Analisi Matematica I, Ingegneria (A.A. 2018/2019)
Esercizi svolti e da svolgere

* ———————————————————————— *

Assiomi relativi alle operazioni in $\mathbb{N}$

Assioma 0.1.

$$(a+b)+c = a+(b+c), (a.b)c = a.(b.c)$$

(proprieta associativa)

Assioma 0.2.

$$a+b = b+a, a.b = b.a$$

(proprieta commutativa)

Assioma 0.3.

$$a+0 = a, a.1 = a$$

(esistenza degli elementi neutri)

Assioma 0.4.

$$a.(b+c) = a.b + a.c$$

(proroprietá distributiva)

Assiomi relativi all'ordinamento in $\mathbb{N}$

Assioma 0.5. $a \le b$ *oppure* $b \le a$ *(proprieta dicotomia)*

Assioma 0.6. $a \le b$ *e* $b \le c$ *implica* $a \le c$

Assioma 0.7. *Se* $a \le b$ *e* $b \le a$ *allora* $a = b$

Assioma 0.8. *Se* $a \le b$ *allora* $a + c \le b + c$

Assioma 0.9. *Se* $0 \le a$ *e* $0 \le b$ *allora* $0 \le a + b$ *e* $0 \le a.b$

Assiomi relativi alle operazioni in $\mathbb{Z}$

Assioma 0.1, Assioma 0.2 , Assioma 0.3, Assioma 0.4 e

Assioma 0.10. *Per ogni* a *esiste unico elemento indicato con* $-a$ *tale che* $a + (-a) = 0$

Assiomi relativi alle operazioni in $\mathbb{Q}$

Assioma 0.1, Assioma 0.2 , Assioma 0.3, , Assioma 0.4, Assioma 0.10 e

Assioma 0.11. *Per ogni* $a \neq 0$ *esiste unico elemento indicato con* a^{-1} *tale che* $a.a^{-1} = 1$

Proprieta' di Archimede

Se $x, y > 0$ alora esiste un numero naturale $n \in \mathbb{N}$, tale che

$$xn \ge y.$$

Proprieta' di completezza dei numeri reali.

Se A e' un insieme non vuoto di numeri reali limitato superiormente allora esiste estremo superiore di A.

Operazioni con numeri reali

$$x^m x^n = x^{m+n}, x \in \mathbb{R},\ m,n \in \mathbb{N}. \quad \frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}, x \in \mathbb{R},\ m \geq n \in \mathbb{N}.$$

$$x^m y^m = (xy)^m, x, y \in \mathbb{R},\ m,n \in \mathbb{N}. \quad x^{-n} = \frac{1}{x^n}, x \in \mathbb{R} \backslash 0, n \in \mathbb{N},\ x^0 = 1 \text{ per } x > 0.$$

$$x^m x^n = x^{m+n}, \frac{x^m}{x^n} = x^{m-n} x > 0,\ m,n \in \mathbb{Z}. \quad \sqrt[n]{x} = y \Leftrightarrow x = y^n \quad \text{per } n \geq 2 \text{ pari } x \geq 0.$$

$$\sqrt[n]{x} = y \Leftrightarrow x = y^n \quad \text{per } n \geq 2 \text{ dispari } x \in \mathbb{R}.\ x^p = x^{m/n} = \sqrt[n]{x^m}, x^{-m/n} = \frac{1}{x^{m/n}} \ p = m/n \in \mathbb{Q}.$$

$$x^p x^q = x^{p+q}, x > 0,\ p,q \in \mathbb{Q}. \quad \frac{x^p}{x^q} = x^{p-q}, x > 0,\ p,q \in \mathbb{Q}.$$

$$x^p y^p = (xy)^p, x, y > 0,\ p \in \mathbb{Q}. \quad \frac{x^p}{y^p} = \left(\frac{x^p}{y^p}\right) x, y > 0,\ p \in \mathbb{Q}.$$

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0; \\ -x, & \text{altrimenti.} \end{cases} \tag{1}$$

$$\sqrt[2]{x^2} = |x|,\ \sqrt[3]{x^3} = x \quad , \sqrt[2k]{x^{2k}} = |x| x \in \mathbb{R}. \quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}.$$

1. Equazioni e disuguaglianze lineari

1.1. **Equazioni lineari.**

Problema 1.1. *Risolvere l'equazione*

$$Ax = B,$$

in $\mathbb{R}$. *Qui* $A, B \in \mathbb{R}$ *sono parametri.*

Soluzione: I caso: Se $A \neq 0$, l'equazione ha unica soluzione $x = B/A$ per ogni $B \in \mathbb{R}$.

II caso: $A = 0$, abbiamo l'equazione $0x = B$.

Se $B = 0$ abbiamo $0x = 0$ e ogni $x \in \mathbb{R}$ é soluzione.

Se $B \neq 0$ abbiamo $0x = B \neq 0$ e l'equazione non ha soluzioni.

Problema 1.2. *Risolvere le seguente equazioni in* $\mathbb{R}$, *dove* x, y, z, u *sono incogniti e* $a, b, n, k \in \mathbb{R}$ *sono parametri.*

$$a) \quad (x-3)^3 + 1 = (x-3)(x^2+3x+9) - 9x(x-3),$$

$$b) \quad \frac{5x+2}{42} - \frac{5(x-8)}{36} = \frac{9}{14},$$

$$c) \quad 2\frac{2}{9}\left(\frac{x-3}{2} + \frac{3}{8}\right) - 3\frac{1}{4}\left(\frac{x}{9} - \frac{9}{26}\right) = \frac{6x-11}{8},$$

$$d) \quad \frac{(u-1)^2}{9} - \left(\frac{u+1}{3}\right)^2 = 1 - u,$$

$$e) \quad \frac{2z-9}{-6} - z = \frac{9-z}{10} + \frac{5z+3}{-15},$$

$$f)\quad \frac{3x-4}{0,2}+\frac{x-3}{1,4}=\frac{1+2x}{0,12},$$

$$g)\quad \frac{(x+\frac{1}{2})^2}{2}-\frac{(1\frac{1}{2}-2x)^2+\frac{1}{8}}{3}-1=\frac{16x-5x^2}{6},$$

$$h)\quad \frac{x-\frac{x-\frac{x-2}{5}}{5}}{5}=2,$$

$$i)\quad \frac{\frac{12x-13}{20}-\frac{3x+2}{5}}{2}=\frac{x+1}{0,4}+\frac{x+9}{-8},$$

$$j)\quad 3^6(x+3^5)=-3^{13},$$

$$k)\quad (24^3-16^2.54)y+37.6^4=-23.6^4,$$

$$l)\quad \frac{12^5.y-13.12^4}{3^4.2^8}=11,$$

$$m)\quad 5kx-2k=5-x,$$

$$n)\quad 2n(nx-5)=6n-3x,$$

$$o)\quad (a+2)x=a^3+8,$$

$$p)\quad 4ay-5b=5+7y,$$

Risp. a) $x\in\emptyset$; b) $x=26$; c) ogni $x\in\mathbb{R}$; d) $u=1,8$; e) $z=8/9$; f) $x=-32$; g) $x=-10$; h) $x=12,$; i) $x=-0,8$; j) $x=-10.3^5$; k) $y\in\emptyset$; l) $y=2$;

$$m)\begin{cases} x=(2k+5)/(5k+1), & \text{se } k\neq -1/5;\\ x\in\emptyset, & \text{se } k=-1/5;\end{cases}$$

n) $x=16n/(2n^2+3)$;

$$o)\begin{cases} x=a^2-2a+4, & \text{se } a\neq -2;\\ x\in\mathbb{R}, & \text{se } a=-2;\end{cases}$$

$$p)\begin{cases} y=(5b+5)/(4a-7), & \text{se } a\neq 7/4, b\in\mathbb{R};\\ y\in\mathbb{R}, & \text{se } a=7/4, b=-1;\\ y\in\emptyset, & \text{se } a=7/4, b\neq -1.\end{cases}$$

1.2. **Disuguaglianze lineari.**

Problema 1.3. *Risolvere le disuguaglianze*

$$a)\quad Ax < B,$$

$$b)\quad Ax \le B,$$

$$c)\quad Ax > B,$$

$$d)\quad Ax \ge B,$$

in $\mathbb{R}$. *Qui* $A, B \in \mathbb{R}$ *sono parametri.*

Soluzione a) $Ax < B$ **:** Caso I: $A > 0$, la soluzione é $x < B/A$.
Caso II: $A < 0$, la soluzione é $x > B/A$.
Caso III: $A = 0$, abbiamo $0x < B$. Se $B \le 0$, allora $x \in \emptyset$. Se $B > 0$, alora ogni $x \in \mathbb{R}$ é soluzione.
Soluzione d) $Ax \ge B$**:** Caso I: $A > 0$, la soluzione é $x \ge B/A$.
Caso II: $A < 0$, la soluzione é $x \le B/A$.
Caso III: $A = 0$, abbiamo $0x \ge B$. Se $B > 0$, allora $x \in \emptyset$. Se $B \le 0$, alora ogni $x \in \mathbb{R}$ é soluzione.

Problema 1.4. *Risolvere le seguente disuguaglianze in* $\mathbb{R}$, *dove* x, y, z, u *sono incogniti e* $a, b, c \in \mathbb{R}$ *sono parametri*

$$a)\quad x + (3x-1)(9x^2+3x+1) - (x-2)(x+2) > 4(7x^3+1) - x^2(x+1),$$

$$b)\quad (4x-5)^2 - (4x+3)(4x-3) + 9x \le 9(x-9) + 35,$$

$$c)\quad \frac{2z+15}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{3+3z}{2} + 1 + z\right) \le \frac{3z+2}{4} + z,$$

$$d)\quad \frac{5x+2}{3} - 2(x+1) < \frac{-2x+7}{6},$$

$$e)\quad \frac{3u+4}{4} - \frac{-u}{-8} \ge \frac{5u-1}{6} - \frac{17-u}{-12},$$

$$f)\quad \frac{(x-\frac{1}{3})^2}{2} - \frac{(\frac{1}{4}-2x)^2 + \frac{1}{16}}{3} \le \frac{5(x+2)(2-x)}{6},$$

$$g)\quad \frac{x^3+1}{5} + \frac{x^2(1-2x)}{10} > \frac{x(2x-6)}{20} + \frac{3x+2}{10},$$

$$h)\quad \frac{3(1,2-1,5z)}{0,1} - \frac{3+7z}{0,04} > \frac{4,83+z}{0,03},$$

$$i)\quad \frac{10x-4}{0,6} - \frac{x+14}{0,2} < \frac{2x-32}{0,8},$$

$$j)\quad x^3 - 1 - x(x^2-3) + 6 \ge 3(x-2),$$

$$k)\quad \frac{0,9-4y}{0,6} + \frac{3y-1,3}{2} \le \frac{0,4-5y}{-0,3},$$

$$l) \quad \frac{5x-2}{4,5} - 10 < \frac{23-2x}{1\frac{1}{4}} - \frac{11x+1}{1\frac{4}{5}} + 7,$$

$$m) \quad 5(x-1)^2 + 1 \geq (5x-1)^2 - 5(2x+4)(2x-4),$$

$$n) \quad \frac{x+1}{\frac{2}{9}} - (x+1) - \frac{2-x}{7} \geq 36,$$

$$o) \quad \sqrt{3}x - 2 \leq 2x - \sqrt{3},$$

$$p) \quad (a-1)x > a^2 + a - 2,$$

$$q) \quad (b-3)^2 y \geq (b-3)(a+1),$$

$$r) \quad (a-b)x > 2a + b - 3c.$$

Risp. a) $x \in (1; \infty)$; b) $x \in [2; \infty)$; c) $z \in [23/8; +\infty)$; d) $x \in \mathbb{R}$; e) $u \in (-\infty, 2]$; f)$x \in \mathbb{R}$; g) $x \in \emptyset$; h) $z \in (-\infty; -15/19)$; i) $x \in (-\infty; 4)$; j) $x \in \mathbb{R}$; k) $y \in [0,1; +\infty)$; l) $x \in (-\infty; 4)$; m) $x \in \emptyset$; n) $x \in [9; +\infty)$; o) $x \in [-1; +\infty)$;

$$p) \begin{cases} x > a+2, & \text{se } a > 1; \\ x < a+2, & \text{se } a < 1; \\ x \in \emptyset, & \text{se } a = 1; \end{cases}$$

$$q) \begin{cases} y \geq \frac{a+1}{b-3}, & \text{se } b \neq 3, a \in \mathbb{R}; \\ y \in \mathbb{R}, & \text{se } b = 3, a \in \mathbb{R}; \end{cases}$$

$$r) \begin{cases} x > \frac{2a+b-3c}{a-b}, & \text{se } a > b, a, b, c \in \mathbb{R}; \\ x < \frac{2a+b-3c}{a-b}, & \text{se } a < b, a, b, c \in \mathbb{R}; \\ x \in \emptyset, & \text{se } a = b, a \geq c \ a, b, c \in \mathbb{R}; \\ x \in \mathbb{R}, & \text{se } a = b, a < c \ a, b, c \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Soluzione e). La disequazione è

$$\frac{3u+4}{4} - \frac{-u}{-8} \geq \frac{5u-1}{6} - \frac{17-u}{-12},$$

e quindi

$$\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{8} - \frac{5}{6} + \frac{1}{12}\right) u \geq -1 - \frac{1}{6} + \frac{17}{12},$$

$$\frac{18-3-20+2}{24} u \geq \frac{-12-2+17}{12} \iff u \leq -2.$$

□

Problema 1.5. *Trovare la somma di tutti numeri naturali in* $\mathbb{N}$*, che sono soluzioni della disuguaglianza*

$$x\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right) - \frac{1}{3}\left(x^2 - 15\frac{2}{9}\right) > \left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x^2 + \frac{x}{3} + \frac{1}{9}\right) - \frac{1}{3}(x-1)^2.$$

Risp. $x \in (-\infty; 7)$, la somma é $1+2+3+4+5+6 = 21$.

Problema 1.6. *Verificare che il piu' grande numero in $\mathbb{Z}$ che é soluzione della disuguaglianza*

$$a) \quad 5(x-0,4)^2 - (2x+1)(3x-0,1) \geq 0,04(14-25x^2)$$

non é soluzione della disuguaglianza

$$b) \quad (-3-5x)^2 - \frac{(10x-1)^2}{4} < 2 - \frac{35x-2}{4}.$$

Risp. a) $x \in (-\infty, 1/20], x = 0$, b) $x \in (-\infty; -1/7)$.

Problema 1.7. *Risolvere la disuguaglianza*

$$\frac{x(x-5)}{4} - 2 > \frac{3x(x+1)}{2} - \frac{5x^2}{4}$$

e torvare il piú grande intero del tipo $2k, k \in \mathbb{Z}$ che é una soluzione di questa disuguaglianza. Vedere se il numero

$$a = -\frac{2^4.4^3}{22.2^2.(-4)^2}$$

é una soluzione della disuguaglianza.

Risp. $x \in (-\infty, -8/11)$, il piú grande numero che é soluzione é -2. Il numero $a = -8/11$ non e' soluzione della disuguaglianza.

