Appunti del corso di Teoria delle Rappresentazioni

Prof. Giovanni Gaiffi (A.A. 2008/09)

Giacomo d'Antonio
dantonio@mail.dm.unipi.it

5 giugno 2009

Indice

1 Basics

27/02/09

Definizione 1. Una *rappresentazione* (finita) di un gruppo finito G è un omomorfismo

$$\rho : G \to GL(V)$$

dove V è un $\mathbb{C}$-spazio vettoriale di dimensione finita.

Come sinonimi di rappresentazione useremo i termini G-rappresentazione e G-modulo.

Definizione 2. Date V e W rappresentazioni, un *omomorfismo* di rappresentazioni tra esse è un'applicazione lineare $\varphi : V \to W$ tale che

$$\forall g \in G, v \in V \quad \varphi(gv) = g\varphi(v).$$

Se indichiamo con ρ_1 la rappresentazione su V e con ρ_2 la rappresentazione su W, stiamo chiedendo che $\varphi \circ \rho_1 = \rho_2 \circ \varphi$.

Osservazione 1. A partire da un omomorfismo di rappresentazioni φ possiamo costruire altre rappresentazioni: $\operatorname{Ker}\varphi$, $\operatorname{Im}\varphi$, $\operatorname{coKer}\varphi$.

Definizione 3. Una *sottorappresentazione* di una G-rappresentazione V è un sottospazio vettoriale $H \subseteq V$ tale che

$$\forall g \in G, h \in H \quad gH \subseteq H.$$

Come sinonimi di sottorappresentazione useremo i termini sotto G-modulo e sottomodulo.

Definizione 4. Una G-rappresentazione (non nulla) V si dice *irriducibile* se non ammette sottorappresentazioni eccetto (0) e se stessa.

Esempio 1. Consideriamo la rappresentazione $S_3 \to GL(\mathbb{C}^3)$ (scriviamo $S_3 \curvearrowright \mathbb{C}^3$) che permuta le variabili. Questa non è irriducibile, infatti il sottospazio $\langle(1,1,1)\rangle$ è invariante (un sottomodulo di dimensione 1).

Teorema 1. Ogni G-rappresentazione V si decompone come somma diretta di rappresentazioni irriducibili.

Dimostrazione. Basta mostrare che ogni sotto G-modulo $W \subseteq V$ ammette un supplementare in V che sia ancora G-invariante. Vorremo avere un prodotto hermitiano[1] $H(\cdot,\cdot)$ invariante per l'azione di G; poi basta prendere come supplementare $W^\perp$ che risulta essere G-invariante, infatti:

$$\forall w \in W, u \in W^\perp \quad H(w, gu) = H(g^{-1}w, u) = 0 \Rightarrow gW^\perp \subseteq W^\perp.$$

[1] si intende *definito positivo*.

Sia $H_0(\cdot,\cdot)$ un prodotto hermitiano su V, definiamo

$$H(u,v) = \sum_{g\in G} H_0(gu, gv).$$

Si vede facilmente che questo è un prodotto hermitiano, ed è anche G-invariante:

$$\forall \gamma \in G \quad H(\gamma u, \gamma v) = \sum_{g\in G} H(g\gamma u, g\gamma v) = H(u,v).$$

$\square$

Osservazione 2. Lo stesso teorema per arbitrari campi a caratteristica 0 e per campi a caratteristica finita p se $p \nmid o(G)$. (la dimostrazione però è leggermente diversa). Se G è un gruppo topologico compatto si può dimostrare il teorema di completa riducibilità allo stesso modo utilizzando come prodotto invariante

$$H(\cdot,\cdot) = \int_G H_0(\cdot,\cdot)$$

dove l'integrale è rispetto alla misura di Haar.

1.1 Costruire nuove rappresentazioni

Siano V e W G-moduli, a partire da questi possiamo costruire nuove rappresentazioni.

(1) $V \otimes W$ con l'azione definita da $g(v \otimes w) = gv \otimes gw$. *Non è detto* che se V e W sono irriducibili anche $V \otimes W$ lo sia (vedere l'esempio 6).

(2) Anche V^* ha una naturale struttura di G-modulo; sia $\varphi \in V^*$ definiamo

$$g\varphi(v) = \varphi(g^{-1}v) \quad \forall v \in V$$

Il motivo di questa definizione è che l'azione su V^* *mantiene il pairing*. Consideriamo la mappa $\langle\cdot,\cdot\rangle : V^* \times V \to \mathbb{C}$ definita da $\langle\varphi, v\rangle = \varphi(v)$, con l'azione definita abbiamo che per ogni $g \in G, v \in V, \varphi \in V^*$ vale $\langle g\varphi, gv\rangle = \langle\varphi, v\rangle$. Se indichiamo con $\rho : G \to GL(V)$ la rappresentazione su V e con $\rho^* : G \to GL(V^*)$ quella su V^*, abbiamo che $\rho^*(g) = \rho(g^{-1})^*$ è l'applicazione trasposta di $\rho(g^{-1})$.

