

Scritto per il corso di Analisi Matematica
corso di laurea in Ingegneria Gestionale
Università di Pisa
24/6/2019

(Prima parte, gruppo 1)

Tempo a disposizione: 50 minuti.

Scrivere solo la risposta nella tabella in fondo, in modo leggibile ed inequivocabile.

E' ammesso alla seconda parte chi avrà risposto correttamente ad almeno 6 dei seguenti esercizi.

Nome:

Cognome:

Numero di matricola:

Esercizio 1. Si calcoli il valore (se esiste) del seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-|x-1|}}{x+1}.$$

Soluzione.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-|x-1|}}{x+1} = 0.$$

□

Esercizio 2. Sia $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ definita come

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/|x-2|}, & \text{se } x \neq 2; \\ 0, & \text{se } x = 2. \end{cases}$$

Si calcoli la seconda derivata in $x = 2$ della funzione $g(x) = f(x)/(x^2 - 4)$.

Soluzione. Si può dimostrare con induzione in k che $g(x)$ è differenziabile k volte in $x = 2$ e la sua derivata k -esima è 0. Infatti, per ogni intero $N \geq 1$ abbiamo

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{(x-2)^N} = 0.$$

Questa proprietà si può dimostrare con la sostituzione

$$y = \frac{1}{x-2}$$

e notando che $|y| \rightarrow +\infty$ quando $x \rightarrow 2$ possiamo usare la proprietà

$$\lim_{y \rightarrow \pm\infty} y^N e^{-|y|} = 0.$$

□

Esercizio 3. Dire il numero totale di massimi locali e globali della funzione $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ definita come

$$f(x) = x - \frac{x \ln(3+x)}{209}.$$

Soluzione. La funzione

$$f'(x) = 1 - \frac{\ln(3+x)}{209} - \frac{x}{209(3+x)}$$

ha $x > 0$ tale che $f'(x) = 0$. Così la funzione cresce in $(0, x_1)$ e decresce dopo. Ha unico massimo (globale e locale). $\square$

Esercizio 4. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \frac{|x-2| - |x+3|}{e^x + e^{-x}}$$

e sia $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + o(x^3)$ il suo polinomio di Taylor nel punto $x = 0$ fino al grado 3. Si calcoli il valore di $a_0 + a_1 + a_2 + a_3$.

Soluzione. Abbiamo la relazione

$$|x-2| - |x+3| = 2 - x - (x+3) = -1 - 2x$$

per x vicino a 0. Dobbiamo trovare sviluppo di Taylor fino ad ordine 3 e abbiamo

$$f(x) = \frac{|x-2| - |x+3|}{e^x + e^{-x}} = -\frac{1}{2} - x + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{2} + o(x^3)$$

e quindi

$$a_0 = -\frac{1}{2}, a_1 = -1, a_2 = \frac{1}{4}, a_3 = \frac{1}{2}.$$

Troviamo

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = -\frac{3}{4}.$$

$\square$

Esercizio 5. Calcolare l'integrale

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{(1+x^2)^{3/2}}.$$

Soluzione. Abbiamo

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^{3/2}} = \frac{x}{(1+x^2)^{1/2}}$$

e quindi

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{(1+x^2)^{3/2}} = \sqrt{2}.$$

$\square$

Esercizio 6. Vedere se l'integrale

$$\int_0^\infty \left(\frac{|1-2x^2+x^4|}{x^4+1} + \frac{(1+x^2)^2}{x^4+1} \right) \sin x dx$$

esiste.

Soluzione. Abbiamo la relazione

$$\left(\frac{|1 - 2x^2 + x^4|}{x^4 + 1} + \frac{(1 + x^2)^2}{x^4 + 1} \right) = 2$$

e quindi l'integrale improprio

$$\int_0^\infty 2 \sin x dx$$

non esiste

□

Esercizio 7. Si calcoli il valore (se esiste) del seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 \sin(x * \pi/2) - |-x - 1|}{|x - 2| - 1}.$$

Soluzione. Abbiamo la relazione

$$\frac{2 \sin(x * \pi/2) - |-x - 1|}{|x - 2| - 1} = \frac{2 \sin(x * \pi/2) + 2 - x + 1}{1 - x}$$

e quindi

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 \cos(x * \pi) + 2 + x - 1}{1 - x} = 1.$$

□

Esercizio 8. Trovare il numero delle soluzioni del problema

$$xy''(x) + xy'(x) = 1, y(0) = 1, y'(0) = 0.$$

Soluzione. Il problema ha zero soluzioni, si vede dopo la sostituzione $x = 0$.

□

Scritto del corso di Analisi Matematica
corso di laurea in Ingegneria Gestionale
Università di Pisa
24/06/2019

(Prima parte, gruppo 2)

Tempo a disposizione: 50 minuti.

Scrivere solo la risposta accanto ad ogni esercizio, in modo leggibile ed inequivocabile.