Problema 1.8. *Risolvere la disuguaglianza*

$$\frac{5(x^2-1)}{4} - \frac{(x+1)(x-7)}{20} - \frac{6x(x-2)}{5} < 0,$$

e torvare il piú piccolo intero del tipo $k, k \in \mathbb{Z}$ che non é soluzione di questa disuguaglianza. Vedere se il numero

$$b = \frac{3^{m+2} + 72.3^m}{27.3^{m+1}}, \quad m \in \mathbb{N},$$

é una soluzione della disuguaglianza.

Risp. $x \in (-\infty; 1/3)$, il piú piccolo intero che non é soluzione é 1. Il numero $b = 1$ non é soluzione.

2. Equazioni e disuguaglianze di secondo grado

2.1. **Equazioni di secondo grado.** Eduazione di II grado é l'equazione del tipo

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

dove $a \neq 0, a, b, c \in \mathbb{R}$ sono parametri.

Problema 2.1. *Risolvere le seguenti equazioni nell'incognitá $x \in \mathbb{R}$*

a) $ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0$; *b)* $ax^2 + bx = 0,\ a \neq 0$; *c)* $ax^2 + c = 0,\ a \neq 0$.

Soluzione a) $ax^2 + bx + c = 0$: Sia

$$D = b^2 - 4ac$$

il discriminate dell'equazione. Le soluzioni sono

(1) $x_{1,2} = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$ se $D > 0$;
(2) $x_1 = x = 2 = -\frac{b}{2a}$ se $D = 0$;
(3) $x \in \emptyset$ se $D < 0$.

Soluzione b) $ax^2 + bx = 0$**:** Rescriviamo l'equazione nella forma $x(ax+b) = 0$. Ne segue che le soluzioni sono $x_1 = 0$ e $x_2 = -b/2a$.

Soluzione c) $ax^2 + c = 0$**:** Rescriviamo l'equazione nella forma $x^2 = -c/a$. Le soluzioni sono

(1) $x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$ se $-c/a \geq 0$;
(2) $x \in \emptyset$ se $-c/a < 0$.

Problema 2.2. *Risolvere le seguenti equazioni in* $\mathbb{R}$

$$a)\quad (1-\sqrt{6})x = x^2, \quad b)\quad (x+4)2x = \sqrt{6}.x, \quad c)\ 3y^2 - 2 = \sqrt{3},$$

$$d)\ y^2 + 2 = \sqrt{2}, \quad e)\ \frac{x^2 - 1,5}{\sqrt{2}} + \frac{x^2}{\sqrt{8}} = 1\frac{1}{2}, \quad f)\ \ 5x^2 - 2x - 3 = 0,$$

$$g)\ \ 4x^2 - 17x - 15 = 0, \quad h)\ \ -2x^2 - x - 1, \quad i)\ \ x^2 - 3x + 0,75 = 0,$$

$$j)\ \ x^2 - 4\frac{1}{2}x + 4\frac{1}{2} = 0, \quad k)\ \ 2y^2 - y + \sqrt{2} = 0, \quad \ell)\ 8x - 5 - 3x^2 = 0,$$

$$m)\quad -3x^2 - \sqrt{2}x + \sqrt{5} = 0, \quad n)\ \sqrt{3} - \sqrt{5}x - 2x^2 = 0, \quad o)\ \ x^2 + \sqrt{3}x + 1 - \sqrt{3} = 0,$$

$$p)\ \ 2u^2 + (1+\sqrt{2})u - \sqrt{2} = 0, \quad q)\ \ 3t^2 - (\sqrt{6}+1)t + 1 = 0, \quad r)\ \ 4t^2 + 4t + 1 = 0,$$

$$s)\ \ t^2 + 2\sqrt{2}t + 2 = 0, \quad t)\ \ \frac{\sqrt{27}y^2 - \sqrt{3}}{\sqrt{2}} - \frac{y}{\sqrt{3}} = 0, \quad u)x^2 - (6+\sqrt{3})x + 6\sqrt{3} = 0,$$

$$v)\quad x^2 + (5 - \sqrt{10}x - 5\sqrt{10} = 0, \quad w)\ \ x^2 - (2a+1)x + a^2 + a - 6 = 0,$$

$$ii)\quad ay^2 - (a^2-1)y - a = 0,\ a \neq 0, \qquad pp)\ \ (a-1)x^2 - 6ax + 9a - 1 = 0.$$

Risp. a) $x_1 = 0$ e $x_2 = 1 - \sqrt{6}$; b) $x_1 = 0$ e $x_2 = \sqrt{3/2} - 4$; c) $y_{1,2} = \pm\sqrt{(\sqrt{3}+2)/3}$; d) $x \in \emptyset$; e) $x_{1,2} = \pm\sqrt{\sqrt{2}+1}$; f) $x_1 = 1$ e $x_2 = -0,6$; g) $x_1 = 5$ e $x_2 = -3/4$; h) $x_1 = -1$ e $x_2 = -0,5$; i) $x_{1,2} = (3 \pm \sqrt{6})/2$; j) $x_1 = 3$ e $x_2 = 1,5$; k) $x \in \emptyset$; $\ell)x_1 = 1$ e $x_2 = 5/3$; m) $x_{1,2} = (-\sqrt{2} \pm \sqrt{12\sqrt{5}+2})/6$; n) $x_{1,2} = (-\sqrt{5} \pm \sqrt{8\sqrt{3}+5})/4$; o) $x_{1,2} = (-\sqrt{3} \pm \sqrt{4\sqrt{3}-1})/2$; p) $u_{1,2} = (-(1+\sqrt{2}) \pm \sqrt{10\sqrt{2}+3})/4$; q) $t \in \emptyset$; r) $t_{1,2} = -1/2$; s) $t_{1,2} = -\sqrt{2}$; t) $y_{1,2} = \frac{\sqrt{2}\pm\sqrt{110}}{18}$; u) $x_1 = 6$ e $x_2 = \sqrt{3}$, v) $x_1 = \sqrt{10}$ e $x_1 = -5$; w) $x_1 = a+3$ e $x_2 = a-2$; ii) $x_1 = a$ e $x_2 = 1/a$;

$$pp)\begin{cases} x \in \emptyset, & \text{se } a \in (-\infty; 1/10); \\ x_{1,2} = (3a \pm \sqrt{10a-1})/(a-1), & \text{se } a \in [1/10; 1) \cup (1, +\infty); \\ x = 4/3, & \text{se } a = 1. \end{cases}$$

Problema 2.3. *Come si possono decomporre i seguenti polinomi in* $\mathbb{R}$

$$a)\ \ ax^2 + bx + c, a, b, c \neq 0, \quad b)ax^2 + bx, \quad a, b \neq 0, \quad c)ax^2 - c, \quad a, c \neq 0.$$

Soluzione a) $ax^2 + bx + c$**:** Se $D = b^2 - 4ac > 0$ abbiamo

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2), \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}.$$

Se $D = 0$ abbiamo

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2, \quad x_1 = \frac{-b}{2a}.$$

Se $D < 0$ il polinomio é irreducibile.

Soluzione b) $ax^2 + bx$**:** Abbiamo $ax^2 + bx = x(ax + b)$.

Soluzione c) $ax^2 - c$**:**

$$ax^2 - c = \begin{cases} (\sqrt{a}x + \sqrt{c})(\sqrt{a}x - \sqrt{c}), & \text{se } a > 0, c > 0; \\ -(\sqrt{-a}x + \sqrt{-c})(\sqrt{-a}x - \sqrt{-c}), & \text{se } a < 0, c < 0; \\ \textit{irreducibile}, & \text{se } ac < 0. \end{cases}$$

Problema 2.4. *Come si possono decomporre i seguenti polinomi in* $\mathbb{R}$

$$a)\ \ 5x^2 - \sqrt{3}x;\ \ b)2x^2 - 7;\ \ c)\ \ -3x^2 - 1;\ \ d)\ \ x^2 - 5x + 6;$$

$$e)\ \ -x^2 - x + 20;\ \ ,f)\ \ 2x^2 + 5x - 3;\ \ g) - 5y^2 + 14y + 3;\ \ h)\ \ -2x^2 - x + 5;$$

$$i)\ \ 4x - 4x^2 - 1;\ \ j)\frac{1}{9}x^2 + \frac{4}{3}x + 4;\ \ k)\ \ 4 - x - x^2;\ \ \ell)\ \ -x^2 + (3 - \sqrt{2})x + 3\sqrt{2};$$

$$m)\ \ x^2 + 3\sqrt{2}x + 5;\ \ \ n)\ \ -5x^2 + x - 1;\ \ o)\ \ y^3 - 2y - 15y.$$

Risp. a)$x(\sqrt{5}x - 3)$; b) $(\sqrt{2}x + \sqrt{7})(\sqrt{2}x - \sqrt{7})$ c) irredducibile; d) $(x-3)(x-2)$; e) $(4-x)(x+5)$; f) $(2x-1)(x+3)$; g) $(3-y)(5y+1)$; h) $-2(x+(1-\sqrt{41})/4)(x+(1+\sqrt{41})/4)$; i) $-2(x-1)^2$; j) $(2+x/3)^2$; k) $-(x+(1-\sqrt{17})/2)(x+(1+\sqrt{17})/2)$; ℓ)$(3-x)(x+\sqrt{2})$; m) non si puo decomporre; n) non si puo decomporre; o) $y(y+3)(y-5)$.

2.2. **Disequazioni di secondo grado** $ax^2 + bx + c \lesseqqgtr 0,\ a \neq 0, a, b, c \in \mathbb{R}$..

Problema 2.5. *Risolvere in* $\mathbb{R}$ *le seguente disequazioni*

$$a)\ \ ax^2+bx+c > 0,\ \ b)\ \ ax^2+bx+c \geq 0,\ \ c)\ \ ax^2+bx+c < 0,\ \ d)\ \ ax^2+bx+c \leq 0.$$

Soggerimento: Sia

$$D = b^2 - 4ac.$$

Per il caso $a > 0$ poniamo

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a},\ \ x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$$

quando $D \geq 0$.Abbiamo $x_1 \leq x_2$ e la Fig. 1. Le soluzioni sono dati nella tabella 1.

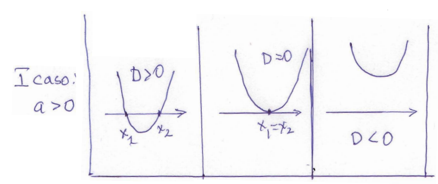

FIGURE 1. *Il caso* $a > 0$.

Per il caso $a < 0$ poniamo

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a},\ \ x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$$

quando $D \geq 0$.Abbiamo $x_1 \leq x_2$ e la Fig. 2. Le soluzioni sono dati nella tabella 2.

Problema 2.6. *Risolvere in* $\mathbb{R}$ *le seguente disequazioni*

$$a)\ \ x^2 \geq 0;\ \ b)x^2 > 0;\ \ c)x^2 < 0;\ \ d)x^2 \leq 0;\ \ e)2x^2 + x - 1 \geq 0,$$

$$f)\ \ -5x^2 < -2;$$

I caso: $a > 0$	$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
$ax^2 + bx + c > 0$	$x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$	$x \in (-\infty; x_1) \cup (x_1; +\infty)$	$x \in \mathbb{R}$
$ax^2 + bx + c \geq 0$	$x \in (-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty)$	$x \in \mathbb{R}$	$x \in \mathbb{R}$
$ax^2 + bx + c < 0$	$x \in (x_1; x_2)$	$x \in \emptyset$	$x \in \emptyset$
$ax^2 + bx + c \leq 0$	$x \in [x_1; x_2]$	$x = x_1$	$x \in \emptyset$

TABLE 1. Il caso $a > 0$.

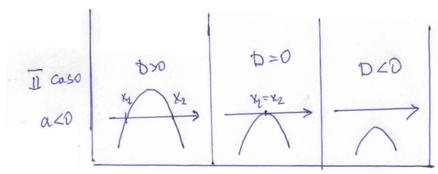

FIGURE 2. *Il caso $a < 0$.*

II caso: $a < 0$	$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
$ax^2 + bx + c > 0$	$x \in (x_1; x_2)$	$x \in \emptyset$	$x \in \emptyset$
$ax^2 + bx + c \geq 0$	$x \in [x_1; x_2]$	$x = x_1$	$x \in \emptyset$
$ax^2 + bx + c < 0$	$x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$	$x \in (-\infty; x_1) \cup (x_1; +\infty)$	$x \in \mathbb{R}$
$ax^2 + bx + c \leq 0$	$x \in (-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty)$	$x \in \mathbb{R}$	$x \in \mathbb{R}$

TABLE 2. Il caso $a > 0$.

3. Equazioni e disuguaglianze:

Problema 3.1. *Risolvere le equazioni*

$$a)\quad 15x^3 + x^2 - 2x = 0,$$

$$b)\quad x^3 + 2x^4 + 4x^2 + 2 + x = 0,$$
$$c)\quad (1 + x^2)^2 = 4|x|(1 - x^2),$$
$$d)\quad ||3x - 1| - 5| = 2,$$
$$e)\quad ||3|x| - 1| - 5| = 2,$$

Soluzione del punto d). Abbiamo la proprietà

$$|A| = b \text{ con } b \geq 0 \text{ significa } A = \pm b. \tag{2}$$

Quindi léquazione in d) implica

$$|3x - 1| - 5 = 2 \iff |3x - 5| = 7 \tag{3}$$

o

$$|3x - 1| - 5 = -2 \iff |3x - 5| = 3 \tag{4}$$

Per (3) applichiamo la proprietà (2) e deduciamo

$$|3x - 5| = 7 \iff 3x - 5 = \pm 7 \iff x = 4, x = \frac{2}{3} \tag{5}$$

Per (4) applichiamo la proprietà (2) e deduciamo

$$|3x-5| = 3 \iff 3x-5 = \pm 3 \iff x = \frac{2}{3}, x = \frac{8}{3} \tag{6}$$

Tutte le soluzioni sono

$$x = 4, x = \frac{2}{3}, x = \frac{8}{3}.$$

□

Problema 3.2. *Trovare p, q tale che le radici dell'equazione*

$$x^2 + px + q = 0$$

sono p e q.

Soluzione. Abbiamo il sistema

$$p + q = -p,$$
$$pq = q.$$

Se $q = 0$ allora $p = 0$. Se $q \neq 0$, allora $p = 1$ e $q = -2$. □

Problema 3.3. *Per l'equazione*

$$x^2 + px + 12 = 0$$

sappiamo che le due radici x_1, x_2 soddisfano $x_1 - x_2 = 1$. Trovare p.

Soluzione. Abbiamo

$$x_1 + x_2 = -p$$
$$x_1 - x_2 = 1$$

e quindi

$$x_1 = \frac{1-p}{2}, \ x_2 = -\frac{1+p}{2}.$$

L'identitá di Viet $x_1 x_2 = 12$ implica

$$\frac{1-p}{2}\left(-\frac{1+p}{2}\right) = 12 \iff 1 - p^2 = -48$$

e quindi $p = \pm 7$. □

In alcuni casi si chiede di trovare la condizione sufficiente e necessaria tale che le due radici del'equazione

$$P(x) = 0, P(x) = ax^2 + bx + c \tag{7}$$

sono due numeri reali x_1, x_2 e soddisfano $x_1, x_2 \leq A$. Piu precisamente noi cerchiamo condizione che utilizza i coefficienti a, b, c nella equazione (7).

