Compito di Analisi Matematica, Seconda parte, Tema X

19 febbraio 2019

COGNOME:	NOME:	MATR.:

Esercizio 1. Determinare al variare del parametro reale x il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^x \left(\cos(1/n^2) - \ln(e + 1/n^3)\right)(x+2)^n$$

Soluzione. Ponendo $t = x + 2$ dobbiamo studiare

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^{t-2} \left(\cos(1/n^2) - \ln(e + 1/n^3)\right) t^n$$

Abbiamo lo sviluppo

$$\cos(1/n^2) - \ln(e + 1/n^3) = -\frac{1}{en^3}(1 + o(1))$$

e quindi con il principio di confronto dobbiamo studiare

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^{t-5} t^n.$$

Il criterio del radice ci da la serie converge per $|t| < 1$. Per $t > 1$ diverge, per $t < -1$ non converge. Per $t = \pm 1$ converge.

$\square$

Istruzioni: Verranno corrette solo le risposte scritte su questo foglio. La soluzione di ogni esercizio deve essere giustificata con i passaggi fondamentali del procedimento e scritta nello spazio bianco sotto ad ogni esercizio.

Esercizio 2. Vedere per quali valori dei parametri λ e μ in $\mathbb{R}$ esiste una soluzione monotona crescente in $\mathbb{R}$ del problema di Cauchy

$$y''(x) + y(x) = e^x$$
$$y(0) = \lambda, y'(0) = \mu.$$

Soluzione. La soluzone é

$$y(x) = \frac{e^x}{2} + C_1 \sin x + C_2 \cos x.$$

Otteniamo

$$C_2 = \lambda - \frac{1}{2}, C_1 = \mu - \frac{1}{2}.$$

La funzione

$$y(x) = \frac{e^x}{2} + C_1 \sin x + C_2 \cos x$$

é monotona crescente solo per $C_1 = C_2 = 0$. Infatti, abbiamo

$$y'(x) = \frac{e^x}{2} + C_1 \cos x - C_2 \sin x,$$

se $C_2 > 0$, allora per

$$x_k = \frac{\pi}{2} - 2k\pi$$

troviamo

$$y'(x_k) = \frac{e^{x_k}}{2} - C_2 = -C_2 - o(1)$$

e quindi abbiamo contradizione. Se $C_2 < 0$, allora per $x_k = -\frac{\pi}{/}2 - 2k\pi$ troviamo

$$y'(x_k) = \frac{e^{x_k}}{2} + C_2 = +C_2 - o(1)$$

e quindi abbiamo contradizione. In conclusione $C_2 = 0$ in modo simile troviamo $C_1 = 0$.

Cosi l'unico caso quando $y(x)$ e monotona crescente e

$$\lambda = \mu = \frac{1}{2}.$$

$\square$

Esercizio 3.

a): Studiare la continuitá della funzione

$$f(x) = \frac{2(\sin x - x\cos x)}{\sin^3 x}, \ x \in (-\pi, \pi);$$

b): calcolare l'integrale (se esiste)

$$F(x) = \int_0^x \frac{2(\sin t - t\cos t)}{\sin^3 t} dt$$

per $x \in (0, \pi)$;

c): vedere se $F(x)$ é monotona crescente in $(0, \pi)$.

Soluzione a). Abbiamo i seguenti sviluppi di Taylor per $x \to 0$

$$\sin x - x\cos x = -\frac{x^3}{6} + \frac{x^3}{2} + o(x^3) = \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$
$$\sin^3 x = x^3 + o(x^3).$$

Cosi troviamo

$$f(x) = \frac{2}{3} + o(1)$$

e quindi f é continua in 0. $\square$

Soluzione b). Dopo una integrazione per parti troviamo

$$\int_0^x \frac{2(\sin t - t\cos t)}{\sin^3 t} dt = 2\int_0^x \frac{dt}{\sin^2 t} - 2\int_0^x \frac{t\cos t}{\sin^3 t} dt =$$
$$= -2\cot(x) + \int_0^x t \ d\left(\frac{1}{\sin^2 t}\right) = -2\cot(x) + \frac{t}{\sin^2 t} - \int_0^x \frac{dt}{\sin^2 t} =$$
$$-2\cot(x) + \frac{t}{\sin^2 t} + \cot(x) = -\cot(x) + \frac{t}{\sin^2 t}.$$