E' ammesso alla seconda parte chi avrà risposto correttamente ad almeno 7 dei seguenti esercizi.

Nome:

Cognome:

Numero di matricola:

Esercizio 1. Dire il numero totale di massimi locali e globali della funzione $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ definita come

$$f(x) = x - \frac{x \ln(4+x)}{219}.$$

Soluzione. La funzione

$$f'(x) = 1 - \frac{\ln(4+x)}{219} - \frac{x}{219(4+x)}$$

ha $x > 0$ tale che $f'(x) = 0$. Così la funzione cresce in $(0, x_1)$ e decresce dopo. Ha unico massimo (globale e locale). $\square$

Esercizio 2. Si calcoli (se esiste) il valore del seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x) + x}{1 + \ln(1 + x^x)}.$$

Soluzione. Abbiamo la relazione

$$\frac{\ln(x) + x}{1 + \ln(1 + x^x)} = \frac{x(1 + o(1))}{x \ln x (1 + o(1))}$$

e quindi

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x) + x}{1 + \ln(1 + x^x)} = 0.$$

$\square$

Esercizio 3. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \frac{|x+4| - |x+3|}{e^x + e^{-x}}$$

e sia $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + o(x^3)$ il suo polinomio di Taylor nel punto $x = 0$ fino al grado 3. Si calcoli il valore di $a_0 + a_1 + a_2 + a_3$.

Soluzione. Abbiamo la relazione

$$|x+4| - |x+3| = x+4 - (x+3) = 1$$

per x vicino a 0. Dobbiamo trovare sviluppo di Taylor fino ad ordine 3 e abbiamo

$$f(x) = \frac{1}{e^x + e^{-x}} = \frac{1}{2} - \frac{x^2}{4} + o(x^3)$$

e quindi

$$a_0 = \frac{1}{2}, a_1 = 0, a_2 = -\frac{1}{4}, a_3 = 0.$$

Troviamo

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = \frac{1}{4}.$$

□

Esercizio 4. Calcolare l'integrale

$$\int_{-2}^2 \frac{dx}{(1+x^2)^{3/2}}.$$

Soluzione. Abbiamo

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^{3/2}} = \frac{x}{(1+x^2)^{1/2}}$$

e quindi

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{(1+x^2)^{3/2}} = \frac{4}{\sqrt{5}}.$$

□

Esercizio 5. Vedere se l'integrale

$$\int_0^\infty \left(\frac{|1-2x^2+x^4|}{x^4+1} + \frac{(1+x^2)^2}{x^4+1} \right) \sin x \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

esiste.

Soluzione. Abbiamo la relazione

$$\left(\frac{|1-2x^2+x^4|}{x^4+1} + \frac{(1+x^2)^2}{x^4+1} \right) = 2$$

e quindi l'integrale oscillante

$$\int_0^\infty 2 \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$$

esiste.

□

Esercizio 6. Trovare il numero delle soluzioni del problema

$$xy''(x) + xy'(x) = 1, y(1) = 1, y'(1) = 0.$$

Soluzione. Il problema di Cauchy ha unica soluzione.

□

Esercizio 7. Sia $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ definita come

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/|3x-2|}, & \text{se } x \neq 2/3; \\ 0, & \text{se } x = 2/3. \end{cases}$$

Si calcoli la seconda derivata in $x = 2/3$ della funzione $g(x) = f(x)/(3x-2)$.

Soluzione. Si può dimostrare con induzione in k che $g(x)$ è differenziabile k volte in $x = 2/3$ e la sua derivata k -esima è 0. Infatti, per ogni intero $N \geq 1$ abbiamo

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{(3x-2)^N} = 0.$$

Questa proprietà si può dimostrare con la sostituzione

$$y = \frac{1}{3x-2}$$

e notando che $|y| \rightarrow +\infty$ quando $x \rightarrow 2$ possiamo usare la proprietà

$$\lim_{y \rightarrow \pm\infty} y^N e^{-|y|} = 0.$$

□

Esercizio 8. Si calcoli il valore (se esiste) del seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 \sin(x * \pi/2) - |-x-1|}{|x-2|-1}.$$

Soluzione. Abbiamo la relazione

$$\frac{2 \cos(x * \pi) + |-x-1|}{|x-2|-1} = \frac{2 \sin(x * \pi/2) - 2 - x + 1}{1-x}$$

e quindi

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 \sin(x * \pi/2) - 2 - x + 1}{1-x} = 1.$$

□

Scritto del corso di Analisi Matematica
corso di laurea in Ingegneria Gestionale
Università di Pisa
24/06/2019

(Prima parte, gruppo 3)

Tempo a disposizione: 50 minuti.

Scrivere solo la risposta accanto ad ogni esercizio, in modo leggibile ed inequivocabile.

E' ammesso alla seconda parte chi avrà risposto correttamente ad almeno 7 dei seguenti esercizi.