Abbiamo la seguente proprietà.

Lemma 3.1. *Sia A numero reale e $P(x) = ax^2 + bx + c$. La condizione sufficiente e necessaria tale che le due radici del'equazione $P(x) = 0$ sono due numeri reali x_1, x_2 e soddisfano $x_1 \leq A$ e $x_2 \leq A$ e data del sistema*

$$\begin{aligned} &b^2 - 4ac \geq 0 \\ &x_1 + x_2 \leq 2A \\ &aP(A) \geq 0. \end{aligned} \tag{8}$$

Ci sono varianti della stessa proporietá.

Lemma 3.2. *Sia A numero reale e $P(x) = ax^2 + bx + c$. La condizione sufficiente e necessaria tale che le due radici del'equazione $P(x) = 0$ sono due numeri reali x_1, x_2 e soddisfano $x_1 > A$ e $x_2 > A$ e data del sistema*

$$\begin{aligned} &b^2 - 4ac \geq 0 \\ &x_1 + x_2 > 2A \\ &aP(A) > 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Problema 3.4. *Trovare per quali valori del parametro m l'equazione*

$$mx^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0,$$

ha due radici nel intervallo $(-2, 4)$.

Problema 3.5. *Trovare per quali valori del parametro $m \geq 0$ l'equazione*

$$x^2 - (1 - m^2)x - m = 0,$$

ha due radici nel intervallo $[-2, 2]$.

Soluzione. Sia x_1, x_2 due radici di

$$P(x) = 0, P(x) = x^2 - (1 - m^2)x - m. \tag{10}$$

Per garantire l'esistenza di due soluzioni reali abbiamo la condizione

$$D = (1 - m^2)^2 + 4m \geq 0.$$

La condizione sufficiente e neccessari che entrambi x_1, x_2 sono in $[-2, 2]$ e praticamente spiegata in (12), cioé chiediamo

$$\begin{aligned} &(1 - m^2)^2 + 4m \geq 0 \\ &-4 \leq x_1 + x_2 \leq 4 \\ &P(2) = 4 - 2(1 - m^2) - m \geq 0 \\ &P(-2) = 4 + 2(1 - m^2) - m \geq 0. \end{aligned} \tag{11}$$

Usando le formule di Viet, troviamo

$$x_1 + x_2 = 1 - m^2.$$

Il sistema diventa

$$\begin{aligned} &(1 - m^2)^2 + 4m \geq 0 \\ &-4 \leq 1 - m^2 \leq 4 \\ &2m^2 - m + 2 \geq 0 \\ &2m^2 + m - 6 \leq 0. \end{aligned} \tag{12}$$

La soluzione é $m \in [0, 3/2]$. □

Problema 3.6. *Risolvere le disuguaglianze*

$$a) \quad |x| \leq \frac{1}{x - 1},$$

$$b) |x - 1| + 2|x - 3| < 2,$$
$$c) \quad x^2 - |x| < 0,$$
$$d) \quad x^2 - 3|x| + 2 > 0,$$
$$e) \quad (1 + x)^2 < |1 - x^2|,$$

$$f)\quad x|x| - 4x + 3 < 0,$$
$$g)\quad \frac{x-1}{2x+1} > 0,$$
$$h)\quad \frac{x-1}{x} - \frac{x+1}{x-1} < 2,$$
$$i)\quad \frac{x}{x-1} - \frac{2}{x+1} - \frac{8}{x^2-1} < 0.$$

Risp. a) $x \in (1, (1+\sqrt{5})/2]$, b) $x \in \emptyset$, c) $x \in (-1,0) \cup (0,1)$, d) $x \in (-\infty,-2) \cup (-1,1) \cup (2,\infty)$, e) $x \in (-\infty,-1) \cup (-1,0)$, f) $x \in (-\infty,-2-\sqrt{7}) \cup (1,3)$, g) $x \in (-\infty,-1/2) \cup (1,\infty)$, h) $x \in (-\infty,0) \cup (1,\infty)$, i) $x \in (-2,-1) \cup (1,3)$.

Soluzione a). Dominio della disequazione

$$|x| \leq \frac{1}{x-1}$$

é $x \neq 1$. Per $x > 0$ abbiamo

$$x - \frac{1}{x-1} \leq 0$$
$$(x-1)(x^2 - x - 1) \leq 0.$$

La soluzione é $x \in (1, (1+\sqrt{5})/2]$.

Per $x < 0$ abbiamo

$$-x - \frac{1}{x-1} \leq 0$$
$$(x-1)(-x^2 + x - 1) \leq 0$$
$$x^2 - x + 1 \leq 0$$

la soluzione é l'insieme vuoto. □

Soluzione e). La disequazione

$$(1+x)^2 < |1-x^2|$$

ha due casi da considerare:

a) $1 - x^2 \geq 0$, in questo caso la disequazione diventa

$$1 + 2x + x^2 < 1 - x^2$$

o

$$2x(x+1) < 0$$

La soluzine e $x \in (-1, 0)$.

b) $1 - x^2 < 0$, in questo caso la disequazione diventa

$$1 + 2x + x^2 < x^2 - 1$$

o $x < -1$.

□

Problema 3.7. *Per quale valore del parametro a la disuguaglianza*

$$-3 < \frac{x^2 + ax - 2}{x^2 - x + 1} < 2$$

e' vera per ogni x?

Risp. $a \in (-1, 2)$.

Problema 3.8. *Per quale valore del parametro a la disuguaglianza*

$$(a^2-1)x^2+2(a-1)x+1>0$$

e' vera per ogni x?

Risp. $a>1$.

Problema 3.9. *Risolvere le equazioni*

$$a)\quad \sqrt{x}=\sqrt{-x},$$
$$b)\quad \sqrt{1+x}=2-3x,$$
$$c)\quad \sqrt{1+2x^2+x^4}=10,$$
$$d)\sqrt{2x-1}=x+3,$$
$$e)\quad x^2+5x+4-5\sqrt{x^2+5x+28}=0,$$
$$f)x-\sqrt{\frac{x+6}{3}}=4,$$
$$g)\frac{x^2-x}{x-\sqrt{x}}=6$$

Soluzione b). L'equazione ha dominio

$$x\in\left[-1,\frac{2}{3}\right]$$

In questo dominio. l'equazione

$$\sqrt{1+x}=2-3x$$

si puo riscrivere come

$$1+x=4-12x+9x^2 \quad\Longleftrightarrow\quad 9x^2-13x+3=0.$$

Tra le due soluzioni

$$x_1=\frac{13+\sqrt{61}}{18},\ x_2=\frac{13-\sqrt{61}}{18}$$

solo x_2 é nel dominio. □

Soluzione c). L'equazione é

$$1+x^2=10$$

e quindi ponendo $x=\pm3$. □

Soluzione d). Il dominio dell equazione e

$$x\geq\frac{1}{2}$$

Nel dominio l'equazione e equivalente a

$$2x-1=x^2+6x+9$$
$$x^2+4x+10=0$$

e quindi non ha soluzioni in $\mathbb{R}$. □

Risposte. a) $x=0$, b)$(13-\sqrt{61})/18$, c)$\pm\sqrt{3}$ d) non ci sono soluzioni; e) $x=4,-9$, f) 6, g) 3.

Problema 3.10. *Vedere per quale valore del parametro a l'equazione*

$$\sqrt{x^2+x+1} = ax+1$$

ha unica soluzione $x \neq 0$.

Soluzione. L'equazione è equivalente a

$$x^2+x+1 = a^2x^2+2ax+1$$

e quindi

$$x^2(1-a^2)+x(1-2a) = 0.$$

Se $1-a^2=0$ allora abbiamo unica soluzione $x=0$. Se $1-a^2 \neq 0$, $1-2a \neq 0$ allora abbiamo

$$x = \frac{1-2a}{a^2-1}$$

come unica soluzione diversa da 0. La condizione $ax+1 \geq 0$ implica

$$\frac{a(1-2a)}{a^2-1}+1 \geq 0$$

$$\frac{a^2-a+1}{a^2-1} \leq 0$$

e quindi

$$a \in (-1,1), a \neq 1/2$$

è il dominio cercato. □

Problema 3.11. *Risolvere le equazioni*

$$a)\quad \sqrt{4x^2+9x+5}-\sqrt{2x^2+x-1} = \sqrt{x^2-1},$$

$$b)\quad x^2+5x+4-5\sqrt{x^2+5x+28} = 0,$$

$$c)^*\quad \sqrt{2x+4}-2\sqrt{2-x} = \frac{12x-8}{\sqrt{9x^2+16}}.$$

$$d)\quad \sqrt{x-2+\sqrt{2x-5}}+\sqrt{x+2+3\sqrt{2x-5}} = 7\sqrt{2},$$

$$e)\quad \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} = \frac{15}{8}\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{15}},$$

$$f)\quad (x-3)^2+3x-22 = \sqrt{x^2-3x+7},$$

$$g)^*\quad x^2+\sqrt{x+5} = 5,$$

Risp. a) $x=-1,5$, b) $x=4,-9$, c) $x=2/3, 4\sqrt{2}/3$, d) $x=15$, e) $x=0,\pm 24/25$.

Soluzione a). Usando le decomposizioni

$$4x^2+9x+5 = 4(x+1)(x+5/4),\ 2x^2+x-1 = 2(x+1)(x-1/2),$$

si vede che l'equazione

$$\sqrt{4x^2+9x+5} = \sqrt{2x^2+x-1}+\sqrt{x^2-1}$$

ha dominio $x \in (-\infty,-5/4] \cup [1,+\infty)$. Elevando al quadrato, otteniamo

$$4x^2+9x+5 = x^2-1+2x^2+x-1+2\sqrt{x^2-1}\sqrt{2x^2+x+1}$$

e quindi

$$x^2+8x+7 = 2\sqrt{x^2-1}\sqrt{2x^2+x+1},$$

da qui deducaimo che il dominio va intersecato con il vincolo

$$x^2 + 8x + 7 \geq 0$$

e quindi il dominio é $x \in (-\infty, -7] \cup [1, +\infty)$. Léquazione

$$(x+1)(x+7) = 2\sqrt{2(x-1)(x+1)^2(x-1/2)}$$

implica

$$(x+1)^2(x+7)^2 = 4(x-1)(x+1)^2(2x-1)$$

e una soluzione ovvia e $x_1 = -1$. Se $x_1 \neq -1$, allora

$$(x+7)^2 = 4(x-1)(2x-1) \implies 7x^2 - 26x - 45 = 0.$$

Tra le due soluzioni

$$x_2 = \frac{13 + \sqrt{484}}{7} = 5, \quad x_3 = \frac{13 - 22}{7} = \frac{-9}{7}$$

solo x_2 é nel dominio. Cosi tutte le soluzioni sono

$$x_1 = -1, \ x_2 = 5.$$

$\square$

Soluzione c). Abbiamo le relazioni

$$\sqrt{2x+4} - 2\sqrt{2-x} = \frac{6x-4}{\sqrt{2x+4} + 2\sqrt{2-x}}$$

e quindi l'équazione c) diventa

$$\frac{6x-4}{\sqrt{2x+4} + 2\sqrt{2-x}} = \frac{12x-8}{\sqrt{9x^2+16}}.$$

Le soluzioni sono

$$6x - 4 = 0, \Longrightarrow x = \frac{2}{3}$$

o

$$\sqrt{9x^2+16} = 2\left(\sqrt{2x+4} + 2\sqrt{2-x}\right). \tag{13}$$

L'equazione (13) implica

$$9x^2 + 16 = 4\left(2x + 4 + 4(2-x) + 4\sqrt{2}\sqrt{4-x^2}\right)$$

$$9x^2 - 32 = -8x + 16\sqrt{2}\sqrt{4-x^2}.$$

Usando la relazione

$$-8x + 16\sqrt{2}\sqrt{4-x^2} = 8(-x + \sqrt{32-8x}) = 8\frac{32-9x^2}{x + \sqrt{32-8x}}$$

troviamo

$$9x^2 - 32 = 0.$$

$\square$

Soluzione d). Abbiamo l'equazione

$$\sqrt{x-2+\sqrt{2x-5}}+\sqrt{x+2+3\sqrt{2x-5}}=7\sqrt{2}.$$

La sostituzione

$$y=\sqrt{2x-5}$$

implica

$$x=\frac{y^2+5}{2}$$

e quindi

$$x-2+\sqrt{2x-5}=\frac{y^2+5}{2}-2+y=\frac{y^2+2y+1}{2}=\frac{(y+1)^2}{2}$$

e

$$x+2+3\sqrt{2x-5}=\frac{y^2+5}{2}+2+3y=\frac{y^2+6y+9}{2}=\frac{(y+3)^2}{2}$$

Cosí l'equazione diventa

$$\frac{|y+1|}{\sqrt{2}}+\frac{|y+3|}{\sqrt{2}}=7\sqrt{2}$$

e quindi

$$|y+1|+|y+3|=14.$$

Abbiamo 3 casi:

Caso a:) $y\leq -3$. L'equazione diventa

$$-(y+1)-(y+3)=14 \quad \Longrightarrow y=-9.$$

Caso b:) $-3\leq y\leq -1$. L'equazione diventa

$$-(y+1)+(y+3)=14.$$

Non c'e soluzione.