(3) $\bigwedge^k V$ con l'azione definita da $g(v_1 \wedge \cdots \wedge v_k) = gv_1 \wedge \cdots \wedge gv_k$.

(4) $\mathrm{Sym}^k(V)$ con l'azione definita da $g(v_1 \cdots v_k) = (gv_1)\cdots(gv_k)$.

(5) $\mathrm{Hom}(V, W)$ con l'azione $(g\vartheta)(v) = g\vartheta(g^{-1}v)$. Osserviamo che questa definizione è obbligata, infatti

$$\mathrm{Hom}(V, W) \cong V^* \otimes W.$$

e questa è l'unica azione che rispetta questo isomorfismo (*esercizio*: dimostrarlo).

Esempio 2 (Non sempre vale il teorema di completa riducibilità). Consideriamo la rappresentazione $\rho : (\mathbb{R}, +) \to GL(2, \mathbb{C})$ definita da:

$$t \mapsto \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$W = \langle (1, 0) \rangle$ è invariante, quindi la rappresentazione *non* è irriducibile. Ma se esistesse un sottospazio invariante $V \subseteq \mathbb{C}^2$ tale che $\mathbb{C}^2 = W \oplus V$ questo sarebbe un autospazio per ogni $\rho(t)$ (perché ha dimensione 1) e $\rho(t)$ sarebbe diagonalizzabile e questo non è possibile perché $\rho(1)$ è in forma di Jordan non diagonale.

Teorema 2 (Lemma di Schur)**.** Sia $\varphi : V \to W$ un omomorfismo di G-moduli *irriducibili.* Allora

(1) $\varphi = 0$ oppure è un isomorfismo,

(2) Se $V = W$, allora $\varphi = \lambda id$ con $\lambda \in \mathbb{C}$.

Dimostrazione. (1) $\mathrm{Ker}\,\varphi$ è un sotto G-modulo di V; se $\mathrm{Ker}\,\varphi = V$ allora $\varphi = 0$, altrimenti $\mathrm{Ker}\,\varphi = 0$ e φ è iniettiva. In questo caso $\mathrm{Im}\,\varphi \neq (0)$ è un sotto G-modulo di W e quindi $\mathrm{Im}\,\varphi = W$.

(2) Sia λ un autovalore di φ, allora $\varphi - \lambda id$ è una mappa di G-moduli e $\mathrm{Ker}\,(\varphi - \lambda id) \neq (0) \Rightarrow \varphi = \lambda id$.

□

Esempio 3 (Rappresentazioni di gruppi abeliani finiti). Sia G un gruppo abeliano finito, V una G-rappresentazione *irriducibile.* Per ogni $h \in G$ la mappa $h\cdot : V \to V$ (moltiplicazione per h) è un morfismo di G-moduli (perché il gruppo è abeliano). Per il lemma di Schur $h\cdot = \lambda id$ e quindi ogni sottospazio di V è invariante. Per irriducibilità si ha $\mathrm{dim}V = 1$.

Riassumendo, una rappresentazione V di un gruppo abeliano finito G è irriducibile se e solo se $\mathrm{dim}V = 1$.

Conoscere le rappresentazioni dei gruppi abeliani è utile perché data una rappresentazione $G \curvearrowright V$ possiamo studiare la rappresentazione $Z(G) \to G \curvearrowright V$ del centro di G su V.

1.2 Questioni di unicità

Corollario 3 (Del lemma di Schur)**.** Sia V una G-rappresentazione, e

$$V = V_1^{\oplus k_1} \oplus \cdots \oplus V_r^{\oplus k_r} = k_1 V_1 \oplus \cdots \oplus k_r V_r$$

una sua decomposizione in fattori irriducibili. Allora sono univocamente determinati i fattori V_i, i k_i e i sottospazi $V_i^{\oplus k_i}$ (quest'ultimi si chiamano *componenti isotopiche*).

