camerino, 6 maggio
- 2016 “Dehn e Banach-Tarski: due opposti paradossi” Firenze, 16 marzo
- 2016 “Minimal planar clusters of four regions with equal area” Pisa, 28 giugno
- 2017 “Minimal clusters of four planar regions with the same area” Pisa, 27 giugno
- 2018 “Come imparare a risolvere il cubo di Rubik” Pisa, 31 gennaio – 2 febbraio
- 2018 “Cluster minimi nel piano” Firenze, 7 dicembre
- 2019 “Come imparare a risolvere il cubo di Rubik” Pisa, 16–18 gennaio
- 2020 “Come imparare a risolvere il cubo di Rubik” Pisa, 5–7 febbraio

Dettagli sull’attività di ricerca

L’attività di ricerca si sviluppa principalmente nell’ambito della *teoria geometrica della misura* e del *calcolo delle variazioni*. In particolare possiamo individuare i seguenti filoni di ricerca:

- regolarità per superfici minime, ω -minime e con curvatura assegnata [1] [2] [4] [18]
- regolarità in spazi anisotropi [5] [6] [7]
- approccio computazionale allo studio di equazioni di evoluzione [3] [11] [12]
- il determinante Jacobiano [8]
- reti ottimali, problema di Steiner [9] [10] [13] [14] [20] [21] [26] [28] [26] [28].
- mappe rigide e inclusioni differenziali [15] [16] [17] [19] [22] [23] [24].
- struttura delle correnti unidimensionali e flussi di misure [13] [25] [27] [30]

I riferimenti tra parentesi quadre si riferiscono agli articoli elencati nella precedente sezione “Elenco Pubblicazioni”. I riferimenti tra parentesi tonde si riferiscono agli articoli specificati nelle note a piè pagina.

Regolarità per superfici minime, ω -minime e con curvatura assegnata.

Le superfici minime sono superfici che risolvono il problema di Plateau, ovvero sono superfici che hanno area minima tra tutte le superfici con un certo bordo assegnato. Il problema di Plateau in dimensione qualunque è stato risolto negli anni '60 indipendentemente e con tre approcci diversi da: Federer, De Giorgi e Reifenberg. I metodi di Federer e De Giorgi hanno avuto molte estensioni, e hanno originato rispettivamente la teoria delle *Correnti Rettificabili* e la teoria degli *Insiemi di Perimetro Finito*. L'approccio di Reifenberg, essendo invece più complesso e involuto, è rimasto per lo più sconosciuto (lasciando il posto alla teoria dei *varifolds*).

In tutti questi approcci il problema di esistenza dei minimi viene affrontato ampliando la classe delle superfici in modo da ottenere uno spazio sufficientemente ampio da garantire la compattezza necessaria per mostrare l'esistenza del minimo. Per risolvere il problema originario bisogna però dimostrare che i minimi sono, in realtà, superfici regolari in senso classico. Risultati di questo genere vengono chiamati *risultati di regolarità* e sono l'argomento principale trattato in questa sezione.

Nella Tesi di Laurea [1] viene studiato l'articolo di Reifenberg ⁽¹⁾ sulla regolarità delle superfici minime per il problema di Plateau. Questo articolo è interessante in quanto contiene una definizione di tipo algebrico-topologico della classe di superfici ammissibili. Inoltre di particolare interesse risulta essere uno degli strumenti utilizzati in tale articolo: il *teorema del disco topologico*. Questo teorema garantisce l'esistenza di una parametrizzazione continua per una superficie (in [1] si mostra che tale parametrizzazione è Hölderiana) quando la superficie stessa verifica una condizione di “piattezza a tutte le scale” (condizione ϵ, R di Reifenberg).

L'intera tecnica usata da Reifenberg viene generalizzata in [2] per provare che si ha regolarità $C^{0,\alpha}$ per le frontiere in \mathbb{R}^n ($n < 8$) con curvatura media assegnata $H \in L^n(\Omega)$, cioè per il bordo degli insiemi di Caccioppoli $E \subset \mathbb{R}^n$ che minimizzano il funzionale

$$F_H(E, \Omega) = P(E, \Omega) - \frac{1}{n-1} \int_{E \cap \Omega} H(x) dx$$

dove $P(E, \Omega)$ è il perimetro dell'insieme E ristretto all'aperto Ω . Sugli insiemi sufficientemente regolari sappiamo che $P(E, \Omega)$ è l'area della superficie $n-1$ dimensionale $\partial E \cap \Omega$ e se $x \in \partial E$ la quantità $H(x)$ risulta essere la curvatura media della superficie ∂E nel punto x .