Caso c:) $y\geq -1$ L'equazione diventa

$$(y+1)+(y+3)=14 \quad \Longrightarrow y=5.$$

In coclusione abbiamo due soluzioni in y

$$y_1=-9,\ y_2=5.$$

La sostituzione

$$y=\sqrt{2x-5}$$

mostra che solo $y_2=5$ é soluzione. La relazione

$$x=\frac{y^2+5}{2}$$

implica

$$x=15.$$

$\square$

Soluzione e). Dopo razzionalizzazione troviamo

$$\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}=\frac{15}{8}\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{15}}$$

$$\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}=\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}$$

e ponendo

$$c = \frac{8}{15}\sqrt[3]{15} = \frac{8}{15^{2/3}},$$

troviamo l'equazione

$$cx^{2/3} = 1 + \sqrt{1-x^2}.$$

Un'altra sostituzione $y = x^{2/3} \geq 0$ ci porta all'equazione

$$cy - 1 = \sqrt{1-y^3}.$$

Da qui otteniamo

$$c^2y^2 - 2cy + 1 = 1 - y^3$$
$$y^3 + c^2y^2 - 2cy = 0$$
$$y = 0 \quad o \quad y^2 + c^2y - 2c = 0.$$

Abbiamo

$$D = c^4 + 8c = c(c^3+8) = c\left(\frac{8^3}{15^2} + 8\right) = c8\frac{8^2+15^2}{15^2}$$
$$= 8c\frac{17^2}{15^2} = \frac{8^2}{15^{2/3}}\frac{17^2}{15^2} = \left(\frac{8}{15^{1/3}}\frac{17}{15}\right)^2 = \left(\frac{136}{15^{4/3}}\right)^2.$$

l'unica soluzione positiva e

$$y = \frac{-c^2+\sqrt{D}}{2} = \frac{1}{2}\left(-\frac{64}{15^{4/3}} + \frac{136}{15^{4/3}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{72}{15^{4/3}}\right) = \frac{6^2}{15^{4/3}}.$$

Alla fine l'equazione

$$x^{2/3} = \frac{6^2}{15^{4/3}}$$

implica

$$x = \pm\frac{6^3}{15^2} = \pm\frac{24}{25}.$$

$\square$

Soluzione g). Il dominio di

$$x^2 + \sqrt{x+5} = 5 \tag{14}$$

e $x \in (-\sqrt{5}, \sqrt{5})$. Abbiamo le relazioni

$$x^2 + \sqrt{x+5} = 5 \implies x^4 - 10x^2 - x + 20 = 0.$$

Usiamo le relazioni

$$x^4 - 10x^2 - x + 20 = x^4 - (x^2 - 10x + 25) - (9x^2 - 9x - 45) =$$
$$= x^4 - (x-5)^2 - 9(x^2 - x - 5) = (x^2 - x - 5)(x^2 + x + 5) - 9(x^2 - x - 5) =$$
$$= (x^2 - x - 5)(x^2 + x - 4)$$

Cosi ogni soluzione di (14) sarà soluzione di

$$x^2 - x - 5 = 0 \quad \implies x_1 = \frac{1+\sqrt{21}}{2},\ x_2 = \frac{1-\sqrt{21}}{2}$$

o di

$$x^2 + x - 4 = 0 \quad \implies x_3 = \frac{-1+\sqrt{17}}{2},\ x_4 = \frac{-1-\sqrt{17}}{2}$$

Si vede che x_1 e x_4 non entrano nel dominio dell'èquazione (14) e quindi le due soluzioni sono

$$x_2 = \frac{1-\sqrt{21}}{2}, \ x_3 = \frac{-1+\sqrt{17}}{2}.$$

$\square$

Seconda Soluzione g). Consideriamo il problema

$$x^2 + \sqrt{x+a} = a \tag{15}$$

Per risolverlo rispetto a abbiamo

$$x + a = a^2 + x^4 - 2ax^2$$

Il discriminante è

$$D = 4x^4 + 4x^2 + 1 - 4(x^4 - x) = 4x^2 + 4x + 1 = (2x+1)^2$$

e quindi

$$a_1 = \frac{2x^2+1+2x+1}{2} = x^2 + x + 1, a_2 = \frac{2x^2+1-2x-1}{2} = x(x-1).$$

Così troviamo due equazioni

$$x^2 + x + 1 = 5, \ x_3 = \frac{-1+\sqrt{17}}{2}, \ x_4 = \frac{-1-\sqrt{17}}{2}$$

e

$$x^2 - x = 5, x_1 = \frac{1+\sqrt{21}}{2}, \ x_2 = \frac{1-\sqrt{21}}{2}.$$

Si vede che x_1 e x_4 non entrano nel dominio dell'èquazione (14) e quindi le due soluzioni sono

$$x_2 = \frac{1-\sqrt{21}}{2}, \ x_3 = \frac{-1+\sqrt{17}}{2}.$$

$\square$

Problema 3.12. *Risolvere le disuguaglianze:*
a) (compito Novembre 2006/2007)

$$2 - \sqrt{x+2} > \sqrt{2x+5},$$

b) (compito Gennaio 2005)

$$x + \sqrt{x^2 + x - 2} > 0,$$

$$c) \sqrt{x-1} < x - 1.$$

Risposte. *c)* $x > 2$.

4. Esercizi su estremi superiori, estremi inferiori, massimi e minimi

Problema 4.1. *Determinare il minimo, il massimo, l'estremo inferiore e l'estremo superiore (se esistono) degli insiemi*

$$\{x \in \mathbb{R} : |x^2+1| < |x-3| - 1\} \quad \{x \in \mathbb{R} : |x^2| < \left| x - \frac{3}{x} \right| - 1\}.$$

Problema 4.2. *Determinare il minimo, il massimo, l'estremo inferiore e l'estremo superiore (se esistono) degli insiemi $A \cup B$, $A \cap B$ e $A \setminus B$, dove*

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \sqrt{x^2 - 6x + 9} \geq x - 1 \right\},$$

$$B = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{-2(x^4 - 8x^2 + 16)(9 - x^2)(x-4)^3}{3(x^2 - x - 12)(x^2 - 2x - 15)(x+3)} \leq 0 \right\}.$$

Soluzione. Per risolvere i quesiti proposti è necessario determinare le soluzioni delle disequazioni che definiscono gli insiemi A e B.

Iniziamo considerando l'insieme A e quindi

$$\sqrt{x^2 - 6x + 9} \geq x - 1.$$

Risolvere questa disequazione equivale a risolvere i due sistemi ([1])

$$(16) \qquad \begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ x^2 - 6x + 9 \geq 0 \\ x^2 - 6x + 9 \geq (x-1)^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - 1 < 0 \\ x^2 - 6x + 9 \geq 0. \end{cases}$$

Da cui

$$(17) \qquad \begin{cases} x \geq 1 \\ (x-3)^2 \geq 0 \\ 2 \geq x \end{cases} \qquad \begin{cases} x < 1 \\ (x-3)^2 \geq 0 \qquad \text{(ovvero ogni) } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Le soluzioni del primo sistema sono $1 \leq x \leq 2$, mentre del secondo $x < 1$. Quindi possiamo scrivere che

$$A = \{x : \ x \leq 2\}.$$

---

[1] Ricordiamo lo sche di ragionamento da seguire nella soluzione delle disequazioni irrazionali di questo tipo. Ovvero risolvere $\sqrt{P(x)} \geq Q(x)$ equivale a risolvere

$$\begin{cases} Q(x) \geq 0 \\ P(x) \geq 0 \quad \text{(realtà della radice)} \\ P(x) \geq Q^2(x) \end{cases} \qquad \text{oppure} \qquad \begin{cases} Q(x) < 0 \\ P(x) \geq 0 \qquad \text{(realtà della radice).} \end{cases}$$

Si osservi che nel primo sistema la condizione di realtà della radice ($P(x) \geq 0$) è superflua, in quanto è conseguenza della terza disequazione. In ogni caso il suo inserimento non altera il risultato.

Per determinare l'insieme B, determiniamo l'insieme delle soluzioni della disequazione

$$\frac{-2(x^4-8x^2+16)(9-x^2)(x-4)^3}{3(x^2-x-12)(x^2-2x-15)(x+3)} \leq 0.$$

Ovvero, cambiando il segno

$$\frac{2(x^4-8x^2+16)(9-x^2)(x-4)^3}{3(x^2-x-12)(x^2-2x-15)(x+3)} \geq 0$$

Che equivale a risolvere i seguenti sistemi ([2])

$$\begin{cases} 2(x^4-8x^2+16)(9-x^2)(x-4)^3 \geq 0 \\ \\ 3(x^2-x-12)(x^2-2x-15)(x+3) > 0 \end{cases}$$

oppure

$$\begin{cases} 2(x^4-8x^2+16)(9-x^2)(x-4)^3 \leq 0 \\ \\ 3(x^2-x-12)(x^2-2x-15)(x+3) < 0 \end{cases}$$

In ciascuno dei sistemi, le disequazioni si risolvono considerando i segni dei fattori che le compongono.

Iniziamo considerando x^4-8x^2+16, che è un quadrato perfetto: $x^4-8x^2+16 = (x^2-4)^2$ e quindi risulta essere sempre non negativo.
Invece $9-x^2 \geq 0$ se $-3 \leq x \leq 3$, mentre è $9-x^2 \leq 0$ se $x \leq -3$ oppure $x \geq 3$.
Infine $(x-4)^3 \geq 0$ se $x \geq 4$, mentre è $(x-4)^3 \leq 0$ se $x \leq 4$. ([3])
Considerando i fattori del denominatore, si ha:
$x^2-x-12 > 0$ se $x < -4$ oppure $x > 3$, mentre $x^2-x-12 < 0$ se $-4 < x < 3$.
$x^2-2x-15 > 0$ se $x < -3$ oppure $x > 5$, mentre $x^2-2x-15 < 0$ se $-3 < x < 5$.
$x+3 > 0$ se $x > -3$, mentre $x+3 < 0$ se $x < -3$.
Riportiamo i risultati negli schemi seguenti

[2] Ricordiamo lo schema di risoluzione delle disequazioni fratte, cioé risolvere

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0$$

equivale a risolvere

$$\begin{cases} P(x) \geq 0 \\ \\ Q(x) > 0 \end{cases} \qquad \textit{oppure} \qquad \begin{cases} P(x) \leq 0 \\ \\ Q(x) < 0 \end{cases}$$

[3] Ricordare che $x^3 \geq 0$ se e solo se $x \geq 0$. Più in generale, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $x^{2n+1} \geq 0$ se e solo se $x \geq 0$.

		-3		3		4	
x^4-8x^2+16	$+\,+$		$+\,+\,+\,+$		$+\,+\,+\,+$		$+\,+$
$9-x^2$	$-\,-$		$+\,+\,+\,+$		$-\,-\,-\,-$		$-\,-$
$(x-4)^3$	$-\,-$		$-\,-\,-\,-$		$-\,-\,-\,-$		$+\,+$
$(x^4-8x^2+16)(9-x^2)(x-4)^3$	$+\,+$		$-\,-\,-\,-$		$+\,+\,+\,+$		$-\,-$

		-4		-3		3		5	
x^2-x-12	$+\,+$	$\circ$	$-\,-$		$-\,-$	$\circ$	$+\,+$	$\circ$	$+\,+$
$x^2-2x-15$	$+\,+$		$+\,+$	$\circ$	$-\,-$		$-\,-$	$\circ$	$+\,+$
$x+3$	$-\,-$		$-\,-$	$\circ$	$+\,+$		$+\,+$		$+\,+$
$(x^2-x-12)(x^2-2x-15)(x+3)$	$-\,-$	$\circ$	$+\,+$	$\circ$	$+\,+$	$\circ$	$-\,-$	$\circ$	$+\,+$

		-4		-3		3		4		5	
$(x^4-8x^2+16)(9-x^2)(x-4)^3$	$+\,+$		$+\,+$		$-\,-$		$+\,+$		$-\,-$		$-\,-$
$(x^2-x-12)(x^2-2x-15)(x+3)$	$-\,-$	$\circ$	$+\,+$	$\circ$	$+\,+$	$\circ$	$-\,-$		$-\,-$	$\circ$	$+\,+$
$\dfrac{2(x^4-8x^2+16)(9-x^2)(x-4)^3}{3(x^2-x-12)(x^2-2x-15)(x+3)}$	$-\,-$	$\circ$	$+\,+$	$\circ$	$-\,-$	$\circ$	$-\,-$		$+\,+$	$\circ$	$-\,-$

L'insieme B è dato da $-4 < x < -3$, $4 \leq x < 5$.

Osservando che la frazione data è costituita da un rapporto tra prodotti di polinomi si poteva anche procedere riportando in uno schema unico il segno di ciascuno di essi nel modo che segue.

		-4		-3		3		4		5	
(x^4-8x^2+16)	$++$		$++$		$++$		$++$		$++$		$++$
$(9-x^2)$	$--$		$--$		$++$		$--$		$--$		$--$
$(x-4)^3$	$--$		$--$		$--$		$--$		$++$		$++$
(x^2-x-12)	$++$	$\circ$	$--$		$--$	$\circ$	$++$		$++$		$++$
$(x^2-2x-15)$	$++$		$++$	$\circ$	$--$		$--$		$--$	$\circ$	$++$
$(x+3)$	$--$		$--$	$\circ$	$++$		$++$		$++$		$++$
$\dfrac{2(x^4-8x^2+16)(9-x^2)(x-4)^3}{3(x^2-x-12)(x^2-2x-15)(x+3)}$	$--$	$\circ$	$++$	$\circ$	$--$	$\circ$	$--$		$++$	$\circ$	$--$

Possiamo quindi scrivere anche $B=(-4,-3)\cup[4,5)$. Quindi, tenuto conto dei risultati ottenuti

$$A\cup B=(-\infty,2]\cup(-4,-3)\cup[4,5)=(-\infty,2]\cup[4,5).$$

$$\sup(A\cup B)=5,\quad \inf(A\cup B)=-\infty.$$

$$A\cap B=(-\infty,2]\cap(-4,-3)\cap[4,5)=(-4,-3).$$

$$\sup(A\cap B)=-3,\quad \inf(A\cap B)=-4.$$

Tenendo presente le regole delle operazioni tra insiemi([4])

$$A\setminus B=(-\infty,2]\setminus\{(-4,-3)\cup[4,5)\}=(-\infty,2]\setminus(-4,-3)\cap\{(-\infty,2]\setminus[4,5)\}=$$

$$=\{(-\infty,-4]\cup[-3,2]\}\cap(-\infty,2]= \qquad (18)$$

$$=\{(-\infty,-4]\cap(-\infty,2]\}\cup\{[-3,2]\cap(-\infty,2]\}=(-\infty,-4]\cup[-3,2]=[-3,2]$$

In definitiva

$\sup(A\setminus B)=2$, (che è anche massimo) $\quad \inf(A\setminus B)=-3$ (che è anche minimo).

□

Problema 4.3. *Determinare il minimo, il massimo, l'estremo inferiore e l'estremo superiore (se esistono) degli insiemi*

$$\{x\in\mathbb{R}:|x^2-1|<|x+3|-2\}\quad \{\frac{1}{n}+\sin\Big((2m+1)\frac{\pi}{2}\Big):n,m\geq 1\in\mathbb{N}\}.$$

---

[4]Se X, Y, Z sono insiemi, allora (legge di De Morgan)

$$X\setminus(Y\cup Z)=(X\setminus Y)\cap(X\setminus Z).$$

Proprietà distributiva di $\cup$ rispetto a $\cap$

$$X\cap(Y\cup Z)=(X\cap Y)\cup(X\cap Z).$$

Problema 4.4. *Determinare il minimo, il massimo, l'estremo inferiore e l'estremo superiore (se esistono) degli insiemi*

$$\{x \in \mathbb{R} : 4 > |1-x||1+x| + (1-x)^2\} \quad \left\{ \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n - \cos(m\pi)} : n, m \geq 1 \in \mathbb{N} \right\}.$$

Problema 4.5. *Trovare l'intersezione $A \bigcap B$ dove*

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x^4 + |x-3| = \sin\left(x\frac{\pi}{2}\right)\}$$

e $B = \{x \in \mathbb{R} : |x| \leq 2\}$.

Problema 4.6. *Trovare l'estremo superiore, l'estremo inferiore, il massimo e il minimo di $A \bigcap B$ dove*

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \left| x - \frac{1}{x} + 1 \right| + x \leq \frac{1+x}{x}\}$$

and $B = \mathbb{Z}$.

Problema 4.7. *Trovare l'estremo superiore, l'estremo inferiore, il massimo e il minimo di $A \bigcap B$ dove*

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + |x-1| < 2\}$$

and $B = \mathbb{Q}$.

Problema 4.8. *Trovare l'estremo superiore, l'estremo inferiore, il massimo e il minimo di $A \bigcap B$ dove*

$$A = \{x \in \mathbb{R} : |x-1| + |x+2| \leq 2|x-3|\}$$

and $B = \mathbb{Q}$.

