

Compito di Analisi Matematica, Seconda parte, Tema X

21 febbraio 2018

COGNOME:	NOME:	MATR.:
----------	-------	--------

Istruzioni: Verranno corrette solo le risposte scritte su questo foglio. La soluzione di ogni esercizio deve essere giustificata con i passaggi fondamentali del procedimento e scritta nello spazio bianco sotto ad ogni esercizio.

Tempo a disposizione: 120 minuti. E' richiesto lo svolgimento degli esercizi con tutte le necessarie spiegazioni e motivazioni, in modo il più possibile rigoroso e leggibile. Acconsento che il voto finale venga pubblicato sulla pagina web del docente (solo per i voti pari almeno a 15/30, e con il numero di matricola al posto del nome): sì ☐ no ☐

Esercizio 1.

a) Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n}$$

al variare del parametro $x \in \mathbb{R}$.

b) Vedere se per $x = 1/2$ la serie converge e se converge calcolare

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n}.$$

Soluzione a). Usando il criterio del radice troviamo per

$$a_n = \frac{|x|^n}{n}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow |x|$$

e quindi la serie converge per $|x| < 1$, diverge per $x < -1$ e non converge per $x > 1$. Per $x = 1$ applichiamo il criterio di Leibniz e troviamo la serie converge. Per $x = -1$ abbiamo la serie armonica e quindi diverge. $\square$

Soluzione b). Ponendo

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n}$$

troviamo

$$f'(x) = - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = - \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = - \frac{1}{1+x}$$

e quindi

$$f(x) = -\ln(1+x).$$

Con $x = 1/2$ troviamo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n} = f(1/2) = -\ln(3/2).$$

□

Istruzioni: Verranno corrette solo le risposte scritte su questo foglio. La soluzione di ogni esercizio deve essere giustificata con i passaggi fondamentali del procedimento e scritta nello spazio bianco sotto ad ogni esercizio.

Esercizio 2. Studiare la convergenza del integrale

$$\int_2^{\infty} \ln^{\alpha}(x-1) \sin(1+x^2) dx$$

al variare del parametro $\alpha \in [-2, -1]$.

Soluzione. Per x vicino a 2 abbiamo

$$\ln(x-1) = \ln(1+(x-2)) = (x-2) + o(x-2)$$

e quindi

$$\ln^{\alpha}(x-1) = (x-2)^{\alpha}(1+o(1)).$$

Per $\alpha \in [-2, -1]$ l'integrale diverge vicino a $x = 2$.

Per x vicino a $+\infty$ usiamo

$$\sin(1+x^2) = -\frac{\cos(x^2+1)}{2x}$$

e dopo integrazione per parti troviamo la convergenza vicino a $+\infty$. □

Istruzioni: Verranno corrette solo le risposte scritte su questo foglio. La soluzione di ogni esercizio deve essere giustificata con i passaggi fondamentali del procedimento e scritta nello spazio bianco sotto ad ogni esercizio.

Esercizio 3. Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$y'(x) + \frac{y(x)}{(x-1)^2} = -\frac{\sin x}{x-1}$$

$$y(0) = -1.$$

Soluzione. La soluzione é

$$y(x) = -1 - e^{1/(x-1)} \left(\int_0^x e^{-1/(y-1)} \frac{\sin y}{y-1} dy \right).$$

La funzione é ben definita per $x \in (-\infty, 1)$. Il limite per $x \rightarrow -\infty$ esiste ed é

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = -1 + \int_{-\infty}^0 e^{-1/(y-1)} \frac{\sin y}{y-1} dy$$

dove l'integrale

$$\int_{-\infty}^0 e^{-1/(y-1)} \frac{\sin y}{y-1} dy$$

é oscillante e esiste. Per vedere il comportamento di $y(x)$ quando $x \rightarrow 1_-$, si studia l'integrale improprio

$$\int_0^1 e^{-1/(y-1)} \frac{\sin y}{y-1} dy$$

L'integrale diverge in 1. Per vedere il limite di

$$\frac{\int_0^x e^{-1/(y-1)} \frac{\sin y}{y-1} dy}{e^{1/(1-x)}}$$

usiamo la regola di l'Hôpital

$$\frac{e^{1/(1-x)} \sin x / (x-1)}{e^{1/(1-x)} / (1-x)^2}$$

Così si può vedere che

$$\lim_{x \nearrow 1} y(x) = 0.$$

□

Compito di Analisi Matematica, Seconda parte, Tema Y

21 febbraio 2018

COGNOME:	NOME:	MATR.:
----------	-------	--------

Esercizio 1. a) Studiare la convergenza della serie

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n}$$

al variare del parametro $x \in \mathbb{R}$.