¹ E.R. Reifenberg: “Solution of the Plateau problem for m -dimensional surfaces of varying topological type”, *Acta Math.* 1960

Ricordiamo che nel caso in cui $H \in L^p$, $p > n$ i minimi di F_H sono regolari di classe $C^{1,\alpha}$ ⁽²⁾ mentre nel caso limite $p = n$ studiato in [2] la superficie minimizzante può effettivamente avere dei punti in cui non esiste il piano tangente ⁽³⁾.

In [4] si cerca invece di seguire le tecniche di regolarità di De Giorgi mostrando in particolare che il teorema di *decadimento dell'eccesso* ⁽⁴⁾ permette di applicare il *teorema del disco topologico* di Reifenberg. Con questa tecnica si estende la regolarità Hölderiana ottenuta in [2] anche per $n \geq 8$ ammettendo però, come per le superfici minime, singolarità di dimensione $n - 7$ (regolarità parziale). Tale risultato viene inoltre dimostrato nell'ambito più generale degli ω -*minimi* ovvero delle frontiere di insiemi E che verificano una proprietà del tipo

$$P(E, B_\rho) \leq (1 + \omega(\rho))P(F, B_\rho)$$

dove F è una variazione di E in B_ρ e ω è una qualunque funzione infinitesima.

Sempre in [4] si mostra anche che nel caso $n = 2$ (cioè per curve nel piano) si ha regolarità lipschitziana (questo risultato era stato congetturato da De Giorgi).

In [18] viene presentata una dimostrazione semplificata del famoso risultato ⁽⁵⁾ di esistenza di una superficie minima singolare (il cono di Simons). Invece di utilizzare le *calibrazioni* (campi vettoriali unitari che estendono il versore normale alla superficie con divergenza nulla), questa dimostrazione utilizza *sub-calibrazioni* cioè campi con divergenza non positiva. Risulta quindi molto più facile trovare le sub-calibrazioni che, si dimostra, sono comunque sufficienti a stabilire la minimalità di una superficie.

Regolarità in spazi anisotropi

Con "spazio anisotropo" intendiamo uno spazio di Banach reale $(X, \|\cdot\|)$ di dimensione finita dotato di una norma non euclidea. In particolare X è isomorfo a \mathbb{R}^n come spazio vettoriale, ma non come spazio metrico. La palla unitaria di questo spazio viene chiamata *Wulff shape*. Quando la *Wulff shape* è un poliedro questi spazi vengono usualmente chiamati "cristallini" in quanto intervengono in maniera naturale nello studio dei cristalli. La palla unitaria dello spazio duale X^* viene chiamata *Frank diagram*. Ci sono molte difficoltà supplementari nello studio di questi spazi anisotropi rispetto all'usuale spazio euclideo soprattutto nei casi in cui la *Wulff shape* non è differenziabile (presenta degli spigoli) oppure non è strettamente convessa (presenta delle parti piatte).

In [5] vengono studiati i minimi (e gli ω -minimi) del perimetro in uno spazio anisotropo. In questo ambito viene dapprima data una definizione intrinseca di perimetro mostrando che tale definizione è equivalente alle altre definizioni di perimetro anisotropo presenti in letteratura. Si estende quindi il concetto di *frontiera ridotta* mostrando che il teorema di rettificabilità (De Giorgi, Federer) continua a valere. Questo permette anche di dare un teorema di rappresentazione del perimetro anisotropo tramite la misura di Hausdorff. Viene quindi introdotto il concetto di *eccesso* e si riesce a dimostrare che la frontiera di insiemi con eccesso *piccolo* è lipschitziana al di fuori di una parte di misura *piccola*.