Problema 4.9. *Trovare l'estremo superiore, l'estremo inferiore, il massimo e il minimo di tutti $x \in \mathbb{R}$ tale che esiste $y \in \mathbb{R}$ tale che*

$$|x+y| + y \leq 2.$$

5. Funzioni exp e log.

La funzione esponenziale $f(x) = a^x$ dove $a > 0, a \neq 1$ e definita per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Definition 5.1. *Se $a > 1$ e $x \in \mathbb{R}$ é fissato, allora definiamo l'insieme*

$$A_{a,x} = \{a^r ; r \in \mathbb{Q}, r < x\}.$$

Abbiamo

$$a^x = \sup A_{a,x}.$$

Definition 5.2. *Se $a < 1$ e $x \in \mathbb{R}$ é fissato, allora definiamo l'insieme*

$$A_{a,x} = \{a^r ; r \in \mathbb{Q}, r < x\}.$$

Abbiamo

$$a^x = \inf A_{a,x}.$$

Proprieta'

$$a^x > 0, \; a^x b^x = (ab)^x, \; a^0 = 1, a^{x+y} = a^x a^y, \quad a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}, \quad a^{-x} = \frac{1}{a^x}, (a^x)^y = a^{xy}$$

Definition 5.3. *Sia $a > 0, a \neq 1,$ e $b > 0$. Allora $\log_a b$ e' definito con*

$$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b.$$

Proprieta':

$$\log_a(b_1.b_2) = \log_a b_1 + \log_a b_2, a > 0, a \neq 1, b_1, b_2 > 0,$$

$$\log_a(b^d) = d \log_a b, a > 0, a \neq 1, b > 0, d \in \mathbb{R}.$$

$$\log_a b = \frac{\log_A b}{\log_A a},\ a, A > 0, a \neq 1, A \neq 1, b > 0.$$

Problema 5.1. *Risolvere le seguente equazioni*

$$a) \quad 4^x - 2^{x+2} - 32 = 0,$$

$$b) \quad \sqrt{3^{1/x}} - 3^{1/x} = 27,$$

$$c) \quad 4^{\sqrt{x^2-2}+x} = 6 + 5.2^{x-1+\sqrt{x^2-2}},$$

$$d) \quad 3.4^{\sqrt{x}-1} - 2.6^{\sqrt{x}-1} = 9^{\sqrt{x}-1},$$

$$e) \quad \left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = 4.$$

$$f) \quad 9(9^x + 9^{-x}) - 3(3^x + 3^{-x}) = 72,$$

$$g) \quad 2^{|x+2|} - |2^{x+1} - 1| = 2^{x+1} + 1,$$

$$g) \quad 3^x 8^{x/(x+2)} = 6.$$

Soluzione a). Ponendo $y = 2^x, y > 0$ troviamo l'equazione

$$y^2 - 4y - 32 = 0,$$

che ha soluzioni

$$y_1 = 2 - \sqrt{36} = 2 + 6 = 8,\ y_2 = -4$$

L'unica soluzione positiva e y_1 e quindi $2^x = 8$ implica $x = 3$. $\square$

Soluzione b). Ponendo $y = \sqrt{3^{1/x}}, y > 0$ troviamo l'equazione

$$y - y^2 = 27 \quad \Longleftrightarrow \quad y^2 - y + 27 = 0$$

che non ha soluzioni. $\square$

Risp. a) 3, d) 1, e) 2, -2, f) 1,-1, g) $x = -3$ o $x \in [-1, \infty)$.

Problema 5.2. *Risolvere le seguente equazioni*

$$a) \quad \log(3x - 8) + \lg(2 - x) = 5,$$

$$b) \quad \log_x(2x^2 - 5x + 6) = 2,$$

$$c) \quad x^{\lg_3(3x)} = 9,$$

$$d) \quad 2(\log_2 x + \log_x 2) = 5,$$

$$e) \quad \log_2 (x+1)^2 + \log_2 |x+1| = 6.$$

Soluzione d). Ponendo

$$y = \log_2 x$$

e usando la relazione

$$\log_x 2 = \frac{1}{\log_2 x},$$

otteniamo l'equazione

$$2(y + 1/y) = 5$$

con le soluzioni

$$y_1 = 1, y_2 = 1/2.$$

Per x troviamo

$$\begin{aligned} \log_2 x = 1 &\implies x = 1 \\ \log_2 x = 1/2 &\implies x = -1. \end{aligned}$$

Le due soluzioni sono

$$x_1 = 1, x_2 = -1.$$

□

Risp. a) non c'e soluzione, b) 2,3, c) 1/9, 3, d) $\sqrt{2}, 4$

Problema 5.3. *Risolvere le seguente equazioni (a é un parametro reale)*

$$a) \quad \log_{a^2} x + \log_{x^2} a = 1,$$

$$b) \quad -\frac{5}{4} + \log_x (5\sqrt{5}) = \left(\log_{x^2} \sqrt{5}\right)^2,$$

$$c) \quad x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x^x}.$$

Problema 5.4. *Trovare le soluzioni del sistema*

$$\left\{ \begin{array}{ll} xy = 40 & ; \\ x^{\lg y} = 4, & . \end{array} \right. \tag{19}$$

Risp. 10,4.

Problema 5.5. *Risolvere le seguente disuguaglianze*

$$a) \quad 3^{x+1/2} + 3^{x-1/2} \geq 4^{x+1/2} - 2^{2x-1},$$

$$b) \quad \left(\frac{1}{2}\right)^x + \left(\frac{1}{2}\right)^{-x-1} \leq 3,$$

$$c) \quad \lg_{1/4} \left(\lg_{1/3} \frac{x}{x+1} \right) < 0,$$

$$d) \quad \lg \left| \frac{2x-1}{x+1} \right| < 0,$$

$$e) \quad \lg_{x^2} |x-1| < 1.$$

Risp. a) $x \in (-\infty, 3/2]$, c) $x \in (-1/2, 0)$, d) $x \in (0, 1/2) \cup (1/2, 2)$.

6. Funzioni trigonometriche

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta,$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta,$$
$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$
$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha, \cos(-\alpha) = \cos\alpha, \tan(-\alpha) = -\tan\alpha.$$
$$\sin(\alpha+2\pi) = \sin\alpha, \quad \cos(\alpha+2\pi) = \cos\alpha, \quad \tan(\alpha+\pi) = \tan\alpha, \cot(\alpha+\pi) = \cot\alpha.$$
$$\sin(\pi-\alpha) = \sin\alpha, \quad \cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha, \sin(\pi+\alpha) = -\sin\alpha, \quad \cos(\pi+\alpha) = -\cos\alpha,$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cos\alpha, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \sin\alpha, \sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = \cos\alpha, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\sin\alpha,$$

Per $0 < \alpha < \pi$
$$\sin\alpha < \alpha$$
e
$$\frac{\sin\alpha}{\alpha} \geq \cos\alpha.$$

Formule di duplicazione
$$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha, \quad \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha.$$

Formule di bisezione
$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}, \quad \cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2},$$

Formule di Werner
$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2}, \quad \sin\alpha\sin\beta = \frac{-\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{2}$$
$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{2},$$

Formule di prostaferesi
$$\sin\alpha+\sin\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right), \quad \cos\alpha+\cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$
$$\sin\alpha-\sin\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$
$$\cos\alpha-\cos\beta = -2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

Definizione delle funzioni tan e cot,
$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \quad \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$
Il dominio per tan e' $\alpha \neq (2k+1)\pi/2, k \in \mathbb{Z}$. Il dominio per cot e' $\alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Espresione di $\sin, \cos$ mediante $\tan, \cot$ e viceversa
$$\sin\alpha = \pm\frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}, \quad \sin\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\cot^2\alpha}}$$

$$\cos\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}, \quad \cos\alpha = \pm\frac{\cot\alpha}{\sqrt{1+\cot^2\alpha}}$$

$$\tan\alpha = \frac{1}{\cot\alpha} = \pm\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}, \quad \tan\alpha = \frac{1}{\cot\alpha} = \pm\frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha},$$

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}, \quad \tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta},$$

$$\cot(\alpha+\beta) = \frac{-1+\cot\alpha\cot\beta}{\cot\alpha+\cot\beta}, \quad \cot(\alpha-\beta) = \frac{1+\cot\alpha\cot\beta}{-\cot\alpha+\cot\beta},$$

$$\arcsin x = \alpha, x \in [-1,1] \Leftrightarrow \sin\alpha = x \;\; \alpha \in [-\pi/2, \pi/2],$$

$$\arccos x = \alpha, x \in [-1,1] \Leftrightarrow \cos\alpha = x \;\; \alpha \in [0, \pi],$$

$$\arctan x = \alpha, x \in (-\infty, \infty) \Leftrightarrow \tan\alpha = x \;\; \alpha \in [-\pi/2, \pi/2],$$

$$\sin x = \sin x_0 \Leftrightarrow x = x_0 + 2k\pi, \pi - x_0 + 2k\pi, \;\; \cos x = \cos x_0 \Leftrightarrow x = \pm x_0 + 2k\pi,$$

$$\tan x = \tan x_0 \Leftrightarrow x = x_0 + k\pi,$$

Problema 6.1. *Verificare le seguente indentita'*

$$\sin(\pi-\alpha) = \sin\alpha, \;\; \cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha, \quad \tan(\pi-\alpha) = -\tan\alpha,$$

$$\sin(\pi+\alpha) = -\sin\alpha, \;\; \cos(\pi+\alpha) = -\cos\alpha, \quad \tan(\pi+\alpha) = \tan\alpha,$$

$$\sin(\pi/2-\alpha) = \cos\alpha, \;\; \cos(\pi/2-\alpha) = \sin\alpha, \quad \tan(\pi/2-\alpha) = \cot\alpha,$$

$$\sin(\pi/2+\alpha) = \cos\alpha, \;\; \cos(\pi/2+\alpha) = -\sin\alpha, \quad \tan(\pi/2+\alpha) = -\cot\alpha,$$

$$\sin(3\pi/2-\alpha) = -\cos\alpha, \;\; \cos(3\pi/2-\alpha) = -\sin\alpha, \quad \tan(3\pi/2-\alpha) = \cot\alpha,$$

$$\sin(3\pi/2+\alpha) = -\cos\alpha, \;\; \cos(3\pi/2+\alpha) = \sin\alpha, \quad \tan(3\pi/2+\alpha) = -\cot\alpha.$$

Problema 6.2. *Verificare le seguente indentita'*

$$\cos^4\alpha - \sin^4\alpha = \cos(2\alpha), \qquad \sin(3\alpha)\sin(2\alpha) = \frac{1}{2}(\cos\alpha - \cos 5\alpha)$$

$$\tan\alpha + \tan\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$

Problema 6.3. *Calcolare* $\cos(2\alpha)$ *se* $\sin\alpha = \sqrt{2-\sqrt{3}}/2$.

Risp. $\sqrt{3}/2$.

Problema 6.4. *Dimostrare che*

$$\sin\alpha.\cos(\alpha+\beta) = \sin\beta \quad \Rightarrow \quad \tan(\alpha+\beta) = 2\tan\alpha;$$

$$\sin(2\alpha+\beta) = 5\sin\beta \quad \Rightarrow \quad 2\tan(\alpha+\beta) = 3\tan\alpha.$$

Problema 6.5. *Semplificare le espressioni*

$$a)\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}{1+\sin(2\alpha)},$$

$$b)\sqrt{\sin^2\alpha\ (1+\cot\alpha) + \cos^2\alpha\ (1+\tan\alpha)}, (\pi < \alpha < 3\pi/2.$$

Risp. a) 1; *b)* $-\sin\alpha - \cos\alpha$.

Problema 6.6. *Dimostrare le identita'*

$$\sin^6\alpha + \cos^6\alpha + 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha = 1$$

$$1 - \cot^2\alpha\ \cot^2\beta = -\frac{\cos(\alpha+\beta).\cos(\alpha-\beta)}{\sin^2\alpha\sin^2\beta}$$

$$\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta} + \frac{\sin(\beta-\gamma)}{\cos\gamma\cos\beta} + \frac{\sin(\gamma-\alpha)}{\cos\alpha\cos\gamma} = 0.$$

Problema 6.7. *Per quali valori del parametro a valgono le relazioni*

$$a)\sin(\pi - a) = \sin a,$$

$$b)\sin a = \sqrt{1-\cos^2 a},$$

$$c)\sqrt{1+\sin(2a)} = \sin a + \cos a.$$

Problema 6.8. *Dimostrare che l'identitá $\alpha+\beta+\gamma = \pi/2$ implica*

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 4\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right).$$

Problema 6.9. *Dimostrare l'identita'*

$$\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x = \frac{\sin 5x/2}{2\sin(x/2)}.$$

Problema 6.10. *Calcolare* $\sin 18^0$.

Problema 6.11. *Dimostrare che*

$$z + \frac{1}{z} = 2\cos\alpha \quad \Rightarrow \quad z^n + \frac{1}{z^n} = 2\cos(n\alpha) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Problema 6.12. *Trovare tutti x tali che*

$$a)\sin 5x = \cos 2x,$$

$$b)\sin(2x) + \tan x = 2,$$

$$c)\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin x\cos x} = 5,$$

$$d)\tan(\pi\tan x) = \cot(\pi\cot x),$$

$$e)\sin^{17}x + \cos^{17}x = 1.$$

Soluzione d). L'equazione

$$\tan(\pi\tan x) = \cot(\pi\cot x),$$

dopo la sostituzione

$$\tan x = y \tag{20}$$

si puo trasformare in

$$\tan(\pi y) = \cot\left(\frac{\pi}{y}\right),$$

con dominio,

$$y \neq \frac{k}{2}, \quad y \neq \frac{1}{\ell}, \quad k, \ell \in \mathbb{Z}, k \text{ dispari}.$$

L'equazione si puo rescrivere come segue

$$\tan(\pi y)\tan\left(\frac{\pi}{y}\right) = 1$$

o

$$\sin(\pi y)\sin\left(\frac{\pi}{y}\right) = \cos(\pi y)\cos\left(\frac{\pi}{y}\right)$$

da qui deduciamo

$$\cos\left(\pi y + \frac{\pi}{y}\right) = 0.$$

Questa equiazione implica

$$\pi y + \frac{\pi}{y} = \frac{\pi}{2}k, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad k \text{ dispari.}$$

L'equazione

$$y + \frac{1}{y} = \frac{k}{2} \Longleftrightarrow y^2 - \frac{k}{2}y + 1 = 0$$

ha soluzione solo se

$$D = \frac{k^2}{4} - 4 \geq 0.$$

Cosi,

$$k \in \mathbb{Z}, \ |k| \geq 2, \quad k \text{ dispari.}$$

Abbiamo le soluzioni

$$y_1 = \frac{k/2 + \sqrt{D}}{2} = \frac{k + \sqrt{k^2 - 16}}{4}, \ y_2 = \frac{k - \sqrt{k^2 - 16}}{4}.$$

Usando (20) troviamo

$$x_1 = \arctan\left(\frac{k + \sqrt{k^2 - 16}}{4}\right) + \ell\pi, \ x_2 = \arctan\left(\frac{k - \sqrt{k^2 - 16}}{4}\right) + \ell\pi,$$

dove

$$\ell \in \mathbb{Z}, \ k \in \mathbb{Z}, \ |k| \geq 2, \quad k \text{ dispari.}$$

□

Problema 6.13. *Trovare tutti $x \in \mathbb{R}$ tale che*

$$\frac{1 + \cos^2 x}{1 + \sin x} > 2.$$

Problema 6.14. *Trovare tutti $x \in \mathbb{R}$ tale che*

$$2^{\sin x} > 2^{\cos x}.$$

Problema 6.15. *Trovare tutti $x \in \mathbb{R}$ tale che*

$$|\sin x + \cos x| < 1.$$

Problema 6.16 (Test Energia 2017). *La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ defnita da $f(x) = \arctan(-x)$ é:*

- **a:** *iniettiva*
- **b:** *surgettiva su $\mathbb{R}$*
- **c:** *periodica*
- **d:** *illimitata*

7. Esercizi su CE, paritá, monotonia delle funzioni

Problema 7.1. *Trovare il campo di esistenza delle funzioni:*
a)
$$f(x) = \ln\left(\sqrt{\frac{2x+1}{x-1}}\right)$$
b)
$$(\ln x)^2 \cos(1 + \ln x).$$

Problema 7.2. *Studiare il C.E. e la paritá delle funzioni:*
a) $f(x) = x^2 + |x| + 3$,
b) $f(x) = \sqrt[3]{6x-1} + \sqrt[3]{-6x-1}$,
c) $f(x) = 5^x + 5^{-x}$,
d) $f(x) = \frac{(1+4^x)^2}{4^x}$,
e) $f(x) = \frac{x}{3^x+3^{-x}}$,
f) $-\frac{x}{+x^2} + 56x$.

