Scritto per il corso di Analisi Matematica
corso di laurea in Ingegneria Gestionale
Università di Pisa
13/02/2019

(Prima parte, gruppo 1)

Tempo a disposizione: 50 minuti.
Scrivere solo la risposta nella tabella in fondo, in modo leggibile ed inequivocabile.
E' ammesso alla seconda parte chi avrà risposto correttamente ad almeno 7 dei seguenti esercizi.

`Nome:`
`Cognome:`
`Numero di matricola:`

Esercizio 1. Si calcoli il valore (se esiste) del seguente limite:

$$\lim_{x\to\pi} \frac{(\sin(x) - \tan(x))}{\tan(x)}.$$

Soluzione. Abbiamo la relazione

$$\frac{(\sin(x) - \tan(x))}{\tan(x)} = \cos(x) - 1$$

e quindi

$$\lim_{x\to\pi} \frac{(\sin(x) - \tan(x))}{\tan(x)} = -2.$$

□

Esercizio 2. Sia $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definita come

$$f(x) = x^2 \arcsin x - x\cos x + x^3 \cot\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$$

Si calcoli $f''(0)$.

Soluzione. Usiamo la seguente proprietá

$$g(x) = x^2 h(x), \implies g''(0) = 2h(0)$$

per ogni funzione $h(x)$ che e due volte differenziabile vicino a $x = 0$.
Cosí troviamo

$$\left(x^2 \arcsin x\right)''(0) = 0.$$

$$\left(x^3 \cot\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)\right)''(0) = 0.$$

Rimane a calcolare la seconda derivata di

$$f_1(x) = x\cos x$$

in $x = 0$. A questo punto usiamo la proprietá

$$g_1(x) = xh_1(x), \quad \Longrightarrow g_1''(0) = 2h_1'(0)$$

per ogni funzione $h_1(x)$ che e due volte differenziabile vicino a $x = 0$. Cosi troviamo

$$f_1''(0) = 0.$$

Alla fine troviamo

$$f''(0) = \left(x^2 \arcsin x\right)''(0) - f_1''(0) + \left(x^3 \cot\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)\right)''(0) = 0.$$

□

Esercizio 3. Dire il numero totale di massimi globali della funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita come

$$f(x) = \int_0^x \left(\frac{1+t}{1+t^2} - t\right) dt.$$

Soluzione. Il teorema fondamentale del calcolo integrale ci da

$$f'(x) = \left(\frac{1+x}{1+x^2} - x\right) = \frac{1-x^3}{1+x^2}$$

e quindi abbiamo solo un massimo globale. □

Esercizio 4. Si calcoli (se esiste) il valore del seguente limite:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(x) - x}{1 + \ln(1 + x^x)}.$$

Soluzione. Abbiamo la relazione

$$\frac{\sin(x) - x}{1 + \ln(1 + x^x)} = \frac{-x(1 + o(1))}{x \ln x(1 + o(1)}$$

e quindi

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(x) - x}{1 + \ln(1 + x^x)} = 0.$$

□

Esercizio 5. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

e sia $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_8x^8$ il suo polinomio di Taylor nel punto $x = 0$ fino al grado 8. Si calcoli il valore di $a_0 + a_8$.

Soluzione. La funzione é dispari e quindi $a_0 = a_2 = a_4 = a_6 = a_8 = 0$.

□

Esercizio 6. Calcolare l'integrale

$$\int_{-1}^1 (1 + x) \arcsin x dx.$$

Soluzione. La funzione

$$\arcsin x$$

é dispari e quindi

$$\int_{-1}^{1} \arcsin x dx = 0.$$

Abbiamo quindi

$$\int_{-1}^{1} (1+x) \arcsin x dx = \int_{-1}^{1} x \arcsin x dx.$$

Usiamo la sostituzione $y = \arcsin x$.

$$\int_{-1}^{1} x \arcsin x dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} y \sin y \cos y dy = 2 \int_{0}^{\pi/2} y \sin y \cos y dy =$$

$$= \int_{0}^{\pi/2} y \sin(2y) dy.$$

Integrazione per parti ci da

$$\int_{0}^{\pi/2} y \sin(2y) dy = -\frac{1}{2} \int_{0}^{\pi/2} y (\cos(2y))' dy = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \int_{0}^{\pi/2} \cos(2y) dy = \frac{\pi}{4}.$$

□

Esercizio 7. Vedere se l'integrale

$$\int_{0}^{\infty} \frac{e^x - 1}{x^x \ln(1+x)} dx$$

esiste.