Si nota inoltre che gli insiemi con eccesso nullo sono superfici la cui normale appartiene sempre ad una stessa faccia del *Frank Diagram*. Se il *Frank Diagram* è strettamente convesso le sue facce sono singoli punti, la normale risulta quindi fissata e gli insiemi di eccesso nullo sono quindi dei piani. Se invece il *Frank Diagram* ha delle parti piatte (come ad esempio nel caso cristallino) gli insiemi di eccesso nullo possono non essere dei piani. Notiamo infine che gli insiemi con eccesso nullo sono minimi del perimetro (superfici minime anisotrope) e nel caso in cui il

² U. Massari: "Esistenza e Regolarità delle Ipersuperfici di Curvatura Media Assegnata" *Arch. Rat. Mech. Anal.* 1974

³ E. Barozzi - E. Gonzalez - I. Tamanini: "The mean curvature of a set of finite perimeter" *Proc. Amer. Math. Soc.* 1987

⁴ L. Ambrosio - D. Pallara: "Partial regularity of free discontinuity sets, I" *Annali Scuola Normale Sup. Pisa* 1997

⁵ Bombieri - De Giorgi - Giusti: "Minimal cones and the Bernstein problem" *inventiones math.* 1969

Frank Diagram non sia strettamente convesso esistono dunque superfici minime con regolarità solo lipschitziana (e non di classe C^1 come nel caso euclideo).

In questo contesto un teorema di *decadimento dell'eccesso* (se l'eccesso è sufficientemente piccolo in una certa sfera allora tende a zero nelle sfere più piccole) viene ottenuto nel caso $n = 2$ (curve nel piano). Il decadimento dell'eccesso garantisce (come nel caso euclideo) la regolarità lipschitziana delle frontiere minime e ω -minime.

In definitiva in [5] si ottiene la regolarità lipschitziana (che come abbiamo ricordato è il massimo che si può ottenere nel contesto anisotropo) per le frontiere minime e ω -minime del perimetro anisotropo in \mathbb{R}^2 . Si evidenzia anche il fatto che esistono due casi particolarissimi (quando la *Wulff shape* è un quadrilatero o un triangolo) in cui la regolarità lipschitziana è solo parziale in quanto ci può essere un insieme singolare di misura nulla.

In [6] viene approfondito lo studio delle frontiere degli ω -minimi anisotropi nel caso $n = 2$. Le tecniche usate si basano sulla possibilità di decomporre gli insiemi di perimetro finito in una successione di insiemi semplicemente connessi inscatolati l'uno nell'altro ⁽⁶⁾ e nello sfruttare il teorema di Jordan sulle curve semplici chiuse per ottenere una parametrizzazione della curva di bordo. Con questi strumenti si classificano tutti i minimi globali del perimetro (ovvero i minimi definiti su tutto lo spazio \mathbb{R}^2) e si evidenzia come questi minimi *globali* hanno una sola singolarità (quando la *Wulff shape* è un quadrilatero) o al massimo due (quando la *Wulff shape* è un triangolo). In [5] si era già osservato che negli altri casi (*Wulff shape* diversa da quadrilatero o triangolo) non ci possono essere singolarità.

Successivamente (sempre in [6]) si studiano gli insiemi con curvatura assegnata costante. Nel caso euclideo (sempre per $n = 2$) è noto che la frontiera di insiemi siffatti è formata da archi di cerchio: un risultato analogo si ottiene in questo contesto anisotropo dove, al posto degli archi di cerchio si ottengono archi della frontiera della *Wulff shape*.

I risultati di regolarità ottenuti in [5] e [6] ci permettono in [7] di ottenere informazioni sui minimi locali del funzionale

$$F_\varphi(u) = \int_\Omega \varphi(Du)$$

dove φ è una norma (anche non strettamente convessa) e $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Lo studio di questo particolare funzionale può essere di un certo interesse in quanto è un caso (seppur molto particolare) in cui la funzione integranda non è strettamente convessa e ha crescita lineare e quindi gli usuali metodi del calcolo delle variazioni non si applicano. Nel caso in cui φ sia la norma euclidea questo funzionale è già stato studiato da Miranda ⁽⁷⁾ il quale ha messo in evidenza i forti legami con gli insiemi di perimetro minimo: i sottolivelli di un minimo u risultano infatti essere insiemi con frontiera minima. Miranda trova una condizione sul dato al bordo di u che garantisce l'esistenza di un minimo lipschitziano. Come conseguenza trova delle condizioni per garantire l'unicità delle superfici di area minima con un certo bordo fissato.