Nome:

Cognome:

Numero di matricola:

Esercizio 1. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \frac{|x+2| - |x-3|}{e^x + e^{-x}}$$

e sia $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + o(x^3)$ il suo polinomio di Taylor nel punto $x = 0$ fino al grado 3. Si calcoli il valore di $a_0 + a_1 + a_2 + a_3$.

Soluzione. Abbiamo la relazione

$$|x+2| - |x-3| = 2 + x - (-x+3) = 1$$

per x vicino a 0. Dobbiamo trovare sviluppo di Taylor fino ad ordine 3 e abbiamo

$$f(x) = \frac{1}{e^x + e^{-x}} = \frac{1}{2} - \frac{x^2}{4} + o(x^3)$$

e quindi

$$a_0 = \frac{1}{2}, a_1 = 0, a_2 = -\frac{1}{4}, a_3 = 0.$$

Troviamo

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = \frac{1}{4}.$$

□

Esercizio 2. Calcolare l'integrale

$$\int_{-3}^3 \frac{dx}{(1+x^2)^{3/2}}.$$

Soluzione. Abbiamo

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^{3/2}} = \frac{x}{(1+x^2)^{1/2}}$$

e quindi

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{(1+x^2)^{3/2}} = \frac{6}{\sqrt{10}}.$$

□

Esercizio 3. Vedere se l'integrale

$$\int_0^\infty \left(\frac{|1 - 2x^2 + x^4|}{x^4 + 1} + \frac{(1 + x^2)^2}{x^4 + 1} \right) \sin x \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$$

esiste.

Soluzione. Abbiamo la relazione

$$\left(\frac{|1 - 2x^2 + x^4|}{x^4 + 1} + \frac{(1 + x^2)^2}{x^4 + 1} \right) = 2$$

e quindi l'integrale improprio

$$\int_0^\infty 2 \sin x \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$$

esiste. □

Esercizio 4. Trovare il numero delle soluzioni del problema

$$xy''(x) + xy'(x) = 1, y(0) = 1, y'(1) = 0.$$

Soluzione. Il problema ha zero soluzioni, si vede dopo la sostituzione $x = 0$. □

Esercizio 5. Dire il numero totale di massimi locali e globali della funzione $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ definita come

$$f(x) = x - \frac{x \ln(2 + x)}{2019}.$$

Soluzione. La funzione

$$f'(x) = 1 - \frac{\ln(2 + x)}{2019} - \frac{x}{2019(2 + x)}$$

ha $x > 0$ tale che $f'(x) = 0$. Così la funzione cresce in $(0, x_1)$ e decresce dopo. Ha unico massimo (globale e locale). □

Esercizio 6. Si calcoli (se esiste) il valore del seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \cos(x) - 2x}{1 + \ln(1 + x^x)}.$$

Soluzione. Abbiamo la relazione

$$\frac{1 + \cos(x) - 2x}{1 + \ln(1 + x^x)} = \frac{-2x(1 + o(1))}{x \ln x(1 + o(1))}$$

e quindi

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \cos(x) - 2x}{1 + \ln(1 + x^x)} = 0.$$

□

Esercizio 7. Sia $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ definita come

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/|x-1|}, & \text{se } x \neq 1; \\ 0, & \text{se } x = 1. \end{cases}$$

Si calcoli la seconda derivata in $x = 1$ della funzione $g(x) = f(x)/(x^2 - 1)$.

Soluzione. Si può dimostrare con induzione in k che $g(x)$ è differenziabile k volte in $x = 1$ e la sua derivata k -esima è 0. Infatti, per ogni intero $N \geq 1$ abbiamo

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{(x-1)^N} = 0.$$

Questa proprietà si può dimostrare con la sostituzione

$$y = \frac{1}{x-1}$$

e notando che $|y| \rightarrow +\infty$ quando $x \rightarrow 1$ possiamo usare la proprietà

$$\lim_{y \rightarrow \pm\infty} y^N e^{-|y|} = 0.$$

□

Esercizio 8. Si calcoli il valore (se esiste) del seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 \cos(x * \pi) + |-x-1|}{|x-2|-1}.$$

Soluzione. Abbiamo la relazione

$$\frac{2 \cos(x * \pi) + |-x-1|}{|x-2|-1} = \frac{2 \cos(x * \pi) + 2 + x - 1}{1 - x}$$

e quindi

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 \cos(x * \pi) + 2 + x - 1}{1 - x} = -1.$$

□

Scritto del corso di Analisi Matematica
corso di laurea in Ingegneria Gestionale
Università di Pisa
24/06/2019

(Soluzioni, tutti i gruppi)

Esercizio \ Gruppo	<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>
1	0	1	1/4
2	0	0	$3\sqrt{2}/\sqrt{5}$
3	1	1/4	<i>esiste</i>
4	-3/4	$4/\sqrt{5}$	0
5	$\sqrt{2}$	<i>esiste</i>	1
6	non esiste	1	0
7	1	0	0
8	0	1	-1