b) Vedere se per $x = 1/3$ la serie converge e se converge calcolare

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n n}.$$

Soluzione a). Usando il criterio del radice troviamo per

$$a_n = \frac{|x|^n}{n}$$
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow |x|$$

e quindi la serie converge per $|x| < 1$, diverge per $x < -1$ e non converge per $x > 1$. Per $x = 1$ applichiamo il criterio di Leibniz e troviamo la serie converge. Per $x = -1$ abbiamo la serie armonica e quindi diverge. $\square$

Soluzione b). Ponendo

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n}$$

troviamo

$$f'(x) = - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = - \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \frac{1}{1+x}$$

e quindi

$$f(x) = -\ln(1+x).$$

Con $x = 1/3$ troviamo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n n} = f(1/3) = -\ln(4/3).$$

$\square$

Istruzioni: Verranno corrette solo le risposte scritte su questo foglio. La soluzione di ogni esercizio deve essere giustificata con i passaggi fondamentali del procedimento e scritta nello spazio bianco sotto ad ogni esercizio.

Tempo a disposizione: 120 minuti. E' richiesto lo svolgimento degli esercizi con tutte le necessarie spiegazioni e motivazioni, in modo il più possibile rigoroso e leggibile. Acconsento che il voto finale venga pubblicato sulla pagina web del docente (solo per i voti pari almeno a 15/30, e con il numero di matricola al posto del nome): sì ☐ no ☐

Esercizio 2. Studiare la convergenza del integrale

$$\int_3^{\infty} \ln^{\alpha}(x-2) \sin(1+x^2) dx$$

al variare del parametro $\alpha \in [0, 1]$.

Soluzione. Per x vicino a 2 abbiamo

$$\ln(x-1) = \ln(1+(x-2)) = (x-2) + o(x-2)$$

e quindi

$$\ln^{\alpha}(x-1) = (x-2)^{\alpha}(1+o(1)).$$

Per $\alpha \in [0, 1]$ l'integrale converge vicino a $x = 2$. Così rimane a studiare

$$\int_3^{\infty} \ln^{\alpha}(x-1) \sin(1+x^2) dx$$

Usiamo la relazione

$$\sin(1+x^2) = -\frac{(\cos(1+x^2))'}{2x}$$

e dopo una integrazione per parti troviamo

$$\begin{aligned} \int_3^R \ln^{\alpha}(x-1) \sin(1+x^2) dx &= -\ln^{\alpha}(x-1) \frac{\cos(1+x^2)}{2x} \Big|_3^R + \\ &+ \int_3^R \left(\frac{\ln^{\alpha}(x-1)}{2x} \right)' \cos(1+x^2) dx. \end{aligned}$$

Per x grande abbiamo

$$\left| \left(\frac{\ln^{\alpha}(x-1)}{2x} \right)' \right| \leq \frac{C \ln^{\alpha-1}(x-1)}{x^2} \leq \frac{C}{x^{3/2}}.$$

Così l'integrale converge. □

Istruzioni: Verranno corrette solo le risposte scritte su questo foglio. La soluzione di ogni esercizio deve essere giustificata con i passaggi fondamentali del procedimento e scritta nello spazio bianco sotto ad ogni esercizio.

Tempo a disposizione: 120 minuti. E' richiesto lo svolgimento degli esercizi con tutte le necessarie spiegazioni e motivazioni, in modo il più possibile rigoroso e leggibile. Acconsento che il voto finale venga pubblicato sulla pagina web del docente (solo per i voti pari almeno a 15/30, e con il numero di matricola al posto del nome): sì ☐ no ☐

Esercizio 3. Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$y'(x) + \frac{y(x)}{(x-1)^2} = -\frac{\cos x}{x-1}$$

$$y(0) = 0.$$

Soluzione. La soluzione é

$$y(x) = -e^{1/(x-1)} \left(\int_0^x e^{-1/(y-1)} \frac{\cos y}{y-1} dy \right).$$

La funzione é ben definita per $x \in (-\infty, 1)$. Il limite per $x \rightarrow -\infty$ esiste ed é

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = -1 + \int_{-\infty}^0 e^{-1/(y-1)} \frac{\cos y}{y-1} dy$$

dove l'integrale

$$\int_{-\infty}^0 e^{-1/(y-1)} \frac{\cos y}{y-1} dy$$

é oscillante e esiste. Per vedere il comportamento di $y(x)$ quando $x \rightarrow 1_-$, si studia l'integrale improprio

$$\int_0^1 e^{-1/(y-1)} \frac{\cos y}{y-1} dy$$

L'integrale diverge in 1. Per vedere il limite di

$$\frac{\int_0^x e^{-1/(y-1)} \frac{\cos y}{y-1} dy}{e^{1/(1-x)}}$$

usiamo la regola di l'Hôpital

$$\frac{e^{1/(1-x)} \sin x / (x-1)}{e^{1/(1-x)} / (1-x)^2}$$

Così si può vedere che

$$\lim_{x \nearrow 1} y(x) = 0.$$

□