In [7] viene individuata una proprietà della norma φ detta *fatness* che garantisce che il bordo del sottografico dei minimi u di F_φ sia localmente, in un sistema di assi eventualmente ruotato, un grafico lipschitziano.

Equazioni di evoluzione

L'evoluzione per curvatura media di un insieme può essere considerata l'evoluzione, lungo la curva di massima discesa del funzionale perimetro. È noto infatti che calcolando la variazione prima del perimetro di un insieme regolare si ottiene la curvatura media della sua frontiera.

⁶ L. Ambrosio - V. Caselles - S. Masnou - J. M. Morel: "Connected components of sets of finite perimeter and applications to image processing" *Journal of EMS* 1999

⁷ M. Miranda: "Un teorema di esistenza e unicità per il problema dell'area minima in n variabili" *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa* 1965

Se si utilizza il perimetro cristallino al posto del perimetro euclideo si ottiene l'evoluzione per curvatura media anisotropa, che risulta essere strettamente legata ai fenomeni fisici di *crescita dei cristalli*.

In ⁽⁸⁾ si è scoperto che durante l'evoluzione di un poliedro le facce non sempre si muovono parallelamente a se stesse ma possono, in certi casi, incurvarsi (facendo uscire l'insieme dalla classe dei poliedri) o spezzarsi (facendo cambiare all'insieme il numero delle facce).

Il lavoro [3] presenta un algoritmo numerico, basato sul metodo degli elementi finiti, per determinare la posizione delle eventuali fratture nelle facce dei cristalli che si evolvono per curvatura media.

Un'altra particolarità nell'evoluzione dei cristalli è la possibilità che l'evoluzione della *Wulff shape* sia instabile ⁽⁹⁾. È ben noto che la *Wulff shape* evolve rimpicciolendosi ma rimanendo sempre simile a se stessa così come nel caso euclideo la sfera rimane tale durante l'evoluzione per curvatura media. Se si effettua un riscaldamento della superficie in modo che il volume rimanga costante durante l'evoluzione, si noterà come nel caso euclideo la forma della superficie tenda sempre a diventare una sfera anche se vengono effettuate piccole perturbazioni all'evoluzione. Nel caso cristallino può invece succedere che piccole perturbazioni del cristallo iniziale modifichino completamente l'esito dell'evoluzione, portando il cristallo a schiacciarsi in una o più direzioni.

In [11] si è implementato un algoritmo numerico che permette di decidere quali poliedri risultano stabili e quali no. L'evoluzione di un poliedro con N facce viene ricondotto ad un sistema di N equazioni differenziali ordinarie. La rinormalizzazione dell'evoluzione (a meno di traslazioni e omotetie) corrisponde ad una proiezione della soluzione $x(t) \in \mathbb{R}^N$ su una varietà $N - 4$ dimensionale in \mathbb{R}^N . Si osserva come la rinormalizzazione della soluzione sia a sua volta la soluzione di un sistema di equazioni differenziali ordinarie, che va studiato intorno ad un suo punto critico. Per fare questo il sistema viene linearizzato e viene calcolata la matrice corrispondente. I coefficienti di questa matrice vengono esplicitati in lunghe espressioni che coinvolgono i parametri della geometria della *Wulff shape*. Viene quindi implementato un algoritmo per il calcolo di questi parametri con i quali si può facilmente determinare la stabilità della *Wulff-Shape*.

In [12] viene studiato il *gradient-flow* del funzionale

$$\Phi(u) = \frac{1}{2} \int_0^1 \phi(u_x) dx$$

dove u è una funzione *BV* definita su $(0, 1)$ e

$$\phi(\xi) = \max\{\xi^2, 1\}.$$

Osserviamo che in generale i problemi di evoluzione per funzionali non convessi, possono portare a equazioni *malposte* come ad esempio l'equazione del calore *backward*. In questo caso l'equazione formale corrispondente è

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & \text{dove } |u_x| < 1 \\ u_y = 0 & \text{dove } |u_x| > 1. \end{cases} \quad (1)$$

L'equazione di evoluzione viene risolta mediante un metodo di discretizzazione spaziale, con il quale si scopre che l'evoluzione, pur soddisfacendo le equazioni (1), presenta un'evoluzione dell'interfaccia $|u_x| = 1$ che ci porta ad un problema di frontiera libera.