Problema 7.3. *Studiare il C.E. e la monotonia delle funzioni:*
a) $f(x) = x^3 + x + 3$,
b) $f(x) = \frac{x}{1+x^2}, x \in (-\infty, -1)$
c) $f(x) = \frac{x}{1+x^2}, x \in (-1, -1)$
d) $f(x) = \frac{x}{1+x^2}, x \in (1, \infty)$
e) $f(x) = \frac{x^2-1}{1+x^2}, x \in (0, \infty)$.

Problema 7.4. *Trovare l'imagine delle funzioni:*
a) $f(x) = -2x^2 + x + 3$,
b) $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$,
c) $f(x) = x^2 + 1/x^2$,
d) $f(x) = \frac{x^2-5}{2x-4}$,
e) $f(x) = x^4 - \frac{2x^4-8}{2+x^2}$,
f) $f(x) = \frac{x^4+1}{(1+x^2)^2}$.

Problema 7.5. *Trovare il campo di esistenza delle funzioni:*
a) $f(x) = \mathrm{e} + \cos(\arcsin(x+1))$,
b) $f(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}$.
c) $f(x) = \sqrt{\frac{1+\cos x}{\sin x}}$,
d) $f(x) = \sqrt{\frac{1+\arccos x}{\arcsin x}}$.

8. Numeri complessi

8.1. Definizione e primi proprietá.

Definition 8.1. *L'insieme di numeri complessi* $\mathbb{C}$ *e definito come*
$$\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{z = (x, y); x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$$
con due operazioni:

- *la somma delle coppie* (x_1, y_1) *e* (x_2, y_2) *é definita con*
$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2);$$

- *il prodotto della coppie* (x_1, y_1) *e* (x_2, y_2) *é definita con*
$$(x_1, y_1).(x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1).$$

L'insieme $\mathbb{C}$ con l'operazione somma é un gruppo comutativo con elemento neutro
$$0 = (0, 0).$$
Per ogni $z = (x, y)$ poniamo
$$-z = (-x, -y).$$

Si possano verificare le proprietá

(21) $\mathbb{C}$ é gruppo commutativo rispetto la somma, cioé
$$(a + b) + c = a + (b + c), \ \forall a, b, c \in \mathbb{C}$$
$$a + 0 = 0 + a = a, \ \forall a \in \mathbb{C},$$
$$a + (-a) = 0, \quad \forall a \in \mathbb{C}$$
$$a + b = b + a, \quad \forall a, b \in \mathbb{C}.$$
$\mathbb{C}$ é anello cioé $\mathbb{C}$ é gruppo abeliano rispetto la somma come in (21), il prodotto é associativo
$$(a.b).c = a.(b.c), \ \forall a, b, c \in \mathbb{Q}$$
e la moltiplicazione e distributiva rispetto alla somma:
$$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c), \tag{22}$$
$$(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c).$$

Finalmente $\mathbb{C}$ risulta un campo, cioé anello commutativo, tale che $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ é gruppo abeliano rispetto il prodotto. In fatti, l'elemento neutro e
$$1 = (1, 0).$$
Il fatto che $\mathbb{C}$ é campo pratticamnte implica che
$$\forall a \neq 0, \exists b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \ ab = 1. \tag{23}$$

La verifica di (23) si puo fare come segue. Se
$$a = (x, y) \neq 0$$
allora
$$x^2 + y^2 \neq 0$$
e
$$b = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, -\frac{y}{x^2 + y^2} \right)$$
verifica (23).

Definition 8.2. *Se* $z = (x, y)$ *é un numero complesso allora*
$$\overline{z} = (x, -y)$$
si chiama coniugato a $z \in \mathbb{C}$.

Se $z = (x, y) \in \mathbb{C}$, allora abbiamo la relazione
$$z.\bar{z} = x^2 + y^2. \tag{24}$$
Se $z = (x, y)$ abbiamo inoltre la relazione
$$(x, 0) = \frac{z + \bar{z}}{2}. \tag{25}$$

Possiamo identificare $(x,0)$ con $x \in \mathbb{R}$. Cosi (25) diventa

$$x = \frac{z+\bar{z}}{2}.$$

Usando la definizione del prodotto in $\mathbb{C}$ si vede che per ogni numero reale $\alpha = (\alpha, 0)$ e per ogi numero complesso $z = (x,y)$ abbiamo

$$\alpha z = (\alpha, 0).(x,y) = (\alpha x, \alpha y).$$

Notazioni. Numero imaginario $\mathbf{i}$ é

$$\mathbf{i} = (0,1).$$

La parte reale di $z = (x,y)$ é

$$\mathrm{Re} z = x,$$

la parte imaginaria di $z = (x,y)$ é

$$\mathrm{Im} z = y,$$

$\square$

Abbiamo le relazioni

$$\mathbf{i}^2 = -1,\ \mathbf{i}^3 = -\mathbf{i},\ \mathbf{i}^4 = 1 \tag{26}$$

e quindi

$$\mathbf{i}^m = \begin{cases} 1, & \text{se } m = 4k, k \in \mathbb{Z}; \\ \mathbf{i}, & \text{se } m = 4k+1, k \in \mathbb{Z}; \\ -1, & \text{se } m = 4k+2, k \in \mathbb{Z}; \\ -\mathbf{i}, & \text{se } m = 4k+3, k \in \mathbb{Z}. \end{cases} \tag{27}$$

Se $z = (x,y)$ allora

$$z = x + \mathbf{i}y$$

e usando (25) troviamo

$$\mathrm{Re} z = \frac{z+\bar{z}}{2}, \quad \mathrm{Im} z = \frac{z-\bar{z}}{2\mathbf{i}}. \tag{28}$$

L'equazione $x^2 + 1 = 0$ non puo' avere soluzioni reali dato che non ha senso (nel campo dei numeri reali) considerare $\sqrt{-1}$. Tuttavia l'equazione scritta sopra ha soluzione se ampliamo l'insieme dei numeri reali con l'aggiunta dell'unita' immaginaria $\mathbf{i} = (0,1)$ che gode della proprieta'

$$\mathbf{i}^2 = -1. \tag{29}$$

Cos'i l'insieme di numeri complessi si puo rappresentare come

$$\mathbf{C} \equiv \{z = x + \mathbf{i}y, x, y \in \mathbf{R}\}.$$

Se $z = x + \mathbf{i}y$ con $x, y \in \mathbf{R}$, allora x ed y si chiamano ripettivamente parte reale e parte immaginaria del numero complesso z e si indicano con $\mathcal{R}e\ z$ ed $\mathcal{I}m\ z$.

La somma e la moltiplicazione tra numeri complessi segue le stesse regole della moltiplicazione tra numeri reali, tenendo conto del fatto che per l'unita' immaginaria $\mathbf{i}$ vale la regola (29). Quindi

$$x + \mathbf{i}y + x' + \mathbf{i}y' = (x + x') + \mathbf{i}(y + y')$$

$$(x + \mathbf{i}y)(x' + \mathbf{i}y') = xx' + \mathbf{i}xy' + \mathbf{i}x'y + \mathbf{i}^2 yy' = (xx' - yy') + \mathbf{i}(xy' + x'y).$$

Dato $z = x + \mathbf{i}y$ si definisce

$$\bar{z} = x - \mathbf{i}y$$

e

$$|z|^2 = x^2 + y^2.$$

Si puo' anche definire il rapporto tra numeri complessi come segue:

$$\frac{z}{w} = \frac{z\bar{w}}{|w|^2}$$

(notare che il secondo membro ha senso visto che la moltiplicazione dei tre numeri $z, \bar{w}, \frac{1}{|z|^2}$ si puo' fare seguendo la regola di prodotto descritta sopra).

Ogni numero complesso $z = x + \mathbf{i}y$ e' individuato da due numeri reali (la parte reale e la parte immaginaria). Pertanto i numeri complessi possono essere individuati da un punto nel piano cartesiano $x-y$. D'altra parte ogni punto (x, y) del piano puo' essere individuato in coordinate polari dalla distanza del punto dall'origine ρ e dall'angolo θ formato tra l'asse delle x e la semiretta passante per il punto (x, y) e l'origine.

Pertanto se $(x, y) = (\rho \cos\theta, \rho \sin\theta)$ (osservare che θ e' definito a meno di un multiplo intero di 2π) allora

$$x + \mathbf{i}y = \rho(\cos\theta + \mathbf{i}\sin\theta).$$

Una notazione utile e'

$$e^{\mathbf{i}\theta} = \cos\theta + \mathbf{i}\sin\theta,$$

e pertanto ogni numero complesso $x + \mathbf{i}y$ si puo' sempre esprimere in coordinate polari ed in forma compatta come segue:

$$x + \mathbf{i}y = \rho e^{\mathbf{i}\theta}$$

dove θ definito a meno di $2k\pi$ con $k \in \mathbf{Z}$.

Inoltre si ha che

$$z^n = \rho^n e^{\mathbf{i}n\theta} \text{ se } z = \rho e^{\mathbf{i}\theta} \tag{30}$$

(vedi esercizio (8.10)).

Un numero complesso z' si dice essere una radice n-esima del numero complesso z se $z'^n = z$.

In particolare se $z = \rho e^{\mathbf{i}(\theta+2k\pi)}$ e $z' = \rho' e^{\mathbf{i}\theta'}$ e' una radice n-esima di z allora si ha per definizione che

$$\rho e^{\mathbf{i}(\theta+\mathbf{2k}\pi)} = (\rho')^n e^{\mathbf{i}n\theta'}$$

dove abbiamo usato (30).

In particolare si ha che le radici n-esime di $z = \rho e^{\mathbf{i}\theta}$ sono tutti e soli i numeri complessi del tipo $\rho' e^{\mathbf{i}\theta'}$ dove $\rho' = \sqrt[n]{\rho}$ e $\theta' = \frac{\theta}{n} + \frac{2k}{n}\pi$ per qualche $k \in \mathbf{Z}$.

Esempio Calcolare $\sqrt{-1}$. Osserviamo che in base all'interpretazione geometrica dei numeri complessi si ha che $-1 = e^{\mathbf{i}(\pi+2k\pi)}$ con $k \in \mathbf{Z}$ e quindi tutte le radici di -1 sono del tipo $e^{\mathbf{i}(\frac{\pi}{2}+k\pi)}$ con $k \in \mathbf{Z}$.

Data la periodicita' di $e^{\mathbf{i}\theta}$ si ha che le uniche radici distinte di -1 possono essere individuate dai numeri $e^{\mathbf{i}\frac{\pi}{2}}$ e $e^{\mathbf{i}\pi\frac{3}{2}}$ che possono essere scritte in coordinate cartesiane come $\mathbf{i}$ e $-\mathbf{i}$.

Alcune proprietá basiliari

(1) $|z|^2 = z.\bar{z}$ per ogni numero $z \in \mathbf{C}$.
(2) $\overline{z \cdot w} = \overline{z}\ \overline{w}$ per ogni copia di numeri $z, w \in \mathbf{C}$.

(3)
$$\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}$$
per ogni copia di numeri $z, w \in \mathbf{C}$.

(4) $|z|^2 = z.\bar{z}$ per ogni numero $z \in \mathbf{C}$.

(5) $|z \cdot w| = |z||w|$ per ogni copia di numeri $z, w \in \mathbf{C}$.

(6)

(7) $|\frac{z}{w}| = \frac{|z|}{|w|}$ per ogni copia di numeri $z, w \in \mathbf{C}$.

(8) sia z_1 e z_2 sono due numeri complessi definiti in coordinate polari con
$$z_1 = \rho_1 e^{i\varphi_1},\ z_2 = \rho_2 e^{i\varphi_2}.$$
Allora la relazione $\rho_1 e^{i\varphi_1} = \rho_2 e^{i\varphi_2}$ implica $\rho_1 = \rho_2$

(9) sia z_1 e z_2 sono due numeri complessi definiti in coordinate polari con
$$z_1 = \rho_1 e^{i\varphi_1},\ z_2 = \rho_2 e^{i\varphi_2}.$$
Allora se $\rho_1 > 0$, la relazione $\rho_1 e^{i\varphi_1} = \rho_2 e^{i\varphi_2}$ implica $\rho_1 = \rho_2$ e $\varphi_1 - \varphi_2 = 2k\pi$, dove $k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$.

8.2. **Esercizi.**

Problema 8.1. *Calcolare*
$$\frac{3i-2}{i-2} + \frac{i-3}{1-2i} + \frac{(1-i)(i-2)}{(2i+1)^2}.$$

Problema 8.2 (Test 2017)**.** *Il coniugato del numero complesso* $\dfrac{(i+2)^2}{(i+1)(3-i)}$ *è:*
A: $(8-i)/5$*;* *B:* $(4-i)/10$*;* *C:* $(8-i)/10$*;* *D:* $(i+4)/5$*;* *E: N.A.*

Risposta 5

Problema 8.3 (Test 2017)**.** *Il modulo del numero complesso* $\dfrac{(i+2)^2}{(i+1)(3+i)}$ *è:*
A: $\sqrt{3}$*;* *B:* $4\sqrt{5}$*;* *C:* $\dfrac{10}{3}$*;* *D:* $\sqrt{5}/2$*;* *E: N.A.*

Risposta 4

Problema 8.4 (Test 2017)**.** *Il coniugato del numero complesso* $\dfrac{(i+2)^2}{(i+1)(3+i)}$ *è:*
A: $(7+4i)/5$*;* *B:* $(4-i)/10$*;* *C:* $(7-i)/10$*;* *D:* $(7+4i)/5$*;* *E: N.A.*

Risposta 5

Problema 8.5 (Test 2017)**.** *Il modulo del numero complesso* $\dfrac{(i+2)^2}{(i+1)(3+i)}$ *è:*
A: $\frac{10}{3}$*;* *B:* $4\sqrt{5}$*;* *C:* $\sqrt{10}$*;* *D: N.A.;* *E:* $\sqrt{5}/2$.