Dimostrazione. Siano $V = V_1^{\oplus k_1} \oplus \cdots \oplus V_r^{\oplus k_r} = W_1^{\oplus t_1} \oplus \cdots \oplus W_s^{\oplus t_s}$ due decomposizioni in fattori irriducibili *minimali.* Consideriamo la mappa di G-moduli $id : V \to V$ da cui otteniamo

$$V_1 \hookrightarrow V_1^{\oplus k_1} \to V \to V \to W_j^{\oplus t_j} \to W_j$$

che è mappa di G-moduli. Se $V_1 \ncong W_j$ per il lemma di Schur la mappa è nulla, ma $\operatorname{Ker} id = (0)$ e quindi per qualche j la mappa è $\neq 0$ e, sempre per Schur, è un isomorfismo. Supponiamo senza perdere di generalità che sia $j = 1$. Abbiamo quindi $V_1 \cong W_1$. Per il lemma di Schur e per la minimalità delle decomposizioni deve essere $V_1^{\oplus k_1} \subseteq W_1^{\oplus t_1}$ (e viceversa). $\square$

Esempio 4. $G \curvearrowright \mathbb{R}^2$ con l'azione banale; allora $\mathbb{R}^2 = B \oplus B$ dove B è la rappresentazione banale di G di dimensione 1. Il singolo $B \subseteq \mathbb{R}^2$ *non* è univocamente determinato.

Esempio 5. Cerchiamo le rappresentazioni irriducibili di S_3; possiamo immediatamente costruire due rappresentazioni di dimensione 1:

(1) Quella banale $\sigma v = v \ \forall \sigma \in S_3$ con $V = \langle v \rangle$. Questa la indichiamo con $\begin{array}{|c|c|c|}\hline \ & \ & \ \\ \hline\end{array}$.

(2) La rappresentazione *segno* $\sigma v = \operatorname{sgn}(\sigma) v$ con $V = \langle v \rangle$ che si indica con $\begin{array}{|c|}\hline \ \\ \hline \ \\ \hline \ \\ \hline\end{array}$.

Consideriamo invece la rappresentazione $S_3 \curvearrowright \mathbb{C}^3$ che permuta le coordinate (*rappresentazione di permutazione*). Sappiamo già che contiene una copia della rappresentazione banale; $\mathbb{C}^3 = \langle (1,1,1) \rangle \oplus \operatorname{Ker}(x_1 + x_2 + x_3)$. Il secondo fattore è S_3-invariante, vediamo che è irriducibile. Una base per $\operatorname{Ker}(x_1 + x_2 + x_3)$ è data da $\{\alpha, \beta\}$ con $\alpha = (1, -1, 0)$ e $\beta = (0, 1, -1)$. Abbiamo $(1,2)\alpha = -\alpha$, $(1,2)\beta = \alpha + \beta$, $(1,2,3)\alpha = -\beta$ e $(1,2,3)\beta = -\alpha - \beta$. Perciò rispetto a questa base $(1,2)$ e $(1,2,3)$ sono rappresentate, rispettivamente, dalle matrici

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix},$$

Un sottospazio invariante (nel nostro caso di dimensione 1) deve essere autospazio di entrambe le matrici. Ma gli autospazi della prima sono $\langle(1,0)\rangle$ e $\langle(1,2)\rangle$ che non lo sono per la seconda.

Perciò $\operatorname{Ker}(x_1+x_2+x_3)$ è irriducibile, questa rappresentazione si indica con $\ydiagram{2,1}$ e si chiama *rappresentazione standard di* S_3.

Esercizio 1. Verificare che $\ydiagram{3}$, $\ydiagram{1,1,1}$ e $\ydiagram{2,1}$ sono tutte le rappresentazioni irriducibili di S_3.

Osservazione 3. Se V e W sono G-rappresentazioni, allora anche $\operatorname{Hom}(V,W)$ è una G-rappresentazione. Ma $\operatorname{Hom}(V,W)$ contiene i morfismi di G-moduli $\operatorname{Hom}_G(V,W)$. Si verifica immediatamente che

$$\operatorname{Hom}(V,W)^G = \operatorname{Hom}_G(V,W).$$

Questo ci dice che anche trovare le sottorappresentazioni banali (ad esempio di $V^* \otimes W$) può essere una buona cosa.