⁸ G. Bellettini - M. Novaga - M. Paolini: "Facet-breaking for three-dimensional crystals evolving by mean curvature" *Interfaces and Free Boundaries* 1999

⁹ M. Paolini - F. Pasquarelli: "Unstable Crystalline Wulff Shapes in 3D", *Proceedings Variational methods for discontinuous structures, Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications* 2002

Il determinante Jacobiano

Consideriamo il seguente funzionale (variazione totale) definito su mappe $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ dove $\Omega \subset \mathbb{R}^n$:

$$TV(u) = \int_{\Omega} |\det Du(x)| dx.$$

Questo funzionale è continuo sullo spazio di funzioni $W^{1,n}$ ma nelle applicazioni (ad esempio nella teoria dell'elasticità) è utile estendere il suo dominio a funzioni come $u(x) = x/|x|$ che stanno in $W^{1,p}$ per ogni $p < n$ ma non in $W^{1,n}$.

Una possibile estensione del funzionale $TV: W^{1,n} \rightarrow \mathbb{R}$ ad un funzionale $TV^p: W^{1,p} \rightarrow \mathbb{R}$ con $p < n$ si può dare per rilassamento:

$$TV^p(u) = \inf \left\{ \liminf_{k \rightarrow \infty} TV(u_k) : u_k \xrightarrow{W^{1,p}} u, u_k \in W^{1,n} \right\}.$$

In [8] vengono presentati alcuni risultati che permettono di calcolare il funzionale TV^p sulle mappe 1-omogenee. Questo lavoro trae ispirazione e si basa su un recente articolo di Fonseca, Fusco e Marcellini ⁽¹⁰⁾ dove il funzionale TV^p viene introdotto.

Data una funzione lipschitziana $\varphi: \partial\mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ consideriamo l'estensione 1-omogenea $u: \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$u_{\varphi}(x) = \varphi(x/|x|).$$

Mappe di questo tipo sono molto rilevanti in quanto sono il prototipo di mappe con singolarità isolate. In particolare in [8] viene calcolato TV^p (per $p \in (n-1, n)$) in due casi importanti.

Il primo caso è quello delle mappe u_{φ} con $\varphi(\partial\mathbb{B}^n) \subset \partial\mathbb{B}^n$: in questo caso si trova che

$$TV^p(u) = |\deg \varphi| \cdot |\mathbb{B}^n|$$

dove $\deg \varphi$ è il grado topologico della mappa $\varphi: \partial\mathbb{B}^n \rightarrow \partial\mathbb{B}^n$. Questo risultato era stato congetturato da Fonseca Fusco e Marcellini (i quali lo dimostrano nel caso $n = 2$).

Il secondo caso rilevante è quello della mappa $\bar{u} = u_{\bar{\varphi}}$ dove $\bar{\varphi}: \partial\mathbb{B}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ è una particolare curva che si avvolge lungo l'unione di due circonferenze tangenti l'una all'altra. Questa particolare funzione venne presa in considerazione in un importante articolo di Giaquinta, Modica e Souček ⁽¹¹⁾ dove viene mostrato (in un contesto leggermente diverso) che $TV^p(\bar{u}) > 0$. Fonseca Fusco e Marcellini dimostrano anche che $TV^p(\bar{u}) \leq 4\pi$. In [8] viene mostrato che $TV^p(\bar{u}) = 2\pi$ (questo risultato è stato trovato indipendentemente da Mucci ⁽¹²⁾). Viene anche presentato un metodo generale per il calcolo di $TV^p(u_{\varphi})$ da applicare quando φ è una qualunque curva del piano.

Reti ottimali di trasporto urbano, problema di Steiner

Il problema delle reti ottimali di trasporto urbano consiste nel trovare la disposizione ottimale di una rete di trasporto (pensiamo ad esempio alla linea di una metropolitana) in modo che ogni punto della città si trovi a breve distanza da un punto della rete.