Risposta 5

Problema 8.6. *Dati i numeri complessi* $z = x + \mathbf{i}y$ *e* $w = x' + \mathbf{i}y'$ *(w si suppone diverso dal numero complesso nullo) esprimere la parte reale e la parte immaginaria di* $\frac{z}{w}$*.*

Problema 8.7. *Provare che*
$$|z+w| \leq |z| + |w|$$
per ogni coppiae di numeri $z, w \in \mathbf{C}$.

Problema 8.8. *Dato il numero complesso* $z = \rho e^{\mathbf{i}\theta}$ *calcolare* $|z|^2$.

Problema 8.9. *Dati* $z = \rho e^{\mathbf{i}\theta}$ *e* $z' = \rho' e^{\mathbf{i}\theta'}$ *esprimere in coordinate polari i numeri* $z.z'$ *e* $\frac{z}{z'}$.

Problema 8.10. *Esprimere in coordinate polari il numero* z^n *dove* $z = \rho e^{\mathbf{i}\theta}$.

Problema 8.11. *Calcolare*
$$\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^n$$
per $n \in \mathbb{N}$.

Problema 8.12. *Simplificare l'espressione*
$$\frac{z^3-1}{z-1} + \overline{\frac{z^3-1}{\overline{z-1}}}$$
dove $z = e^{i\theta}$.

Problema 8.13. *Calcolare*
$$z^4 + 1/z^4$$
se $z + 1/z = 1$.

Problema 8.14. *Provare che ogni numero complesso* z *diverso da zero, ammette esattamente* n *radici* n*-esime distinte.*

Problema 8.15. *Calcolare* $\sqrt[6]{\mathbf{i}}$, $\sqrt[5]{\sqrt{3}+\mathbf{i}}, \sqrt[3]{3+3\mathbf{i}}$.

Problema 8.16. *Trovare tutti i numeri complessi tali che*
$$z^n = z.$$

Problema 8.17. *Risolver l'equazione* $\bar{z}^3 z^4 = -2z^2$.

Problema 8.18. *Trovare tutti i numeri complessi tali che*
$$z^n = \bar{z}.$$

Problema 8.19. *Trovare tutti i numeri complessi tali che*
$$z^2 - |\bar{z} - 3| - 3 = 0.$$

Suggerimento. Usare la forma cartesiana $z = x + iy$.

Problema 8.20. *Trovare tutte le coppie di numeri complessi* z, w *tali che*
$$\bar{z}^2 - w^2 = -1,$$
$$\bar{w}^2 - z = 0.$$

Problema 8.21. *Esrpimere in coordinate polari il numero complesso*
$$1 + \cos\theta + \mathbf{i}\sin\theta.$$

Problema 8.22. *Rappresentare graficamnete il seguente sottoinsieme di* $\mathbf{C}$*:*
$$\{|z-1| = |z+1|, z \in \mathbf{C}\}.$$

Problema 8.23. *Siano* $z_1, ..., z_n$ *le radici* n*-esime di* 1. *Calcolare* $z_1 + ... + z_n$ *e* $z_1 \times ... \times z_n$.

Problema 8.24. *Scrivere in forma compatta i numeri* $(1+i)^n + (1-i)^n$, *con* $n \in \mathbb{N}$.

Problema 8.25. *Siano dati* $a, b, c \in \mathbb{C}$ *tali che* $|a| = |b| = |c| = 1$. *Provare che il triangolo di vertici* a, b, c *e' equilatero se e solo se* $a + b + c = 0$.

Problema 8.26. *Siano dati* $a, b, c \in \mathbb{C}$ *, provare che il triangolo di vertici* a, b, c *e'equilatero se e solo se* $a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc$.

Problema 8.27. *Rappresentare graficamenete il seguente sottoinsieme di* $\mathbf{C}$*:*

$$\{z + \bar{z} = |z|^2, z \in \mathbf{C}\}.$$

Problema 8.28. *Se* $w \in \mathbb{C}$ *é un numero complesso tale che* $|w| < 1$ *verificare l'affermazione*

$$|z| < 1 \Longleftrightarrow \left| \frac{z - w}{1 - \overline{w}\ z} \right| < 1.$$

9. Induzione

Problema 9.1. *Per ogni naturale* $n \geq 1$ *e per ogni numero reale* $x \geq -1$ *vale la disequazione di Bernouli*

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx.$$

Soluzione. Per $n = 1$ l'affermazione é ovvia.

Suppogniamo che vale la disequazione per $n = k$, cioe

$$(1 + x)^k \geq 1 + kx. \tag{31}$$

Verifichiamo l'afermazione per $n = k + 1$. Applicando (31) troviamo

$$(1+x)^{k+1} = (1+x)^k(1+x) \geq (1+kx)(1+x) = 1+kx+x+kx^2 = 1+(k+1)x+kx^2 \geq 1+(k+1)x$$

cosi concludiamo

$$(1 + x)^{k+1} \geq 1 + (k + 1)x \tag{32}$$

e quindi l'affermazione é vera per $n = k + 1$. □

Problema 9.2. *Dimostrare l'identitá*

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Problema 9.3. *Dimostrare le seguente identitá*

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Problema 9.4. *Vedere che se* $q \neq 1$ *e* $n \geq 1$ *è un numero naturale allora*

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Problema 9.5. *Verificare se per ogni* $n \geq 1$ *naturale è vera l'identità*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}.$$

Problema 9.6. *Verificare se per ogni $n \geq 2$ naturale è vera l'identità*

$$\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{n+2}{2n}.$$

Problema 9.7. *Dimostrare (utilizzando induzione) che*

$$\frac{6^{2n} - 3^n}{11}$$

e un numero intero per $n = 1, 2, 3, \ldots$

Problema 9.8. *Dimostrare*

a:

$$\sin\alpha + \sin(\alpha+h) + \cdots + \sin(\alpha+(n-1)h) = \frac{\sin(nh/2)\ \sin(\alpha+(n-1)h/2)}{\sin(h/2)},$$

b:

$$\cos\alpha + \cos(\alpha+h) + \cdots + \cos(\alpha+(n-1)h) = \frac{\sin(nh/2)\ \cos(a+(n-1)h/2)}{\sin(h/2)},$$

c:

$$\frac{\sin\alpha + \sin(3\alpha) + \cdots + \sin((2n-1)\alpha)}{\cos\alpha + \cos(3\alpha) + \cdots + \cos((2n-1)\alpha)} = \tan(n\alpha).$$

Soluzione a). Usiamo il principio di induzione.
1) per $n = 1$ abbiamo la relazione richiesta.
2) Suppogniamo che

$$\sin\alpha + \sin(\alpha+h) + \cdots + \sin(\alpha+(k-1)h) = \frac{\sin(kh/2)\ \sin(\alpha+(k-1)h/2)}{\sin(h/2)}. \tag{33}$$

3) Dobbiamo dimostrare che

$$\sin\alpha + \sin(\alpha+h) + \cdots + \sin(\alpha+(k-1)h) + \sin(\alpha+kh) = \frac{\sin((k+1)h/2)\ \sin(\alpha+kh/2)}{\sin(h/2)}. \tag{34}$$

Usando (33) si vede che (34) é equivalente a

$$\frac{\sin(kh/2)\ \sin(\alpha+(k-1)h/2)}{\sin(h/2)} + \sin(\alpha+kh) = = \frac{\sin((k+1)h/2)\ \sin(\alpha+kh/2)}{\sin(h/2)}. \tag{35}$$

L'ultima relazione é equivalente a

$$\sin(kh/2)\ \sin(\alpha+(k-1)h/2) + \sin(h/2)\sin(\alpha+kh) = = \sin((k+1)h/2)\ \sin(\alpha+kh/2). \tag{36}$$

Usiamo la relazione

$$2\sin A \sin B = \cos(A-B) - \cos(A+B). \tag{37}$$

Cosi (36) é equivalente a

$$\begin{aligned} &\cos((kh/2) - (\alpha+(k-1)h/2)) - \cos((kh/2) + (\alpha+(k-1)h/2)) + \\ &+ \cos((h/2) - (\alpha+kh)) - \cos((h/2) + (\alpha+kh)) = \\ &= \cos((k+1)h/2) - (\alpha+kh/2)) - \cos((k+1)h/2) + (\alpha+kh/2)). \end{aligned} \tag{38}$$

Semplificando si vede che dobbiamo verificare

$$\begin{aligned}(39)\qquad & \cos(\alpha - h/2) - \cos(\alpha + kh - h/2) + \\ & + \cos(\alpha + kh - h/2) - \cos(\alpha + kh + h/2) = \\ & = \cos(\alpha - h/2) - \cos(\alpha + kh + h/2).\end{aligned}$$

Questa relazione ovviamente é vera e quindi il principio d'induzione completa la soluzione. □

Problema 9.9. *Dimostrare le seguente identitá:*

$$x^{2n+1} - 1 = (x-1)\prod_{k=1}^{n}\left(x^2 - 2x\cos\left(\frac{2k\pi}{2n+1}\right) + 1\right),$$

$$x^{2n+1} - 1 = (x+1)\prod_{k=1}^{n}\left(x^2 + 2x\cos\left(\frac{2k\pi}{2n+1}\right) + 1\right),$$

$$x^{2n} + 1 = \prod_{k=1}^{n}\left(x^2 - 2x\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) + 1\right).$$

Problema 9.10. *Dimostrare le seguente identitá:*

$$\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)\sin\left(\frac{2\pi}{2n}\right)\cdots\sin\left(\frac{(n-1)\pi}{2n}\right) = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}},$$

$$\cos\left(\frac{2\pi}{2n+1}\right)\cos\left(\frac{4\pi}{2n+1}\right)\cdots\cos\left(\frac{2n\pi}{2n+1}\right) = \frac{(-1)^{n/2}}{2^{n-1}}.$$

Problema 9.11. *Sia a_n la successione di Fibonacci definita cosi $a_0 = a_1 = 1$,*

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1}.$$

Dimostrare che

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= a_0 + a_1 + \cdots + a_n + 1, \\ a_{2n+2} &= a_1 + a_3 + \cdots + a_{2n+1}, \\ a_{2n+1} &= 1 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{2n}, \\ a_n^2 - a_{n+1}a_{n-1} &= (-1)^{n+1}. \end{aligned}$$

10. Successioni monotone

Regola 1. Se la successione a_n é crescente e la funzione $f(x)$ ha campo di esistenza D, tale che $a_n \in D$, la funzione é crescente, allora la successione $f(a_n)$ é crescente.

Regola 2. Se la successione a_n é decrescente e la funzione $f(x)$ ha campo di esistenza D, tale che $a_n \in D$, la funzione é crescente, allora la successione $f(a_n)$ é decrescente.

Regola 3. Se la successione a_n é limitata e la funzione $f(x)$ ha campo di esistenza D, tale che $a_n, \sup a_n, \inf a_n \in D$, la funzione é crescente, allora valgono le relazioni

$$(40)\qquad \sup f(a_n) = f(\sup a_n), \inf f(a_n) = f(\inf a_n),$$

Regola 4. Se la successione a_n é crescente e la funzione $f(x)$ ha campo di esistenza D, tale che $a_n \in D$, la funzione é decrescente, allora la successione $f(a_n)$ é decrescente.

Regola 5. Se la successione a_n é decrescente e la funzione $f(x)$ ha campo di esistenza D, tale che $a_n \in D$, la funzione é decrescente, allora la successione $f(a_n)$ é crescente.

Regola 6. Se la successione a_n é limitata e la funzione $f(x)$ ha campo di esistenza D, tale che $a_n, \sup a_n, \inf a_n \in D$, la funzione é decrescente, allora valgono le relazioni

$$\sup f(a_n) = f(\inf a_n), \inf f(a_n) = f(\sup a_n), \tag{41}$$

Problema 10.1. *Studiare l'insieme descritto dalla successione*

$$a_n = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N},$$

determinando $\sup a_n, \inf a_n$, *specificando se si tratta di minimo e massimo, eventuale monotonia e punti di accumulazione.*

Problema 10.2. *Studiare l'insieme descritto dalla successione*

$$a_n = \log \frac{10^{n+3}+1}{10^{n+3}-1}, n \in \mathbb{N},$$

determinando $\sup a_n, \inf a_n$, *specificando se si tratta di minimo e massimo, eventuale monotonia e punti di accumulazione.*

Problema 10.3. *Vedere se la successione*

$$a_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+n}$$

cresce o decresce.

Soluzione. Abbiamo

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n} < \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{n} = 0$$

e quindi la successione é decrescente.

□

11. Limiti notevoli

Se a_n e limitata e $b_n \to 0$ allora $a_n b_n \to 0$.

$$q^n \to \begin{cases} 0 & \text{se } |q| < 1, \\ +\infty & \text{se } q > 0 \\ 1 & \text{se } q = 1, \\ \text{non ha limite} & \text{se } q \leq -1. \end{cases} \tag{42}$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to \mathrm{e}, \left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{b_n} \to \mathrm{e}^{\lim b_n/a_n}, \text{se } \exists \lim b_n/a_n. \tag{43}$$

$$a_n \to 0 \Rightarrow \frac{\sin a_n}{a_n} \to 1, \tag{44}$$

$$a_n \to 0 \Longrightarrow \frac{\mathrm{e}^{a_n}-1}{a_n} \to 1, \tag{45}$$

$$a_n \to 0 \Rightarrow \frac{\arcsin a_n}{a_n} \to 1, \tag{46}$$

$$a_n \to 0 \Rightarrow \frac{(1+a_n)^\alpha - 1}{a_n} \to \alpha. \tag{47}$$

La sostituzione $a_n = \ln(1+b_n)$ con $b_n \to 0$ e la relazione in (45) implicano

$$\frac{\ln(1+b_n)}{b_n} \to 1, \text{ quando } \ b_n \to 0. \tag{48}$$

Confronti:

$$a_n \to \infty \Rightarrow \frac{a_n^A}{B^{a_n}} \to 0 \ \forall A \in \mathbb{R}, \forall B > 1. \tag{49}$$

$$a_n \to \infty \Rightarrow \frac{\log_B a_n}{a_n^A} \to 0 \ \forall A > 0, \forall B > 1. \tag{50}$$

$$a_n > 0 \text{ e } \frac{a_{n+1}}{a_n} \to A \Rightarrow (a_n)^{1/n} \to A. \tag{51}$$

Se

$$a_n > 0, \frac{a_{n+1}}{a_n} \to A$$

allora

$$\lim_{n\to\infty} (a_n)^{1/n} = \begin{cases} 0 & \text{se } A < 1, \\ \infty & \text{se } A > 1, \\ \text{no si puo dire nulla} & \text{se } A = 1. \end{cases} \tag{52}$$

Problema 11.1 (Test 2017)**.** *La successione* $\sqrt[n]{3^n + e^n n^2}$ *ha limite*
A: 1; *B: non esistente;* *C:* $+\infty$; *D:* 3; *E: N.A.*

Risposta 4

Problema 11.2 (Test 2017)**.** *La successione* $\sqrt[n]{2^n + e^n n^2}$ *ha limite*
A: 1; *B: non esistente;* *C:* $+\infty$; *D:* 2; *E: N.A.*