Soluzione. Abbiamo i sviluppi

$$\frac{e^x - 1}{x^x \ln(1+x)} = 1 + o(1), \quad x \to 0,$$

$$\frac{e^x - 1}{x^x \ln(1+x)} = \frac{1}{e^{x \ln x - x} \ln x} (1 + o(1)$$

e quindi l'integrale converge sempre. □

Esercizio 8. Trovare il numero delle soluzioni del problema

$$y''(x) + y'(x) = x, y''(0) = 1, y'(0) = -1.$$

Soluzione. Il problema

$$y''(x) + y'(x) = x, y''(0) = 1, y'(0) = -1 \tag{1}$$

é equivalente a

$$y''(x) + y'(x) = x, y'(0) = -1 \tag{2}$$

e quindi ha numero infinito delle soluzioni. □

Scritto del corso di Analisi Matematica
corso di laurea in Ingegneria Gestionale
Università di Pisa
13/02/2019

(Prima parte, gruppo 2)

Tempo a disposizione: 50 minuti.
Scrivere solo la risposta accanto ad ogni esercizio, in modo leggibile ed inequivocabile.
E' ammesso alla seconda parte chi avrà risposto correttamente ad almeno 7 dei seguenti esercizi.

`Nome:`
`Cognome:`
`Numero di matricola:`

Esercizio 1. Dire il numero totale di minimi globali della funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita come

$$f(x) = \int_0^x \left(\frac{1+3t}{1+t^2} - 3t \right) dt.$$

Soluzione. Il teorema fondamentale del calcolo integrale ci da

$$f'(x) = \left(\frac{1+3x}{1+x^2} - 3x \right) = \frac{1-3x^3}{1+x^2}$$

e quindi abbiamo solo un massimo globale. □

Esercizio 2. Si calcoli (se esiste) il valore del seguente limite:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)+x}{1+\ln(1+x^x)}.$$

Soluzione. Abbiamo la relazione

$$\frac{\ln(x)+x}{1+\ln(1+x^x)} = \frac{x(1+o(1))}{x\ln x(1+o(1)}$$

e quindi

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)+x}{1+\ln(1+x^x)} = 0.$$

□

Esercizio 3. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \frac{\sin x}{e^x + e^{-x}}$$

e sia $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_8x^8$ il suo polinomio di Taylor nel punto $x = 0$ fino al grado 8. Si calcoli il valore di $a_0 + a_8$.

Soluzione. La funzione é dispari e quindi $a_0 = a_2 = a_4 = a_6 = a_8 = 0$.

□

Esercizio 4. Calcolare l'integrale

$$\int_{-1}^{1} (x^4 + x) \arcsin x dx.$$

Soluzione. La funzione

$$x^4 \arcsin x$$

é dispari e quindi

$$\int_{-1}^{1} x^4 \arcsin x dx = 0.$$

Abbiamo quindi

$$\int_{-1}^{1} (x^4 + x) \arcsin x dx = \int_{-1}^{1} x \arcsin x dx.$$

Usiamo la sostituzione $y = \arcsin x$.

$$\int_{-1}^{1} x \arcsin x dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} y \sin y \cos y dy = 2 \int_{0}^{\pi/2} y \sin y \cos y dy =$$

$$= \int_{0}^{\pi/2} y \sin(2y) dy.$$

Integrazione per parti ci da

$$\int_{0}^{\pi/2} y \sin(2y) dy = -\frac{1}{2} \int_{0}^{\pi/2} y (\cos(2y))' dy = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \int_{0}^{\pi/2} \cos(2y) dy = \frac{\pi}{4}.$$

$\square$

Esercizio 5. Vedere se l'integrale

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\cos x - e^x}{x^x \ln(1+x)} dx$$

esiste.