Un modello molto semplice con cui si può schematizzare il problema è il seguente. Supponiamo che la densità di popolazione in una città sia rappresentato da una misura μ definita sul piano. La rete di trasporto viene rappresentata invece da un insieme compatto connesso $\Sigma \subset \mathbb{R}^2$ di lunghezza (misura di Hausdorff 1-dimensionale) finita. La distanza p -media della popolazione dalla linea di trasporto è data dal seguente funzionale

$$F_p(\Sigma) = \int (d(x, \Sigma))^p d\mu(x).$$

¹⁰Q. Fonseca- N. Fusco - P. Marcellini: "On Total Variation of the Jacobian", *Journal of Functional Analysis* 2004

¹¹M. Giaquinta - G. Modica - J. Souček: "Graphs of finite mass which cannot be approximated in area by smooth graphs" *Manuscripta Math.* 1993

¹²D. Mucci: "Remarks on the Total Variation of the Jacobian" *Nonlinear Differential Equations and Applications NoDEA* 2006

Supponendo che la spesa per la costruzione di una rete di trasporto Σ sia proporzionale a $\mathcal{H}^1(\Sigma)$ (la lunghezza di Σ) ed avendo a disposizione un *budget* sufficiente alla costruzione di una linea di lunghezza L , è sensato considerare come *ottimali* gli insiemi Σ che minimizzano F_p tra tutti gli insiemi compatti, connessi e di lunghezza minore o uguale ad L .

Questo problema è stato affrontato da G. Buttazzo e E. Stepanov ⁽¹³⁾ i quali trovano alcune proprietà possedute dagli insiemi ottimali Σ : l'insieme è topologicamente un albero (non contiene cicli), e in ogni vertice convengono al più tre curve diverse; inoltre l'insieme ottimale è *Ahlfors-regolare* (una nozione molto debole di regolarità) ed in particolare è uniformemente rettificabile.

In [9] vengono studiati i minimi del Γ -limite F_∞ dei funzionali F_p quando $p \rightarrow \infty$. È facile verificare che

$$F_\infty(\Sigma) = \inf_{x \in M} d(x, \Sigma)$$

dove M è il supporto della misura μ .

Un modello in cui si applica il funzionale F_p con $p = \infty$ è quello della distribuzione del gas. Se un comune vuole garantire ad ogni abitante la possibilità di avere un allacciamento alla rete del gas ad una distanza non superiore ad una distanza fissata r , il comune deve risolvere il problema di minimizzazione F_∞ rispetto all'insieme Σ dato dall'insieme delle utenze.

In [9] si dimostra l'esistenza dei minimi per il funzionale F_∞ e si dimostra che i minimi sono alberi topologici e sono Ahlfors regolari.

Nel caso planare $n = 2$ viene indagata la struttura dei minimi, che risultano essere composti da una parte *parallela* al dato M e da una parte che risulta essere un albero di Steiner.

Il *problema di Steiner* viene trattato in [20], [21] e [26]. Classicamente il problema di Steiner è quello di trovare il grafo di lunghezza minima che connette un insieme dato (finito) di punti. In [21] viene esposta una formulazione più generale, che comprende anche insiemi infiniti. Dato un insieme $A \subset X$, dove X è un generico spazio metrico, si considera il problema di trovare l'insieme S di misura $\mathcal{H}^1(S)$ minima tale che $A \cup S$ risulti essere connesso.

In [20] viene considerato il caso in cui A risulta essere un compatto numerabile in \mathbb{R}^n . In [21] viene trattato il caso generale, in cui si richiede che A sia solo compatto. In questa ipotesi (e con opportune ipotesi sullo spazio metrico X) si dimostra l'esistenza dei minimi. Inoltre si dimostra che i minimi S di lunghezza finita soddisfano diverse proprietà: ogni minimo è formato da una quantità al più numerabile di componenti connesse, ogni componente connessa ha lunghezza positiva, ed è connessa per archi. La parte di insieme $S \setminus A$ non contiene cicli e quindi risulta essere un albero topologico con punti estremali su A e con punti di taglio fuori da A . Inoltre il numero di punti di ramificazione è numerabile, e fissato qualunque $\varepsilon > 0$ solo un numero finito si trova a distanza maggiore di ε da A .

In [28] viene dato un esempio esplicito di una soluzione del problema di Steiner generalizzato che risulta essere un albero topologico con una quantità numerabile di punti di ramificazione e una quantità più che numerabile di punti terminali. In [26] viene data una esposizione divulgativa del problema di Steiner, in particolare viene proposta la dimostrazione classica (già ottenuta in ⁽¹⁴⁾ ma difficilmente reperibile in lingua inglese) del teorema di esistenza degli alberi di Steiner nel caso finito.