Risposta 5

Problema 11.3 (Test 2017)**.** *La successione* $\sqrt[n]{n^2 3^n + e^n}$ *ha limite*
A: 3; *B:* 1; *C:* $+\infty$; *D: non esistente;* *E: N.A.*

Risposta 1

Problema 11.4. *Calcolare*

a)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2+1}}{\log_2 n}$$

b)

$$\lim_{n\to\infty} (n + 3\sqrt{n}\sin n)^{1/4} - (n + \sqrt{n}\sin n)^{1/4},$$

c)

$$\lim_{n\to\infty} n^2(\cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1),$$

d)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{n(\cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1)},$$

e)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^2 + 2^2 + \cdots n^2}{n^3}$$

Soluzione a). Usiamo le notazione $o(1)$ per ogni successione che tende a 0. Abbiamo

$$\frac{\sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2+1}}{\log_2 n} = \frac{n}{(\sqrt{n^2+n+1} + \sqrt{n^2+1}) \log_2 n} =$$

$$= \frac{n}{2n(1+o(1)) \log_2 n} = \frac{1}{2(1+o(1)) \log_2 n} \to 0.$$

$\square$

Soluzione b). Usiamo le notazione $o(1)$ per ogni successione che tende a 0 e usiamo le relazioni

$$\sqrt[4]{A} - \sqrt[4]{B} = \frac{\sqrt[2]{A} - \sqrt[2]{B}}{\sqrt[4]{A} + \sqrt[4]{B}} = \frac{A-B}{(\sqrt[4]{A} + \sqrt[4]{B})(\sqrt[2]{A} + \sqrt[2]{B})}$$

e quindi abbiamo

$$(n + 3\sqrt{n}\sin n)^{1/4} - (n + \sqrt{n}\sin n)^{1/4} =$$

$$= \frac{2\sqrt{n}\sin n}{((n+3\sqrt{n}\sin n)^{1/4} + (n+\sqrt{n}\sin n)^{1/4})((n+3\sqrt{n}\sin n)^{1/2} + (n+\sqrt{n}\sin n)^{1/2})} =$$

$$= \frac{2\sqrt{n}\sin n}{2n^{1/4}(1+o(1))2n^{1/2}(1+o(1))} =$$

$$= \frac{2\sqrt{n}\sin n}{4n^{3/4}(1+o(1))} = \frac{\sin n}{2n^{1/4}(1+o(1))} \to 0.$$

$\square$

Soluzione c). Abbiamo la relazione

$$\cos x - 1 = -2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

e quindi con $x_n \to 0$ abbiamo

$$\frac{1-\cos x_n}{x_n^2} = 2\left(\frac{\sin x_n}{x_n}\right)^2 \to 2 \tag{53}$$

e quindi

$$n^2(\cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1) = -\frac{1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)}{1/n^2} \to -2.$$

$\square$

Soluzione d).

$$\frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{n(\cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1)} =$$

$$= \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{1/n} \frac{1}{n^2(\cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1)}$$

e usando (53) troviamo che il limite cercato e $-1/2$.

$\square$

Soluzione e). Abbiamo la relazione

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

La relazione si puo verificare con induzione. Cosi troviamo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^2 + 2^2 + \cdots n^2}{n^3} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \frac{1}{3}.$$

□

Problema 11.5. *Trovare il limite*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^3+n} - n^{3/2}}{n + 6\sin n}.$$

Soluzione. Dopo razzionalizzazione troviamo

$$\frac{\sqrt{n^3+n} - n^{3/2}}{n + 6\sin n} = \frac{n}{(\sqrt{n^3+n} + n^{3/2})n(1+o(1))} = \frac{n}{2n^{3/2}n(1+o(1))} = 0.$$

□

Problema 11.6. *Trovare il limite della successione*

$$a_n = \sqrt{n}\ln(1+\mathrm{e}^n) - n^{3/2}.$$

Soluzione. Abbiamo le relazioni

$$\sqrt{n}\ln(1+\mathrm{e}^n) - n^{3/2} = \sqrt{n}\ln \mathrm{e}^n(1+\mathrm{e}^{-n}) - n^{3/2} =$$

$$= \sqrt{n}\ln \mathrm{e}^n + \sqrt{n}\ln(1+\mathrm{e}^{-n}) - n^{3/2} = n^{3/2} + \sqrt{n}\ln(1+\mathrm{e}^{-n}) - n^{3/2} = \sqrt{n}\ln(1+\mathrm{e}^{-n})$$

Usando la relazione (48) troviamo

$$\sqrt{n}\ln(1+\mathrm{e}^{-n}) = \sqrt{n}\mathrm{e}^{-n}\frac{(\ln(1+\mathrm{e}^{-n}))}{e^{-n}}.$$

La successione

$$\sqrt{n}\mathrm{e}^{-n}$$

tende a 0. Abbiamo inoltre

$$\frac{(\ln(1+\mathrm{e}^{-n}))}{e^{-n}} \to 1$$

grazie a (48). Così toviamo

$$\sqrt{n}\mathrm{e}^{-n}\frac{(\ln(1+\mathrm{e}^{-n}))}{e^{-n}} \to 0.$$

□

Risposta 0

Problema 11.7. *Trovare il limite della successione*

$$a_n = \sqrt{n}\ln(1+\mathrm{e}^n) - n\sqrt{n-1}.$$

Risposta $-\infty$.

Problema 11.8. *Studiare la convergenza della successione*

$$a_n = n^\alpha \left(\sqrt[3]{n^2 + \arctan n} - \sqrt[3]{n^2 + n} \right)$$

per $\alpha < 1/3$.

Problema 11.9.

$$a_n = \left(\frac{n!}{n^n} \right)^{1/n}.$$

Soluzione. Usiamo la seguente proprietà (vedi (52)) Se

$$b_n > 0, \frac{b_{n+1}}{b_n} \to A$$

allora

$$\lim_{n\to\infty} (b_n)^{1/n} = \begin{cases} 0 & \text{se } A < 1, \\ \infty & \text{se } A > 1, \\ \text{no si puo dire nulla} & \text{se } A = 1. \end{cases} \tag{54}$$

Ponendo

$$b_n = \frac{n!}{n^n}$$

abbiamo

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{n!} = \frac{n^n}{(n+1)^n} \to \frac{1}{e} < 1$$

e quindi

$$a_n = \left(\frac{n!}{n^n} \right)^{1/n} \to 0.$$

□

Problema 11.10. *Calcolare*

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^n}{4^n (n-1)! n! (n+1)!} (2n)! \right)^{1/n}.$$

Soluzione. Sia

$$a_n = \frac{n^n}{4^n (n-1)! n! (n+1)!} (2n)!$$

Abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(n+1)^{n+1} (2n+2)!}{4^{n+1} (n)! (n+1)! (n+2)!} \frac{4^n (n-1)! n! (n+1)!}{n^n (2n)!} = \\ &= \frac{1}{4} \frac{(n+1)^n}{n^n} \frac{(n+1)(2n+2)(2n+1)}{n(n+1)(n+2)}. \end{aligned}$$

Usando

$$\frac{(n+1)^n}{n^n} \to e,$$

$$\frac{(n+1)(2n+2)(2n+1)}{n(n+1)(n+2)} \to 4,$$

concludiamo

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \to 0$$

utilizzando il criterio di Cesaro troviamo

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^n}{4^n (n-1)! n! (n+1)!} (2n)! \right)^{1/n} = e.$$

□

Problema 11.11. *Calcolare*

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{(n)^n}{3^{n-1} (n+3)! n! (n+2)!} (2n-1)! \right)^{1/n}.$$

Problema 11.12. *Calcolare*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\arcsin\left(\frac{1}{n}\right) \sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right)}.$$

Problema 11.13. *Calcolare*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^\alpha - n^\alpha}{n^{\alpha-1}}$$

al variare del parametro reale α.

Problema 11.14. *Calcolare*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+\sin n)^{1/n} (2+\sin n)^n}{n!}.$$

Soluzione. Abbiamo le relazioni

$$n + \sin n = n(1+o(1)), \;\; 2 + \sin n \le 3.$$

Cosi troviamo

$$\frac{(n+\sin n)^{1/n} (2+\sin n)^n}{n!} \le (n^{1/n}(1+o(1)) \frac{3^n}{n!}. \tag{55}$$

Abbiamo

$$n^{1/n} = e^{(\ln n)/n} \to e^0 = 1.$$

Inoltre

$$a_n = \frac{3^n}{n!}$$

tende a zero. In fatti

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{3^n} = \frac{3}{n+1} \to 0$$

e quindi

$$a_n \to 0.$$

Abbiamo la relazione

$$(n^{1/n}(1+o(1)) \frac{3^n}{n!} = (n^{1/n}(1+o(1)) a_n \to 1.0 = 0$$

e possiamo concludere che (55) e il principio di confronto implicano

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+\sin n)^{1/n} (2+\sin n)^n}{n!}.$$

□

Problema 11.15. *Calcolare l'estremo superiore, l'estremo inferiore e il limite della successione*

$$a_n = n + \frac{1}{3n} - \sqrt{n^2+1}.$$

Problema 11.16. *Studiare la convergenza della successione*

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n.$$

Soluzione. La successione é decrescente

$$a_{n+1} - a_n \leq 0. \tag{56}$$

In fatti,

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Sappiamo inoltre che la successione

$$b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

e decrescente e tende ad e e quindi

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \geq e \implies \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \geq \frac{1}{n+1}.$$

Cosi troviamo

$$a_{n+1} - a_n \leq 0.$$

In modo simile si puo vedere che la successione

$$d_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \ln n$$

e crescente. La disequazione

$$d_n \leq a_n$$

implica

$$d_2 = 1 - \ln 2 \leq d_n \leq a_n$$

e quindi la successione a_n é limitata e quindi converge.

□

Problema 11.17. *Studiare la convergenza della successione*

$$a_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+n}$$

Soluzione. Abbiamo

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n} \leq frac12n + \frac{1}{2n} - \frac{1}{n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n} = 0$$

e quindi la successione e decrescente. Ovviamente $a_n \geq 0$. La succesione decrescente e limitata sempre converge. □

Problema 11.18. *Studiare la convergenza della successione*

$$a_n = \frac{1}{n^\alpha} + \frac{1}{(n+1)^\alpha} + \cdots + \frac{1}{(n+n)^\alpha}$$

al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$.

Problema 11.19. *Sia*

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{1}{2} + \sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2}\right) \right|^{\alpha n}.$$

Studiare la convergenza al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$.

Problema 11.20. *Studiare la convergenza della successione*
$$n^\alpha \cos\left(\frac{\pi}{2} + \sqrt{n} - \sqrt{n-1}\right)$$
al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$.

11.1. **Successioni per riccorrenza.**

Problema 11.21. *Sia*
$$a_1 = 1, a_{n+1} = 4 - \frac{2}{1+a_n}.$$
Studiare la convergenza della successione per ricorrenza.

Soluzione. La funzione
$$f(x) = 4 - \frac{2}{1+x}, x > -1$$
é crescente e
$$f(0) = 2, 2 \leq x \leq 4.$$
Questo implica che la successione a_n é crescente e limitata $a_n \in (2,4)$. Il punto fisso e
$$4 - \frac{2}{1+x} = x \quad \Longleftrightarrow 4(1+x) - 2 = x^2 + x$$
e l'equazione
$$x^2 - 3x - 2 = 0$$
ha soluzioni
$$x_1 = \frac{3+\sqrt{17}}{2}, x_2 = \frac{3-\sqrt{17}}{2}$$
L'unica soluzione in $(2,4)$ é x_1 e quindi a_n tende a x_1.

□

Problema 11.22. *La successione per ricorrenza é definita come segue*
$$a_n = \sqrt{7a_{n-1} + 9}, \quad a_1 = 1.$$
Studiare la convergenza della successione.

Soluzione. La funzione
$$f(x) = \sqrt{7x+9}, x > -9/7$$
e crescente, quindi la successione é crescente. Il punto fisso e la soluzione positiva del problema
$$x^2 = 7x + 9,$$
cioé
$$x_0 = \frac{7+\sqrt{85}}{2}.$$
Possiamo verificare per induzione che
$$a_n \leq x_0.$$
Infatti se
$$1 \leq a_{n-1} \leq x_0,$$
allora
$$a_n = f(a_{n-1}) < f(x_0) = x_0.$$
Per questo la successione tende a x_0. □

Problema 11.23. *La successione per ricorrenza é definita come segue*

$$a_n = \sqrt{3a_{n-1} + 4}, \quad a_1 = 0.$$

Vedere se:
a) la successione é limitata;
b) se esiste un intero $k > 0$, tale che la successione

$$a_k, a_{k+1}, \cdots$$

é crescente.

Sogg. La sucessione cresce e $a_n \leq 4$.

Problema 11.24. *La successione per ricorrenza é definita come segue*

$$a_n = \sqrt{2a_{n-1} + 2}, \quad a_1 = 2.$$

Vedere se:
a) la successione é limitata;
b) se esiste un intero $k > 0$, tale che la successione

$$a_k, a_{k+1}, \cdots$$

é crescente.

Sogg. La successione cresce e $a_n \leq 3$.

Problema 11.25. *La successione per ricorrenza é definita come segue*

$$a_n = \frac{a_{n-1}}{1 + |a_{n-1}|}, \quad a_1 = 1.$$

Vedere se:
a) la successione é limitata;
b) se esiste un intero $k > 0$, tale che la successione

$$a_k, a_{k+1}, \cdots$$

é crescente.
c) la successione $1/a_n$ é limitata.

Sogg. La successione e decrescente , $a_n \geq 0$.

Problema 11.26. *La successione per ricorrenza é definita come segue*

$$a_n = \frac{a_{n-1}^2 + 1}{2}, \quad a_1 = 2.$$

Vedere se:
a) esiste un intero $k > 0$, tale che la successione

$$a_k, a_{k+1}, \cdots$$

é crescente;
b) la successione é limitata.

Sogg. $a_n \geq 0$, la successione é crescente e $a_n \geq n$.

Problema 11.27. *La successione per ricorrenza é definita come segue*

$$a_n = \frac{a_{n-1}^2 + 2}{2a_{n-1}}, \quad a_1 = 3.$$

Vedere se esiste un intero $k > 0$, tale che la successione

$$a_k, a_{k+1}, \cdots$$

é decrescente.

Sogg. Dimostrare che $a_{n+1} \leq a_n \leq \sqrt{2}$.

Problema 11.28. *La successione per ricorrenza é definita come segue*

$$a_n = \alpha + \frac{\beta}{a_{n-1}}, \quad a_1 = 3,$$

dove $\alpha, \beta > 0$. Vedere se la successione
a) $a_2, a_4, a_6, \cdots, a_{2k}, \cdots$ é decrescente;
b) $a_1, a_3, a_5, \cdots, a_{2k+1}, \cdots$ é crescente.

Sogg. Verificare che $(a_{n+1} - a_n)(a_n - a_{n-1}) < 0$, e $|a_{n+1} - a_n| < |a_n - a_{n-1}|$.

Problema 11.29. *Sia $x_0 = 1$ e x_n e definita per ricorrenza*

$$x_{n+1} = x_n + \sin x_n.$$

a)Dimostrare, che $0 < x_n < \pi$.
b) Dimostrare che x_n cresce.
c) Calcolare il limite di x_n.