Soluzione. Abbiamo i sviluppi

$$\frac{\cos x - e^x}{x^x \ln(1+x)} = -1 + o(1), \quad x \to 0,$$

$$\left| \frac{\cos x - e^x}{x^x \ln(1+x)} \right| \leq \frac{1}{e^{x \ln x - x} \ln x} (1 + o(1)$$

e quindi l'integrale converge. $\square$

Esercizio 6. Trovare il numero delle soluzioni del problema

$$y''(x) + xy'(x) = x, y''(0) = 1, y'(0) = -1.$$

Soluzione. Il problema

$$y''(x) + xy'(x) = x, y''(0) = 1, y'(0) = -1. \tag{3}$$

per $x = 0$ ci da

$$y''(x) + xy'(x) = x \quad \Longrightarrow y''(0) = 0.$$

Questa relazione contradice

$$y''(0) = 1$$

e quindi (5) non ha soluzioni. $\square$

Esercizio 7. Sia $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definita come

$$f(x) = +x^2 \arcsin x + x^3 \cot\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) - x\cos x$$

Si calcoli $f''(0)$.

Soluzione. Usiamo la seguente proprietá

$$g(x) = x^2 h(x), \quad \Longrightarrow g''(0) = 2h(0)$$

per ogni funzione $h(x)$ che e due volte differenziabile vicino a $x = 0$.
Cosí troviamo

$$\left(x^2 \arcsin x\right)''(0) = 0.$$
$$\left(x^3 \cot\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)\right)''(0) = 0.$$

Rimane a calcolare la seconda derivata di

$$f_1(x) = x\cos x$$

in $x = 0$. A questo punto usiamo la proprietá

$$g_1(x) = xh_1(x), \quad \Longrightarrow g_1''(0) = 2h_1'(0)$$

per ogni funzione $h_1(x)$ che e due volte differenziabile vicino a $x = 0$. Cosi troviamo

$$f_1''(0) = 0.$$

Alla fine troviamo

$$f''(0) = \left(x^2 \arcsin x\right)''(0) - f_1''(0) + \left(x^3 \cot\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)\right)''(0) = 0.$$

$\square$

Esercizio 8. Si calcoli il valore (se esiste) del seguente limite:

$$\lim_{x\to\pi/4} \frac{(\sin(x) - \tan(x))}{\tan(x)}.$$

Soluzione. Abbiamo la relazione

$$\frac{(\sin(x) - \tan(x))}{\tan(x)} = \cos(x) - 1$$

e quindi

$$\lim_{x\to 2\pi} \frac{(\sin(x) - \tan(x))}{\tan(x)} = \frac{\sqrt{2}}{2} - 1.$$

$\square$

Scritto del corso di Analisi Matematica
corso di laurea in Ingegneria Gestionale
Università di Pisa
13/02/2019

(Prima parte, gruppo 3)

Tempo a disposizione: 50 minuti.
Scrivere solo la risposta accanto ad ogni esercizio, in modo leggibile ed inequivocabile.
E' ammesso alla seconda parte chi avrà risposto correttamente ad almeno 7 dei seguenti esercizi.

`Nome:`
`Cognome:`
`Numero di matricola:`

Esercizio 1. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \frac{x}{e^x + e^{-x}}$$

e sia $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_8x^8$ il suo polinomio di Taylor nel punto $x = 0$ fino al grado 8. Si calcoli il valore di $a_0 + a_8$.

Soluzione. La funzione é dispari e quindi $a_0 = a_2 = a_4 = a_6 = a_8 = 0$.

$\square$

Esercizio 2. Calcolare l'integrale

$$\int_{-1}^{1} (x^2 + x) \arcsin x dx.$$

Soluzione. La funzione

$$x^2 \arcsin x$$

é dispari e quindi

$$\int_{-1}^{1} x^2 \arcsin x dx = 0.$$

Abbiamo quindi

$$\int_{-1}^{1} (x^2 + x) \arcsin x dx = \int_{-1}^{1} x \arcsin x dx.$$

Usiamo la sostituzione $y = \arcsin x$.

$$\int_{-1}^{1} x \arcsin x dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} y \sin y \cos y dy = 2 \int_{0}^{\pi/2} y \sin y \cos y dy =$$

$$= \int_{0}^{\pi/2} y \sin(2y) dy.$$

Integrazione per parti ci da

$$\int_0^{\pi/2} y\sin(2y)dy = -\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} y(\cos(2y))'dy = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\cos(2y)dy = \frac{\pi}{4}.$$

□

Esercizio 3. Vedere se l'integrale

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos xe^x}{x^x \ln(1+x)}dx$$

esiste.