Mappe rigide

In [15], [16] e [17] si è preso in considerazione lo studio dell'inclusione differenziale con condizioni di Dirichlet

$$\begin{cases} Du \in O(n) & \text{in } \Omega \\ u = \phi & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

¹³G. Buttazzo - E. Stepanov: "Optimal transportation networks as free Dirichlet regions for the Monge-Kantorovich problem" *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.* 2003

¹⁴V. Jarník, M. Kössler: "O minimálních grafech, obsahujících n daných bodů", *Časopis pro pěstování matematiky a fyziky* 063.8 1934

dove u è una mappa lipschitziana definita su un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ a valori in \mathbb{R}^n e $O(n)$ è il gruppo delle matrici ortogonali. Esplicitando la condizione $Du \in O(n)$ come $Du^t Du = Id$ si nota come l'inclusione differenziale possa essere riscritta come un sistema di equazioni non lineari alle derivate parziali.

Il problema in questione è il prototipo delle *equazioni alle derivate parziali di tipo implicito* studiate in ⁽¹⁵⁾ e l'approccio utilizzato segue ⁽¹⁶⁾ nel trovare soluzioni esplicite a tale inclusione.

Osserviamo che l'inclusione $Du \in O(n)$ è la naturale estensione dell'equazione eiconale $|\nabla u| = 1$ al caso di mappe vettoriali. Le soluzioni di questa equazione vengono chiamate *mappe rigide* e viene messo in evidenza un chiaro legame con le costruzioni geometriche degli *origami* (l'antica arte giapponese di piegare la carta). In particolare vengono isolati dei risultati che ci permettono di ricostruire una mappa rigida a partire dal suo insieme singolare, ovvero dall'insieme Σ dei punti in cui u non è differenziabile. L'analogia con gli origami è data dal fatto che se Ω rappresenta un foglio di carta ($n = 2$ in questo caso), allora Σ rappresenta il diagramma delle pieghe sul foglio. Questo diagramma non può essere arbitrario, ma deve soddisfare alcune condizioni (tra cui la condizione di Kawasaki, nota nello studio degli origami) che si dimostrano essere sufficienti alla ricostruzione, unica, della mappa originale u .

In [15] viene costruito un esempio esplicito di soluzione nulla al bordo in un quadrato. In [16] viene studiato l'insieme singolare (il diagramma delle pieghe) e vengono mostrate condizioni necessarie e sufficienti per la costruzione delle soluzioni tramite l'insieme singolare. Viene quindi fatta una costruzione esplicita per una mappa rigida con dato lineare al bordo in un rettangolo e per una mappa rigida con dato al bordo nullo in un cubo. In [17] viene dato un esempio esplicito di mappa rigida nulla al bordo in un cubo n -dimensionale. In [19] viene considerato il problema più restrittivo di mappe rigide che a loro volta siano gradiente di una funzione scalare. Anche in questo caso viene identificata la condizione che deve soddisfare l'insieme singolare per ottenere soluzioni di tipo gradiente e vengono date soluzioni esplicite del problema.

L'articolo [22] è di tipo divulgativo: vengono raccolte diverse informazioni sulla matematica degli origami evidenziando gli aspetti algebrici, geometrici e analitici.

In [23] e [24] viene affrontato il problema del *doppio pozzo*

$$Du \in SO(n)A \cup SO(n)B$$

dove A e B sono matrici date. Vengono identificate condizioni su A e B per determinare se possono o meno esistere soluzioni con singolarità localmente finite e con dato al bordo nullo in opportune regioni del piano ($n = 2$). In [23] viene trattato il caso in cui almeno una delle due matrici sia invertibile: in tal caso vengono identificate le condizioni sui valori singolari di $B^{-1}A$ che garantiscono l'esistenza di soluzioni. Si osserva in particolare che la varietà di soluzioni di tipo "origami" è possibile solamente nel caso in cui $B^{-1}A$ sia ortogonale, mentre in tutti gli altri casi le soluzioni presenteranno laminazioni singole o doppie. In [24] si considera il caso in cui entrambe le matrici siano singolari.