$\square$

Soluzione c). Sappiamo che

$$F'(x) = f(x) = \frac{\sin x - x\cos x}{\sin^3 x}$$

e usando la disequazione

$$\tan x > x, \ x \in (0, \pi/2)$$

troviamo

$$\sin x - x\cos x > 0, \ x \in (0, \pi),$$
$$f(x) > 0, \ x \in (0, \pi).$$

$\square$

Compito di Analisi Matematica, Seconda parte, Tema Y

19 febbraio 2019

COGNOME:	NOME:	MATR.:

Esercizio 1. Determinare al variare del parametro reale x il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-x}\left(\cos(1/n^2)-\ln(e+1/n^3)\right)(x+2)^n$$

Soluzione. Ponendo $t=x+2$ dobbiamo studiare

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-t+2}\left(\cos(1/n^2)-\ln(e+1/n^3)\right)t^n$$

Abbiamo lo sviluppo

$$\cos(1/n^2)-\ln(e+1/n^3)=-\frac{1}{en^3}(1+o(1))$$

e quindi con il principio di confronto dobbiamo studiare

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-t-1}t^n.$$

Il criterio del radice ci da la serie converge per $|t|<1$. Per $t>1$ converge, per $t<-1$ non converge. Per $t=1$ converge, per $t=-1$ non converge.

$\square$

Istruzioni: Verranno corrette solo le risposte scritte su questo foglio. La soluzione di ogni esercizio deve essere giustificata con i passaggi fondamentali del procedimento e scritta nello spazio bianco sotto ad ogni esercizio.

Esercizio 2. Vedere per quali valori dei parametri λ e μ in $\mathbb{R}$ esiste una soluzione monotona decrescente in $\mathbb{R}$ del problema di Cauchy

$$y''(x) + y(x) = e^{-x}$$
$$y(0) = \lambda, y'(0) = \mu.$$

Soluzione. La soluzone é

$$y(x) = \frac{e^{-x}}{2} + C_1 \sin x + C_2 \cos x.$$

Otteniamo

$$C_2 = \lambda - \frac{1}{2}, C_1 = \mu + \frac{1}{2}.$$

La funzione

$$y(x) = \frac{e^{-x}}{2} + C_1 \sin x + C_2 \cos x$$

é monotona decrescente solo per $C_1 = C_2 = 0$. $\square$

Esercizio 3.

a): Studiare la continuitá della funzione

$$f(x) = \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{x\cos x}{\sin^3 x}, \ x \in (-\pi, \pi);$$

b): calcolare l'integrale (se esiste)

$$F(x) = \int_0^x \frac{\sin t - t\cos t}{\sin^3 t} dt$$

per $x \in (0, \pi)$;

c): vedere se $F(x)$ é monotona crescente in $(0, \pi)$.

Soluzione a). Abbiamo i seguenti sviluppi di Taylor per $x \to 0$

$$\sin x - x\cos x = -\frac{x^3}{6} + \frac{x^3}{2} + o(x^3) = \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

$$\sin^3 x = x^3 + o(x^3).$$

Cosi troviamo

$$f(x) = \frac{1}{3} + o(1)$$

e quindi f é continua in 0. $\square$

Soluzione b). Dopo una integrazione per parti troviamo

$$\int_0^x \frac{2(\sin t - t\cos t)}{\sin^3 t} dt = 2\int_0^x \frac{dt}{\sin^2 t} - 2\int_0^x \frac{t\cos t}{\sin^3 t} dt =$$

$$= -2\cot(x) + \int_0^x t \ d\left(\frac{1}{\sin^2 t}\right) = -2\cot(x) + \frac{t}{\sin^2 t} - \int_0^x \frac{dt}{\sin^2 t} =$$

$$-2\cot(x) + \frac{t}{\sin^2 t} + \cot(x) = -\cot(x) + \frac{t}{\sin^2 t}.$$

$\square$

Soluzione c). Sappiamo che

$$F'(x) = f(x) = \frac{2(\sin x - x\cos x)}{\sin^3 x}$$

e usando la disequazione

$$\tan x > x, \ x \in (0, \pi/2)$$

troviamo

$$\sin x - x\cos x > 0, \ x \in (0, \pi),$$

$$f(x) > 0, \ x \in (0, \pi).$$

$\square$

Compito di Analisi Matematica, Seconda parte, Tema Z

19 febbraio 2019

COGNOME:	NOME:	MATR.:

Esercizio 1. Determinare al variare del parametro reale x il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^{2x} \left(-\cos(1/n^2) + \ln(e + 1/n^3)\right) (x+1)^n$$

Soluzione. Ponendo $t = x + 1$ dobbiamo studiare

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^{2t-2} \left(\cos(1/n^2) - \ln(e + 1/n^3)\right) t^n$$

Abbiamo lo sviluppo

$$\cos(1/n^2) - \ln(e + 1/n^3) = -\frac{1}{en^3}(1 + o(1))$$

e quindi con il principio di confronto dobbiamo studiare

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^{2t-5} t^n.$$

Il criterio del radice ci da la serie converge per $|t| < 1$. Per $t > 1$ diverge, per $t < -1$ non converge. Per $t = 1$ converge, per $t = -1$ converge.

