Compito di Analisi Matematica, Seconda parte, Tema X

21 febbraio 2018

COGNOME:	NOME:	MATR.:

Istruzioni: Verranno corrette solo le risposte scritte su questo foglio. La soluzione di ogni esercizio deve essere giustificata con i passaggi fondamentali del procedimento e scritta nello spazio bianco sotto ad ogni esercizio.

Tempo a disposizione: 120 minuti. E' richiesto lo svolgimento degli esercizi con tutte le necessarie spiegazioni e motivazioni, in modo il più possibile rigoroso e leggibile. `Acconsento che il voto finale venga pubblicato sulla pagina web del docente (solo per i voti pari almeno a` 15/30`, e con il numero di matricola al posto del nome): sì` ☐ `no` ☐

Esercizio 1.

Sia

$$f(x) = \frac{x}{\sin^2 x} - \frac{\cos x}{\sin x}.$$

(1) vedere se la funzione si puo definire in $(-\pi, \pi)$ come funzione differenziabile;

(2) vedere se la funzione si puo definire in $(-\pi, \pi)$ come funzione due volte differenziabile;

(3) vedere se esistono i limiti

$$\lim_{x \nearrow \pi} f(x) \qquad \lim_{x \searrow -\pi} f(x);$$

(4) vedere se la funzione f é un biiezione tra $(-\pi, \pi)$ e $\mathbb{R}$.

Soluzione (1),(2). Usiamo sviluppo di Taylor cino a $x = 0$ e troviamo

$$f(x) = \frac{x}{\sin^2 x} - \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{x - \sin x \cos x}{\sin^2 x} = \frac{2x^3/3 + o(x^4)}{x^2(1 + o(x))} =$$

$$= 2x/3 + o(x^2)$$

e possiamo dedurre che $f(x)$ e due volte differenziabile in $x = 0$. ☐

Soluzione (3). Ponendo

$$y = \pi - x,$$

concludiamo che $y \searrow 0$, quando $x \nearrow \pi$ e quindi

$$\lim_{x \nearrow \pi} f(x) = \lim_{y \searrow} \frac{\pi - y + \sin y \cos y}{\sin^2 y} = +\infty.$$

In modo simile troviamo

$$\lim_{x \searrow -\pi} f(x) = -\infty.$$

☐

Soluzione (4). Calculiamo la prima derivata di f e troviamo

$$f'(x) = \frac{2(\sin x - 2x\cos x)}{\sin^3 x}$$

Per $x \in (0,\pi)$ usiamo la disequazione

$$\frac{\sin x}{x} > \cos x$$

e quindi

$$\frac{2(\sin x - 2x\cos x)}{\sin^3 x} > 0$$

La funzione $f(x)$ é crescente in $(0,\pi)$, inoltre é dispari e quindi é invertibile tra $(-\pi,\pi)$ e $\mathbb{R}$, perche abbiamo verificato

$$\lim_{x \nearrow \pi} f(x) = +\infty.$$

e

$$\lim_{x \searrow -\pi} f(x) = -\infty.$$

$\square$

Istruzioni: Verranno corrette solo le risposte scritte su questo foglio. La soluzione di ogni esercizio deve essere giustificata con i passaggi fondamentali del procedimento e scritta nello spazio bianco sotto ad ogni esercizio.

Esercizio 2. Studiare la convergenza del integrale

$$\int_0^\pi \frac{(x - \sin x)\sin(2x)|\tan x|^A}{x^2(1+x^2)}dx$$

al variare del parametro $A \in \mathbb{R}$.

Soluzione. Per x vicino a 0 o l'integrale converge per $A > -3$. Per x vicino a π l'integrale converge per $A > -2$. L'altro punto dove puo divergere e $x = \pi/2$. Per $x \to \pi/2$ abbiamo

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1 * o(1)}{(\pi/2 - x)}$$

e quindi

$$\frac{(x - \sin x)\sin(2x)|\tan x|^A}{x^2(1+x^2)} = \frac{c(\pi/2 - x)}{|\pi/2 - x|^A *}(1 + o(1))$$

con $c \neq 0$. Cosi deduciamo che l'integrale converge per $-2 < A < 2$ e diverge per $A \geq 2$ o $A \leq -2$. $\square$

Istruzioni: Verranno corrette solo le risposte scritte su questo foglio. La soluzione di ogni esercizio deve essere giustificata con i passaggi fondamentali del procedimento e scritta nello spazio bianco sotto ad ogni esercizio.

Esercizio 3. Vedere per quali valori dei parametri α e β in $\mathbb{R}$ esiste una soluzione monotona crescente del problema di Cauchy

$$y''(x) + y(x) = e^x$$
$$y(0) = \alpha, y'(0) = \beta.$$

Soluzione. La soluzone é

$$y(x) = \frac{e^x}{2} + C_1 \sin x + C_2 \cos x.$$

Otteniamo

$$C_2 = \alpha - \frac{1}{2}, C_1 = \beta - \frac{1}{2}.$$

La funzione

$$y(x) = \frac{e^x}{2} + C_1 \sin x + C_2 \cos x$$

é monotona crescente solo per $C_1 = C_2 = 0$ e quindi l'unico caso quando $y(x)$ e monotona crescente e

$$\alpha = \beta = \frac{1}{2}.$$

□