Esempio 6. Vogliamo spezzare $\ydiagram{2,1} \otimes \ydiagram{2,1}$ in rappresentazioni irriducibili. $\ydiagram{2,1} \otimes \ydiagram{2,1}$ ha dimensione 4; con le notazioni dell'esempio 5 abbiamo che $\ydiagram{2,1} = \langle\alpha,\beta\rangle$. Vediamo come agisce $(1,2)$:

$$(1,2)(\alpha\otimes\alpha) = \alpha\otimes\alpha, \quad (1,2)(\alpha\otimes\beta) = -(\alpha\otimes\alpha) - (\alpha\otimes\beta),$$
$$(1,2)(\beta\otimes\alpha) = -(\alpha\otimes\alpha) - (\beta\otimes\alpha), \quad (1,2)(\beta\otimes\beta) = (\alpha+\beta)\otimes(\alpha+\beta).$$

Cerchiamo sottospazi invarianti di dimensione 1:

$$(1,2)(\alpha\otimes\beta - \beta\otimes\alpha) = -(\alpha\otimes\beta - \beta\otimes\alpha).$$

Quindi abbiamo un candidato rappresentazione segno e lo è, infatti:

$$(1,2,3)(\alpha\otimes\beta - \beta\otimes\alpha) = \alpha\otimes\beta - \beta\otimes\alpha.$$

Per *esercizio* si può trovare $\ydiagram{3}$ imponendo che

$$a(\alpha\otimes\alpha) + b(\alpha\otimes\beta) + c(\beta\otimes\alpha) + d(\beta\otimes\beta)$$

rimanga fisso. In questo modo si vede anche che è l'unica sottorappresentazione banale (e lo stesso si può fare per la segno), quindi deve necessariamente essere

$$\ydiagram{2,1} \otimes \ydiagram{2,1} = \ydiagram{3} \oplus \ydiagram{1,1,1} \oplus \ydiagram{2,1}.$$

2 Teoria dei Caratteri

06/03/09

L'idea alla base della teoria dei caratteri è di ricostruire una rappresentazione conoscendo gli autovalori di $\rho(g)$ per ogni $g \in G$.

Definizione 5. Sia V una G-rappresentazione, il *carattere* χ_V di V è la funzione
$$\chi_V : G \to \mathbb{C}, \quad g \mapsto \operatorname{tr} g$$

Osservazione 4. χ_V è costante sulle classi di coniugio; in particolare $\chi_V(e) = \dim V$.

Teorema 4. Siano V e W due G-rappresentazioni, allora:

(1) $\chi_{V \oplus W} = \chi_V + \chi_W$,

(2) $\chi_{V \otimes W} = \chi_V \chi_W$,

(3) $\chi_{V^*} = \overline{\chi_V}$,

(4) $\chi_{\bigwedge^2 V}(g) = \frac{1}{2}\left(\chi_V(g)^2 - \chi_V(g^2)\right)$, $\forall g \in G$.

Dimostrazione. (1) In una base opportuna ogni $\rho(g)$ è rappresentato da una matrice a blocchi e il risultato segue immediatamente.

(2) Si scrive una base opportuna di $V \otimes W$ e si fanno i conti ($\rho(g)$ viene rappresentato dal prodotto tensore di matrici).

(3) Se $\rho : G \to GL(V)$ è l'azione di G su V e $\rho^* : G \to GL(V^*)$ è quella su V^*, sappiamo che $\rho^*(g) = \rho(g^{-1})^*$. Osserviamo che se $g \in G$ e $n = o(g)$, allora $\rho(g^n) = \rho(e) = id$ e quindi se $\lambda \in \operatorname{sp}(\rho(g))$ allora $\lambda^n \in \operatorname{sp}(id) \to \lambda^n = 1$ e gli autovalori di $\rho(g)$ sono radici n-esime dell'unità.

Ora $\operatorname{sp}(\rho(g^{-1})^*) = \operatorname{sp}(\rho(g^{-1})) = \{\lambda^{-1} : \lambda \in \operatorname{sp}(\rho(g))\}$ ed utilizzando il fatto che gli autovalori di $\rho(g)$ sono radici dell'unità abbiamo:
$$\chi_{V^*}(g) = \operatorname{tr} \rho(g^{-1})^* = \sum_{\lambda \in \operatorname{sp}(\rho(g))} \lambda^{-1} = \sum_{\lambda \in \operatorname{sp}(\rho(g))} \overline{\lambda} = \overline{\sum_{\lambda \in \operatorname{sp}(\rho(g))} \lambda} = \overline{\chi_V(g)}.$$

(4) Scrivendo le matrici rispetto alla base $\{v_i \wedge v_j : i < j\}$ si scopre che gli autovalori di $\rho_{\bigwedge^2 V}(g)$ sono $\{\lambda_i \lambda_j\}$ dove i λ_i sono gli autovalori di $\rho(g)$ e quindi
$$\chi_{\bigwedge^2 V}(g) = \sum_{i<j} \lambda_i \lambda_j = \frac{1}{2}\left(\left(\sum \lambda_i\right)^2 - \sum \lambda_i^2\right).$$

□

S_3	e	$(1,2)$	$(1,2,3)$
$\yng(3)$	1	-1	1
$\yng(1,1,1)$	1	-1	1
$\yng(2,1)$	2	0	-1

Tabella 1: Tabella dei caratteri di S_3

Osservazione 5. Le prime due proprietà ci dicono che i caratteri formano un anello (prodotto e somma di caratteri sono ancora caratteri).