$\square$

Istruzioni: Verranno corrette solo le risposte scritte su questo foglio. La soluzione di ogni esercizio deve essere giustificata con i passaggi fondamentali del procedimento e scritta nello spazio bianco sotto ad ogni esercizio.

Esercizio 2. Vedere per quali valori dei parametri λ e μ in $\mathbb{R}$ esiste una soluzione monotona crescente in $\mathbb{R}$ del problema di Cauchy

$$y''(x) + y(x) = e^{2x}$$

$$y(0) = \lambda, y'(0) = \mu.$$

Soluzione. La soluzone é

$$y(x) = \frac{e^{2x}}{5} + C_1 \sin x + C_2 \cos x.$$

Otteniamo

$$C_2 = \lambda - \frac{1}{5}, C_1 = \mu - \frac{2}{5}.$$

La funzione

$$y(x) = \frac{e^{x}}{5} + C_1 \sin x + C_2 \cos x$$

é monotona crescente solo per $C_1 = C_2 = 0$. Infatti, abbiamo

$$y'(x) = \frac{e^{x}}{2} + C_1 \cos x - C_2 \sin x,$$

se $C_2 > 0$, allora per

$$x_k = \frac{\pi}{2} - 2k\pi$$

troviamo

$$y'(x_k) = \frac{e^{x_k}}{5} - C_2 = -C_2 - o(1)$$

e quindi abbiamo contradizione. Se $C_2 < 0$, allora per $x_k = -\frac{\pi}{/}2 - 2k\pi$ troviamo

$$y'(x_k) = 2\frac{e^{x_k}}{5} + C_2 = +C_2 - o(1)$$

e quindi abbiamo contradizione. In conclusione $C_2 = 0$ in modo simile troviamo $C_1 = 0$.

Cosi l'unico caso quando $y(x)$ e monotona crescente e

$$\lambda = \frac{1}{5}, \ \mu = \frac{2}{5}.$$

$\square$

Esercizio 3.

a): Studiare la continuitá della funzione

$$f(x) = \frac{\sin x - x\cos x}{\sin x - \sin x \cos^2 x}, \ \ x \in (-\pi, \pi);$$

b): calcolare l'integrale (se esiste)

$$F(x) = \int_0^x \frac{\sin t - t\cos t}{\sin t - \sin t \cos^2 t} dt$$

per $x \in (0, \pi)$;

c): vedere se $F(x)$ é monotona crescente in $(0, \pi)$.

Soluzione a). Abbiamo i seguenti sviluppi di Taylor per $x \to 0$

$$\sin x - x\cos x = -\frac{x^3}{6} + \frac{x^3}{2} + o(x^3) = \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$
$$\sin^3 x = x^3 + o(x^3).$$

Cosi troviamo

$$f(x) = \frac{1}{3} + o(1)$$

e quindi f é continua in 0. $\square$

Soluzione b). Dopo una integrazione per parti troviamo

$$\int_0^x \frac{2(\sin t - t\cos t)}{\sin^3 t} dt = 2\int_0^x \frac{dt}{\sin^2 t} - 2\int_0^x \frac{t\cos t}{\sin^3 t} dt =$$
$$= -2\cot(x) + \int_0^x t \ d\left(\frac{1}{\sin^2 t}\right) = -2\cot(x) + \frac{t}{\sin^2 t} - \int_0^x \frac{dt}{\sin^2 t} =$$
$$-2\cot(x) + \frac{t}{\sin^2 t} + \cot(x) = -\cot(x) + \frac{t}{\sin^2 t}.$$

$\square$

Soluzione c). Sappiamo che

$$F'(x) = f(x) = \frac{\sin x - x\cos x}{\sin^3 x}$$

e usando la disequazione

$$\tan x > x, \ \ x \in (0, \pi/2)$$

troviamo

$$\sin x - x\cos x > 0, \ \ x \in (0, \pi),$$
$$f(x) > 0, \ \ x \in (0, \pi).$$

$\square$