Soluzione. Abbiamo i sviluppi

$$\frac{\cos xe^x}{x^x \ln(1+x)} = 1/x + o(1), \quad x \to 0,$$

$$\left|\frac{\cos xe^x}{x^x \ln(1+x)}\right| \le \frac{1}{e^{x\ln x - x}\ln x}(1+o(1)$$

e quindi l'integrale diverge. □

Esercizio 4. Trovare il numero delle soluzioni del problema

$$y''(x) + xy'(x) = x, y''(0) = 0, y'(0) = -1.$$

Soluzione. Il problema

$$y''(x) + xy'(x) = x, y''(0) = 0, y'(0) = -1. \tag{4}$$

é equivalente a

$$y''(x) + xy'(x) = x, y'(0) = -1, \tag{5}$$

e quindi ha numero infinito delle soluzioni. □

Esercizio 5. Dire il numero totale di minimi globali della funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita come

$$f(x) = \int_0^x \left(\frac{1+2t}{1+t^2} - 2t\right) dt.$$

Soluzione. Il teorema fondamentale del calcolo integrale ci da

$$f'(x) = \left(\frac{1+2x}{1+x^2} - 2x\right) = \frac{1-2x^3}{1+x^2}$$

e quindi abbiamo solo un massimo globale. □

Esercizio 6. Si calcoli (se esiste) il valore del seguente limite:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1+\cos(x)-2x}{1+\ln(1+x^x)}.$$

Soluzione. Abbiamo la relazione

$$\frac{1+\cos(x)-2x}{1+\ln(1+x^x)} = \frac{-2x(1+o(1))}{x\ln x(1+o(1)}$$

e quindi

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1+\cos(x)-2x}{1+\ln(1+x^x)} = 0.$$

□

Esercizio 7. Sia $f:\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definita come

$$f(x) = -x\cos x + x^2 \arcsin x + x^3 \cot\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$$

Si calcoli $f''(0)$.

Soluzione. Usiamo la seguente proprietá

$$g(x) = x^2 h(x), \quad \Longrightarrow g''(0) = 2h(0)$$

per ogni funzione $h(x)$ che e due volte differenziabile vicino a $x = 0$.
Cosí troviamo

$$\left(x^2 \arcsin x\right)''(0) = 0.$$

$$\left(x^3 \cot\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)\right)''(0) = 0.$$

Rimane a calcolare la seconda derivata di

$$f_1(x) = x\cos x$$

in $x = 0$. A questo punto usiamo la proprietá

$$g_1(x) = xh_1(x), \quad \Longrightarrow g_1''(0) = 2h_1'(0)$$

per ogni funzione $h_1(x)$ che e due volte differenziabile vicino a $x = 0$. Cosi troviamo

$$f_1''(0) = 0.$$

Alla fine troviamo

$$f''(0) = \left(x^2 \arcsin x\right)''(0) - f_1''(0) + \left(x^3 \cot\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)\right)''(0) = 0.$$

□

Esercizio 8. Si calcoli il valore (se esiste) del seguente limite:

$$\lim_{x\to 2\pi} \frac{(\sin(x)-\tan(x))}{\tan(x)}.$$

Soluzione. Abbiamo la relazione

$$\frac{(\sin(x) - \tan(x))}{\tan(x)} = \cos(x) - 1$$

e quindi

$$\lim_{x \to 2\pi} \frac{(\sin(x) - \tan(x))}{\tan(x)} = 0.$$

□

Scritto del corso di Analisi Matematica
corso di laurea in Ingegneria Gestionale
Università di Pisa
13/02/2019

(Soluzioni, tutti i gruppi)

Esercizio \ Gruppo	*1*	*2*	*3*
1	-2	0	0
2	0	0	$\pi/4$
3	1	0	div
4	0	$\pi/4$	∞
5	0	conv	0
6	$\pi/4$	0	0
7	conv	0	0
8	∞	$\sqrt{2}/2-1$	0