Esercizio 2. Calcolare $\chi_{\mathrm{Sym}^2 V}$ [sugg: $V \otimes V \cong \bigwedge^2 V \oplus \mathrm{Sym}^2 V$].

Rappresentazione di permutazione Se G agisce su un insieme X, definiamo $V = \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\langle v_x : x \in X\rangle$. $G \curvearrowright V$ con $gv_x = v_{gx}$. Le rappresentazioni così ottenute si chiamano *rappresentazioni di permutazione.* Se $g \in G$ la matrice che rappresenta $\rho(g)$ rispetto alla base $\{v_{x_1}, \dots, v_{x_n}\}$ è una matrice di permutazione (ogni colonna ha un solo 1 e tutti zeri) e quindi la sua traccia è il numero di elementi lasciati fissi da g nell'insieme X.

2.1 Tabelle dei caratteri

Una *tabella dei caratteri* è una tabella che contiene tutte le rappresentazioni irriducibili di un gruppo e i loro caratteri. Le colonne sono indicizzate con le classi di coniugio del gruppo e le righe con le rappresentazioni irriducibili; ovviamente le entrate della tabella contengono i caratteri delle classi di coniugio sulle colonne nelle rappresentazioni sulle righe.

Esempio 7 (Tabella dei caratteri di S_3). La tabella 1 mostra la tabella dei caratteri di S_3. $\chi_V(e) = \dim V$ e questo determina la prima colonna, la rappresentazione banale agisce sempre come l'identità su $\mathbb{C}$ e quindi la prima riga è composta da soli 1. La seconda riga è la rappresentazione segno, quindi ogni elemento agisce come l'identità o come il suo opposto a seconda del segno della classe di coniugio. Perciò la seconda riga contiene i segni delle classi di coniugio. Per calcolare la terza riga osserviamo che

$$\mathbb{C}^3 = \yng(3) \otimes \yng(2,1)$$

dove $\mathbb{C}^3$ è la rappresentazione di permutazione, ed usiamo la formula $\chi_{\mathbb{C}^3} = \chi_{\yng(3)} + \chi_{\yng(2,1)}$. Quindi $1 = \chi_{\mathbb{C}^3}(1,2) = \chi_{\yng(3)}(1,2) + \chi_{\yng(2,1)}(1,2) = 1 + \chi_{\yng(2,1)}(1,2) \Rightarrow$

$\chi_{\ydiagram{2,1}}(1,2) = 0$ e $0 = \chi_{\mathbb{C}^3}(1,2,3) = \chi_{\ydiagram{3}}(1,2,3) + \chi_{\ydiagram{2,1}}(1,2,3) = 1 + \chi_{\ydiagram{2,1}}(1,2,3) \Rightarrow \chi_{\ydiagram{2,1}}(1,2,3) = -1$.

Osservazione 6. I tre vettori riga nella tabella 1 sono linearmente indipendenti. Questo è un fatto generale e può essere utilizzato nel seguente modo: ogni rappresentazione si decompone come somma diretta di rappresentazioni irriducibili, utilizzando il teorema 4 possiamo scrivere il carattere di questa rappresentazione come combinazione lineare dei caratteri delle rappresentazioni irriducibili dove i coefficienti sono le molteplicità; per indipendenza lineare dei caratteri questa combinazione è unica.

Perciò, data una rappresentazione, si può scrivere il carattere di essa come combinazione lineare dei caratteri delle rappresentazioni irriducibili e questo ci dice come si decompone la rappresentazione. In questo senso conoscere il carattere di una rappresentazione equivale a conoscere la rappresentazione.

Esempio 8. Possiamo ottenere la decomposizione $\ydiagram{2,1} \otimes \ydiagram{2,1} = \ydiagram{2,1} \oplus \ydiagram{3} \oplus \ydiagram{1,1,1}$ con i caratteri. Infatti $\chi_{\ydiagram{2,1} \otimes \ydiagram{2,1}} = \chi^2_{\ydiagram{2,1}}$ che corrisponde al vettore $(4,0,1) = (1,1,1) + (1,-1,1) + (2,0,1)$ e quindi $\chi_{\ydiagram{2,1} \otimes \ydiagram{2,1}} = \chi_{\ydiagram{2,1}} + \chi_{\ydiagram{3}} + \chi_{\ydiagram{1,1,1}}$.

