Scritto per il corso di Analisi Matematica
corso di laurea in Ingegneria Gestionale
Università di Pisa
24/6/2019

(Seconda parte)

Tempo a disposizione: 120 minuti.
E' richiesto lo svolgimento degli esercizi con tutte le necessarie spiegazioni e motivazioni, in modo il più possibile rigoroso e leggibile.

Nome:
Cognome:
Numero di matricola:
Acconsento che il voto finale venga pubblicato sulla pagina web del docente (solo per i voti pari almeno a 15/30, e con il numero di matricola al posto del nome):
sì ☐ no ☐

Esercizio 1 (11 punti). Sia $s > 0$ numero reale, tale che $s \leq 2$ e sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \frac{(s-2)x^s - (s-2) - sx^{s-1} + sx}{x-1}, \quad x > 0.$$

a) Studiare la continuita della funzione f al variare del parametro $s \in [1, 2]$.
b) Si calcolino, se esistono, i limiti di $f(x)$ per x tendente a 1.
c) Per quale valore del parametro $s \in [1, 2]$ la funzione soddisfa $f(x) \leq 0$ per ogni $x \geq 1$.

Soluzione. a) la funzione

$$f(x) = (s-2)\frac{x^s - 1}{x-1} - sx^{s-1}\frac{1 - x^{2-s}}{x-1}$$

é continua vicino a $x = 1$, quando $s = 1$ o $s = 2$. Per ogni $s \in (1, 2)$ abbiamo la regola di l'Hopital

$$\lim_{x\to 1} \frac{(s-2)x^s - (s-2) - sx^{s-1} + sx}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(s-2)sx^{s-1} - s(s-1)x^{s-2} + s}{1} = 0$$

b) La funzione ha limite per $x \to 1$ se $s \in (1, 2)$, secondo il punto a). Per $s = 1$

$$f(x) = -1 + 1 = 0.$$

Per $s = 2$

$$f(x) = 0.$$

c) Bisogna vedere se la funzione

$$g(x) = (s-2)x^s - (s-2) - sx^{s-1} + sx$$

ha derivate

$$g'(x) = s(s-2)x^{s-1} - s(s-1)x^{s-2} + s$$

$$g''(x) = s(s-1)(s-2)x^{s-3}(x-1) \le 0, \quad x > 1, s \in [1,2].$$

La relazione

$$g'(1) = s(s-2) - s(s-1) + s = s(s-2+2-s) = 0.$$

Quindi $g'(x) \le 0, x \ge 1$. Finalmente $g(1) = 0$ implica $g(x) \le 0, x \ge 1, s \in [1,2]$.

□

Esercizio 2 (10 punti)**.** Trovare una soluzione $y(x)$ definita per $x \ge 0$ e positiva, tale che $y(x)$ e soluzione del problema

$$y(x)y'(x) = x - y(x)^2, y(0) = 1.$$

Soluzione. Ponendo $y^2(x) = z(x)$ e usando

$$2y(x)y'(x) = \left(y^2(x)\right)',$$

troviamo

$$z'(x) = 2x - 2z(x).$$

Sii puo rescrivere come

$$(e^{2x}z(x))' = 2xe^{2x}$$

e usando integrazione troviamo

$$e^{2x}z(x) = 1 + \int_0^x 2ue^{2u}du = 1 + \int_0^x u\left(e^{2u}\right)' du =$$

$$= 1 + xe^{2x} - \int_0^x e^{2u}du = 1 + xe^{2x} - \frac{e^{2x}}{2} + \frac{1}{2}$$

$$z(x) = \frac{3}{2}e^{-2x} + x - \frac{1}{2}.$$

La funzione

$$z(x) = \frac{3}{2}e^{-2x} + x - \frac{1}{2}$$

ha minimo assoluto per $x = x_0 = \frac{1}{2}\ln 3$. Si vede che $z(x_0) > 0$ e quindi $z(x) > 0$ per ogni $x > 0$. Poniamo

$$y(x) = \sqrt{z(x)} = \sqrt{\frac{3}{2}e^{-2x} + x - \frac{1}{2}}.$$

□

Esercizio 3 (9 punti)**.** Sia $b > 0$. Vedere per quale valore del parametro $a \in \mathbb{R}$ convrge l'integrale improprio

$$\int_0^1 x^{-a}\sin\left(\frac{1}{x^b}\right)dx.$$

Soluzione. L'integrale improprio e definito con

$$\int_0^1 x^{-a}\sin\left(\frac{1}{x^b}\right)dx = \lim_{N\to\infty}\int_{N^{-1}}^1 x^{-a}\sin\left(\frac{1}{x^b}\right)dx$$

Usiamo la sostituzione $y = x^{-b}$, quindi $x = y^{-1/b}$ implica $dx = -\frac{1}{b}y^{-1-1/b}dy$ e l'integrale diventa

$$\int_{N^{-1}}^1 x^{-a}\sin\left(\frac{1}{x^b}\right)dx = \int_1^{N^b} y^{a/b-1-1/b}\sin y dy.$$

L'integral converge se e solo se

$$\frac{a}{b} - 1 - \frac{1}{b} < 0$$

e quindi la convergenza e solo per

$$a < b + 1.$$

$\square$

Scritto per il corso di Analisi Matematica
corso di laurea in Ingegneria Gestionale
Università di Pisa
24/6/2019

(Seconda parte)

Tempo a disposizione: 120 minuti.
E' richiesto lo svolgimento degli esercizi con tutte le necessarie spiegazioni e motivazioni, in modo il più possibile rigoroso e leggibile.

