

Compito di Analisi Matematica, Seconda parte, Tema X

19 febbraio 2019

Esercizio 1. Determinare al variare del parametro reale x il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^x \left(\cos \left(\left| \frac{\pi}{2} + 1 - 1/n^2 \right| - \left| -1 + \frac{1}{n} \right| \right) \right).$$

Soluzione. Abbiamo la relazione

$$\left| \frac{\pi}{2} + 1 - 1/n^2 \right| - \left| -1 + \frac{1}{n} \right| = \pi/2 + 1/n + O(1/n^2)$$

e quindi

$$\cos \left(\left| \frac{\pi}{2} + 1 - 1/n^2 \right| - \left| -1 + \frac{1}{n} \right| \right) = -\sin(1/n) + o(1/n) = -1/n + O(1/n^2).$$

Così troviamo

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^x \left(\cos \left(\left| \frac{\pi}{2} + 1 - 1/n^2 \right| - \left| -1 + \frac{1}{n} \right| \right) \right) = -\sum_{n=1}^{+\infty} n^{x-1} (1 + O(1/n)).$$

La convergenza della serie è solo per $x - 1 < -1$, $x < 0$.

□

Istruzioni: Verranno corrette solo le risposte scritte su questo foglio. La soluzione di ogni esercizio deve essere giustificata con i passaggi fondamentali del procedimento e scritta nello spazio bianco sotto ad ogni esercizio.

Esercizio 2. Vedere per quali valori dei parametri λ in $\mathbb{R}$ esiste una soluzione limitata in $\mathbb{R}$ del problema di Cauchy

$$\begin{aligned}y'(x) + \lambda xy(x) &= x \\ y(0) &= 1.\end{aligned}$$

Soluzione. La soluzione per $\lambda \neq 0$ é

$$y(x) = \frac{1}{\lambda} + \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda x^2/2}.$$

Così l'unico caso quando $y(x)$ è limitata é

$$\lambda > 0.$$

□

Esercizio 3.

a): Studiare l'integrabilità della funzione

$$f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{4x - x^2}}, \quad x \in (0, 4);$$

b): calcolare l'integrale (se esiste)

$$\int_0^4 f(t) dt.$$

Soluzione a). Abbiamo i seguenti sviluppi di Taylor per $x \rightarrow 0$

$$f(x) \sim \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$$

e per $x \rightarrow 4$

$$f(x) \sim \frac{c}{\sqrt{4-x}}$$

e quindi f è integrabile in $(0, 4)$. □

Soluzione b). Sia

$$I = \int_0^4 f(t) dt.$$

Dopo la sostituzione $t = 2 + u$ troviamo

$$I = \int_{-2}^2 \frac{\ln(2+u)}{\sqrt{4-u^2}} du = \int_0^2 \frac{\ln(4-u^2)}{\sqrt{4-u^2}} du.$$

La sostituzione

$$t = 4 - v^2$$

ci dà

$$I = \int_0^2 \frac{\ln(4-v^2)}{\sqrt{4-v^2}v} 2v dv = 2 \int_0^2 \frac{\ln(4-v^2)}{\sqrt{4-v^2}} dv = 2I$$

La relazione $I = 2I$ implica $I = 0$. □

Compito di Analisi Matematica, Seconda parte, Tema Y

19 febbraio 2019

Esercizio 1. Determinare al variare del parametro reale x il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^x \left(\cos \left(\left| \frac{\pi}{2} + 1 - 1/n^2 \right| - \left| -1 + \frac{1}{n} \right| \right) \right).$$

Soluzione. Abbiamo la relazione

$$\left| 1 - 1/n^2 \right| - \left| -1 + \frac{1}{n} \right| = 1/n + O(1/n^2)$$

e quindi

$$\cos \left(\left| 1 - 1/n^2 \right| - \left| -1 + \frac{1}{n} \right| \right) = 1 + O(1/n).$$

Così troviamo

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^x \left(\cos \left(\left| 1 - 1/n^2 \right| - \left| -1 + \frac{1}{n} \right| \right) \right) = - \sum_{n=1}^{+\infty} n^x (1 + O(1/n)).$$

La convergenza della serie è solo per $x < -1$.

□

Istruzioni: Verranno corrette solo le risposte scritte su questo foglio. La soluzione di ogni esercizio deve essere giustificata con i passaggi fondamentali del procedimento e scritta nello spazio bianco sotto ad ogni esercizio.

Esercizio 2. Vedere per quali valori dei parametri λ in $\mathbb{R}$ esiste una soluzione limitata in $\mathbb{R}$ del problema di Cauchy

$$y'(x) + \lambda xy(x) = 3x$$

$$y(0) = 1.$$

Soluzione. La soluzione per $\lambda \neq 0$ é

$$y(x) = \frac{3}{\lambda} + \left(1 - \frac{3}{\lambda}\right) e^{-\lambda x^2/2}.$$

Così l'unico caso quando $y(x)$ è limitata é

$$\lambda > 0.$$

□

Esercizio 3.

a): Studiare l'integrabilità della funzione

$$f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{4x - x^2}}, \quad x \in (0, 4);$$

b): calcolare l'integrale (se esiste)

$$\int_0^4 f(t) dt.$$

Soluzione a). Abbiamo i seguenti sviluppi di Taylor per $x \rightarrow 0$

$$f(x) \sim \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$$

e per $x \rightarrow 4$

$$f(x) \sim \frac{c}{\sqrt{4-x}}$$

e quindi f è integrabile in $(0, 4)$. □

Soluzione b). Sia

$$I = \int_0^4 f(t) dt.$$

Dopo la sostituzione $t = 2 + u$ troviamo

$$I = \int_{-2}^2 \frac{\ln(2+u)}{\sqrt{4-u^2}} du = \int_0^2 \frac{\ln(4-u^2)}{\sqrt{4-u^2}} du.$$

La sostituzione

$$t = 4 - v^2$$

ci dà

$$I = \int_0^2 \frac{\ln(4-v^2)}{\sqrt{4-v^2}} 2v dv = 2 \int_0^2 \frac{\ln(4-v^2)}{\sqrt{4-v^2}} dv = 2I$$

La relazione $I = 2I$ implica $I = 0$. □