2.2 Prima formula di proiezione

Sia $G \curvearrowright V$, fissato $g \in G$ $\rho(g) : V \to V$ in generale *non è* una mappa di G-moduli. Definiamo

$$\varphi = \frac{1}{o(G)} \sum_{g \in G} \rho(g) : V \to V$$

che è una mappa di G-moduli (cioè $\forall h \in G, v \in V : h\varphi(v) = \varphi(hv)$).

Teorema 5. φ è una proiezione $V \to V^G$, dove

$$V^G = \{v \in V : \quad gv = v \, \forall g \in G\}.$$

V^G è costituito da tutte le copie della rappresentazione banale in V.

Dimostrazione. È chiaro che $\varphi_{|V^G} = id$. Siano $h \in G, v \in V$ allora

$$h\varphi(v) = h \left(\frac{1}{o(G)} \sum_{g \in G} gv \right) = \frac{1}{o(G)} \sum_{g \in G} (hg)v = \varphi(v).$$

Quindi $\operatorname{Im} \varphi = V^G$. □

Ora $\dim V^G = \operatorname{tr}\varphi = \frac{1}{o(G)}\sum_{g\in G}\chi_V(g)$, questa si chiama *formula di proiezione.* Siano V e W due G-rappresentazioni, sappiamo che anche $\operatorname{Hom}(V,W)$ è una G-rappresentazione, dove se $\vartheta : V \to W$ $(g\vartheta)(v) = g\vartheta(g^{-1}v)$. Sappiamo anche che $\operatorname{Hom}(V,W)^G = \operatorname{Hom}_G(V,W)$, da questo otteniamo:

$$\dim \operatorname{Hom}_G(V,W) = \frac{1}{o(G)}\sum_{g\in G}\chi_{\operatorname{Hom}(V,W)}(g) = \frac{1}{o(G)}\sum_{g\in G}\chi_{V^*\otimes W}(g) = \frac{1}{o(G)}\sum_{g\in G}\overline{\chi_V(g)}\chi_W(g).$$

Dove abbiamo usato $\operatorname{Hom}(V,W) \cong V^*\otimes W$ come G-rappresentazioni. Abbiamo quindi ottenuto la formula

$$\frac{1}{o(G)}\sum_{g\in G}\overline{\chi_V(g)}\chi_W(g) = \dim \operatorname{Hom}_G(V,W).$$

Definizione 6. Definiamo la $\mathbb{C}$-algebra delle *funzioni di classe* come

$$\mathbb{C}_{\text{classe}}(G) = \{f : G \to \mathbb{C} :\ f \text{ è costante sulle classi di coniugio di } G\}.$$

Su $\mathbb{C}_{\text{classe}}(G)$ mettiamo il prodotto hermitiano

$$(\alpha,\beta) = \frac{1}{o(G)}\sum_{g\in G}\overline{\alpha(g)}\beta(g).$$

In particolare i caratteri delle G-rappresentazioni sono funzioni di classe.

Teorema 6. I caratteri delle rappresentazioni *irriducibili* sono ortonormali rispetto a $(\cdot,\cdot)$.

Dimostrazione. Per il lemma di Schur $\dim Hom_G(V,W) = 0$ se $V \ncong W$ e $\dim Hom_G(V,W) = 1$ se $V \cong W$, quest'ultima viene dal fatto che $V \cong W \Rightarrow \operatorname{Hom}_G(V,W) \cong \operatorname{Hom}_G(V,V) = \{\lambda id :\ \lambda \in \mathbb{C}\}$. Perciò

$$(\chi_V,\chi_W) = \frac{1}{o(G)}\sum_{g\in G}\overline{\chi_V(g)}\chi_W(g) = \dim \operatorname{Hom}_G(V,W) = \begin{cases} 1 & \text{se } V \cong W \\ 0 & \text{altrimenti}\end{cases}$$

□

Corollario 7. I caratteri delle rappresentazioni irriducibili sono linearmente indipendenti.

Corollario 8. Il numero delle rappresentazioni irriducibili di un gruppo G è $\leq \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}_{\text{classe}}(G) =$ numero di classi di coniugio di G.

L'ultima affermazione si verifica osservando che una base di $\mathbb{C}_{\text{classe}}(G)$ è data dalle funzioni che valgono 1 su di una classe di coniugio e 0 altrove. In questo modo possiamo dimostrare che nell'esempio 5 abbiamo trovato tutte le rappresentazioni irriducibili.

Corollario 9. Ogni G-rappresentazione è univocamente determinata dal suo carattere.