`Nome:`
`Cognome:`
`Numero di matricola:`
`Acconsento che il voto finale venga pubblicato sulla pagina web del docente (solo per i voti pari almeno a 15/30, e con il numero di matricola al posto del nome):`
`sì` ☐ `no` ☐

Esercizio 4 (10 punti)**.** Trovare una soluzione $y(x)$ definita per $x \geq 0$ e positiva, tale che $y(x)$ e soluzione del problema

$$y(x)y'(x) = x - y(x)^2, y(0) = 1.$$

Soluzione. Ponendo $y^2(x) = z(x)$ e usando

$$2y(x)y'(x) = \left(y^2(x)\right)',$$

troviamo

$$z'(x) = 2x - 2z(x).$$

Sii puo rescrivere come

$$(e^{2x}z(x))' = 2xe^{2x}$$

e usando integrazione troviamo

$$e^{2x}z(x) = 1 + \int_0^x 2ue^{2u}du = 1 + \int_0^x u\left(e^{2u}\right)' du =$$
$$= 1 + xe^{2x} - \int_0^x e^{2u}du = 1 + xe^{2x} - \frac{e^{2x}}{2} + \frac{1}{2}$$
$$z(x) = \frac{3}{2}e^{-2x} + x - \frac{1}{2}.$$

La funzione

$$z(x) = \frac{3}{2}e^{-2x} + x - \frac{1}{2}$$

ha minimo assoluto per $x = x_0 = \frac{1}{2}\ln 3$. Si vede che $z(x_0) > 0$ e quindi $z(x) > 0$ per ogni $x > 0$. Poniamo

$$y(x) = \sqrt{z(x)} = \sqrt{\frac{3}{2}e^{-2x} + x - \frac{1}{2}}.$$

□

Esercizio 5 (11 punti)**.** Sia $s > 0$ numero reale, tale che $s \leq 2$ e sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \frac{(s-2)x^s - (s-2) - sx^{s-1} + sx}{x-1}, \quad x > 0.$$

a) Studiare la continuita della funzione f al variare del parametro $s \in [1, 2]$.

b) Si calcolino, se esistono, i limiti di $f(x)$ per x tendente a 1.

c) Per quale valore del parametro $s \in [1, 2]$ la funzione soddisfa $f(x) \leq 0$ per ogni $x \geq 1$.

Soluzione. a) la funzione

$$f(x) = (s-2)\frac{x^s - 1}{x-1} - sx^{s-1}\frac{1 - x^{2-s}}{x-1}$$

é continua vicino a $x = 1$, quando $s = 1$ o $s = 2$. Per ogni $s \in (1, 2)$ abbiamo la regola di l'Hopital

$$\lim_{x\to 1} \frac{(s-2)x^s - (s-2) - sx^{s-1} + sx}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(s-2)sx^{s-1} - s(s-1)x^{s-2} + s}{1} = 0$$

b) La funzione ha limite per $x \to 1$ se $s \in (1, 2)$, secondo il punto a). Per $s = 1$

$$f(x) = -1 + 1 = 0.$$

Per $s = 2$

$$f(x) = 0.$$

c) Bisogna vedere se la funzione

$$g(x) = (s-2)x^s - (s-2) - sx^{s-1} + sx$$

ha derivate

$$g'(x) = s(s-2)x^{s-1} - s(s-1)x^{s-2} + s$$

$$g''(x) = s(s-1)(s-2)x^{s-3}(x-1) \leq 0, \quad x > 1, s \in [1, 2].$$

La relazione

$$g'(1) = s(s-2) - s(s-1) + s = s(s-2+2-s) = 0.$$

Quindi $g'(x) \leq 0, x \geq 1$. Finalmente $g(1) = 0$ implica $g(x) \leq 0, x \geq 1, s \in [1, 2]$.

□

Esercizio 6 (9 punti)**.** Sia $b > 0$. Vedere per quale valore del parametro $a \in \mathbb{R}$ convrge l'integrale improprio

$$\int_0^1 x^{-a} \sin\left(\frac{1}{x^b}\right) dx.$$

Soluzione. L'integrale improprio e definito con

$$\int_0^1 x^{-a} \sin\left(\frac{1}{x^b}\right) dx = \lim_{N\to\infty} \int_{N^{-1}}^1 x^{-a} \sin\left(\frac{1}{x^b}\right) dx$$

Usiamo la sostituzione $y = x^{-b}$, quindi $x = y^{-1/b}$ implica $dx = -\frac{1}{b}y^{-1-1/b}dy$ e l'integrale diventa

$$\int_{N^{-1}}^1 x^{-a} \sin\left(\frac{1}{x^b}\right) dx = \int_1^{N^b} y^{a/b-1-1/b} \sin y dy.$$

L'integral converge se e solo se

$$\frac{a}{b} - 1 - \frac{1}{b} < 0$$

e quindi la convergenza e solo per

$$a < b + 1.$$

$\square$