Struttura delle correnti unidimensionali e flussi di misure in spazi metrici

Uno degli strumenti più importanti utilizzati in [13] (di cui abbiamo già parlato nella sezione sulle reti di trasporto) è la possibilità di decomporre una qualunque corrente normale 1-dimensionale T come un integrale di correnti $[[\theta]]$ associate a curve θ :

$$T = \int [[\theta]].$$

Questo può essere fatto senza perdita di massa, cioè in modo tale che valga anche

$$\|T\| = \int \ell(\theta)$$

¹⁵Dacorogna - Marcellini *Implicit Partial Differential Equations*, Birkhasuer, 1999.

¹⁶Cellina - Perrotta: *On a problem of potential wells* **J. Convex. Anal.** 1995.

dove $\|T\|$ è la massa della corrente T e $\ell(\theta)$ è la lunghezza della curva θ . Questo risultato fornisce in effetti una dimostrazione alternativa del teorema di decomposizione di Smirnov (¹⁷).

Smirnov dimostra il suo risultato di decomposizione considerando innanzitutto correnti senza bordo (solenoidi). La corrente viene vista come un campo vettoriale nello spazio euclideo, e viene decomposta utilizzando le curve integrali di tale campo vettoriale dopo un opportuno procedimento di regolarizzazione. Il risultato viene poi esteso a tutte le correnti (anche con bordo) con un procedimento di estensione della corrente in dimensione superiore.

Al contrario, il metodo utilizzato in [13] si basa sull'approssimazione poliedrale delle correnti acicliche, senza utilizzare le curve integrali associate al campo vettoriale. Grazie a questo in [25] è stato quindi possibile estendere il risultato di decomposizione alle correnti normali acicliche in spazi metrici. Successivamente in [27] il risultato è stato esteso alle correnti cicliche con un procedimento di estensione opposto a quello utilizzato da Smirnov. In tal modo si è ottenuta una estensione completa del teorema di Smirnov a spazi metrici.

Questo risultato astratto ha permesso poi in [30] di dare senso e risolvere l'equazione di continuità di spazi metrici. Infatti le correnti metriche possono essere interpretate come campi vettoriali, e le curve della decomposizione rappresentano quindi le curve integrali del campo vettoriale.

Cluster minimi

Siano date N regioni $\mathbf{E} = (E_1, \dots, E_N)$ a due a due disgiunte in \mathbb{R}^n . Fissati i volumi

$$(|E_1|, \dots, |E_n|) = \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$$

siamo interessati a determinare la configurazione che produce il minimo perimetro:

$$P(\mathbf{E}) = \frac{1}{2} \left[\sum_{k=1}^N P(E_k) + P\left(\bigcup_{k=1}^N E_k\right) \right].$$

Questo rappresenta l'area totale della superficie di interfaccia tra le diverse regioni, contando una sola volta l'interfaccia comune tra due regioni.

In generale è ben noto che un cluster minimo esiste sempre. Ci si chiede se è vero che le regioni che compongono un cluster minimo sono sempre connesse.

Nel caso $N = 1$ di una singola regione, il problema non è altro che il ben noto problema isoperimetrico. In tal caso il minimo è la palla di volume assegnato.

Nel caso $N = 2$ è stato dimostrato che il minimo è una *doppia bolla* e in particolare la soluzione (unica a meno di isometrie) è formata da due regioni connesse delimitate tra tre porzioni di semisfere con raggi opportuni.

Nel caso $N = 3$ la soluzione è nota per il caso planare $n = 2$. Il minimo è una *tripla bolla* in cui le regioni sono delimitate da sei archi di cerchio con raggi opportuni. Anche in questo caso risulta che le tre regioni debbano essere connesse.

Il caso $N = 4$, $n = 2$ (cluster quadrupli planari) è stato affrontato nei lavori [32] e [33] nel caso particolare in cui le quattro aree assegnate siano uguali. In tal caso in [32] è stato dimostrato che le regioni che compongono ogni minimo sono tutte connesse e sono delimitate da 9 archi di circonferenza in una particolare disposizione. In [33] è stato dimostrato che il minimo è unico (a meno di isometrie) ed è stata identificata la soluzione.

Pisa, 8 febbraio 2020

Emanuele Paolini

¹⁷S.K. Smirnov *Decomposition of solenoidal vector charges into elementary solenoids and the structure of normal one-dimensional currents*. St. Petersburg Math. J. 1994