2.3 L'algebra di gruppo

Mostriamo ora che conoscendo tutte le rappresentazioni irriducibili di un gruppo tranne una si può ricostruire l'ultima. Definiamo la $\mathbb{C}$-algebra $\mathbb{C}G$ che ha come spazio vettoriale sottostante

$$\oplus_{g\in G}\mathbb{C}g$$

e come prodotto

$$\left(\sum a_i g_i\right)\left(\sum b_j g_j\right) = \sum a_i b_j (g_i g_j).$$

In particolare $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}G = o(G)$ e $\mathbb{C}G$ è un G-modulo con l'azione data dalla moltiplicazione a sinistra.

Osservazione 7. Come G-modulo $\mathbb{C}G$ *non* è irriducibile! infatti $\sum_{g\in G} g \in \mathbb{C}G$ è lasciato fisso da ogni elemento di G.

La rappresentazione di G su $\mathbb{C}G$ si chiama *rappresentazione regolare di G* ed è una rappresentazione di permutazione. Perciò $\operatorname{tr} g = \chi_{\mathbb{C}G}(g) =$ numero di elementi di G fissati dalla moltiplicazione a sinistra per g; in particolare:

$$\chi_{\mathbb{C}G}(g) = \begin{cases} 0 & \text{se } g \neq e \\ o(G) & \text{se } g = e \end{cases}$$

Scriviamo $\chi_{\mathbb{C}G} = a_1\chi_{V_1} + \cdots + a_n\chi_{V_n}$, dove $V_1, \ldots, V_n$ sono le rappresentazioni irriducibili (non isomorfe) di G, allora per ortonormalità dei caratteri

$$a_i = (\chi_{\mathbb{C}G}, \chi_{V_i}) = \frac{1}{o(G)} \sum_{h\in G} \overline{\chi_{\mathbb{C}G}(h)}\chi_{V_i}(h) = \frac{1}{o(G)}\overline{\chi_{\mathbb{C}G}(e)}\chi_{V_i}(e) = \dim V_i.$$

Perciò $\chi_{\mathbb{C}G} = \sum_{i=1}^n \dim V_i \chi_{V_i}$ e la rappresentazione regolare contiene tutte le rappresentazioni irriducibili di G, ognuna con molteplicità pari alla sua dimensione.

S_4	e	$(1,2)$	$(1,2,3)$	$(1,2,3,4)$	$(1,2)(3,4)$
$\square\square\square\square$	1	1	1	1	1
$\begin{smallmatrix}\square\\\square\\\square\\\square\end{smallmatrix}$	1	-1	1	-1	1
$\begin{smallmatrix}\square&\square&\square\\\square&&\end{smallmatrix}$	3	1	0	-1	-1
$\begin{smallmatrix}\square&\square\\\square&\\\square&\end{smallmatrix}$	3	-1	0	1	-1
$\begin{smallmatrix}\square&\square\\\square&\square\end{smallmatrix}$	2	0	-1	0	2

Tabella 2: Tabella dei caratteri di S_4

Teorema 10.

$$\mathbb{C}G = \oplus V_i^{\oplus \dim V_i}$$

Dove la somma è su tutte le rappresentazioni irriducibili V_i (non isomorfe) di G.

Ne segue che se conosciamo tutte le rappresentazioni irriducibili di G eccetto una possiamo ricavare l'ultima (perché conosciamo il carattere $\chi_{\mathbb{C}G}$).

Corollario 11.

$$o(G) = \sum (\dim V_i)^2.$$

Dove la somma è su tutte le rappresentazioni irriducibili V_i (non isomorfe) di G.

Esempio 9 (Tabella dei caratteri di S_4). La tabella 2 mostra la tabella dei caratteri di S_4. S_4 ha 5 classi di coniugio, quindi ci sono al più 5 rappresentazioni irriducibili. Inanzitutto abbiamo la banale $\square\square\square\square$ che agisce sempre come l'identità su $\mathbb{C}$ e quindi la riga corrispondente contiene solo 1 e la segno che agisce su $\mathbb{C}$ come il segno della classe di coniugio.

Come nel caso di S_3 abbiamo

$$\mathbb{C}^4 = \square\square\square\square \oplus \operatorname{Ker}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4).$$

Vogliamo vedere se $W = \operatorname{Ker}(x_1+x_2+x_3+x_4)$ è irriducibile, basta controllare che sia $(\chi_W, \chi_W) = 1$. Infatti se non fosse irriducibile avremmo $W = \oplus V_i^{\oplus k_i}$ e $(\chi_W, \chi_W) = \sum k_i^2 > 1$. Utilizzando il fatto che $\chi_W = \chi_{\mathbb{C}^4} - \chi_{\square\square\square\square}$ vediamo che χ_W corrisponde al vettore $(3, 1, 0, -1, -1)$ e che

$$(\chi_W, \chi_W) = \frac{1}{24} \sum_{g \in G} \chi_W(g)^2 = \frac{1}{24}(3^2 + 1^2 \binom{4}{2} + 0^2 \binom{4}{2} 2 + (-1)^2 3! + (-1)^2 3) = 1.$$

Perciò W è irriducibile, questa si chiama *rappresentazione standard di* S_4 e si indica con $\ydiagram{3,1}$.

Un'altra rappresentazione si ottiene considerando

$$W_1 = \ydiagram{1,1,1,1} \otimes \ydiagram{3,1}$$

che è irriducibile perché per ogni $g \in G$ $\chi_{W_1}(g)^2 = \chi_W(g)^2$. Questa la indichiamo con $\ydiagram{2,1,1}$ e la riga corrispondente ad essa si ottiene moltiplicando la riga relativa alla segno con quella relativa alla standard.

Manca una rappresentazione irriducibile. Infatti sappiamo che $24 = o(S_4) = \sum(\dim V_i)^2$ ed abbiamo già trovato 4 rappresentazioni irriducibili, perciò dobbiamo cercarne una di dimensione 2. Di questa conosciamo già il carattere, perché $\chi_{\mathbb{C}G} = \sum \dim V_i \chi_{V_i}$ (e quindi otteniamo l'ultima riga della tabella). Vogliamo però esibire questa rappresentazione concretamente. Osserviamo che $((1,2)(3,4))^2 = e$ e quindi gli autovalori di $(1,2)(3,4)$ appartengono a $\{-1,1\}$, ma $\operatorname{tr}(1,2)(3,4) = 2 \Rightarrow (1,2)(3,4)$ agisce come l'identità. Lo stesso vale per tutta la sua classe di coniugio e quindi anche per il *sottogruppo di Klein*

$$H = \{e, (1,2)(3,4), (1,3)(2,4), (1,4)(2,3)\}.$$

Perciò l'azione $S_4 \to GL(V)$ passa al quoziente e definisce $S_4/H \cong S_3 \to GL(V)$, ma sappiamo che c'è una sola rappresentazione irriducibile di S_3 di dimensione 2: $\ydiagram{2,1}$. Perciò la nostra rappresentazione si ottiene come $S_4 \to S_3 \curvearrowright \ydiagram{2,1}$, questa la indichiamo con $\ydiagram{2,2}$.

Esercizio 3. Trovare le rappresentazioni irriducibili di A_4 e scrivere la tabella dei caratteri.

Esercizio 4. S_4 agisce sul cubo (permutando le diagonali). Decomporre in irriducibili l'azione di S_4 sulle facce del cubo e quella sui vertici (sono tutte rappresentazioni di permutazione).

13/03/09

2.4 Funzioni di classe

Siano V e W G-rappresentazioni e $\vartheta : V \to W$ mappa $\mathbb{C}$-lineare, sappiamo che

$$\sum_{g \in G} g\vartheta : V \to W$$

è una mappa di G-moduli. In particolare $\varphi = \frac{1}{o(G)} \sum_{g \in G} g : V \to V$ è una mappa di G-moduli. Generalizzando, data una funzione $\alpha : G \to \mathbb{C}$ possiamo costruire la mappa $\mathbb{C}$-lineare

$$\varphi_\alpha = \frac{1}{o(G)} \sum_{g \in G} \alpha(g) g : V \to V$$

e ci chiediamo per quali α φ_α sia una mappa di G-moduli.

Teorema 12. Sia $\alpha : G \to \mathbb{C}$ funzione, V un G-modulo e $\varphi_{\alpha,V} = \frac{1}{o(G)} \sum_{g \in G} \alpha(g) g : V \to V$. Allora $\varphi_{\alpha,V}$ è G-lineare per ogni G-rappresentazione V se e solo se $\alpha \in \mathbb{C}_{\text{classe}}(G)$.

Dimostrazione. Sia $v \in V$, $h \in G$. Allora

$$\varphi_{\alpha,V}(hv) = h\varphi_{\alpha,V}(v) \Leftrightarrow h^{-1}\varphi_{\alpha,V}(hv) = \varphi_{\alpha,V}(v) \Leftrightarrow$$
$$\frac{1}{o(G)} \sum_{g \in G} \alpha(g)(h^{-1}gh)(v) = \frac{1}{o(G)} \sum_{g \in G} \alpha(hgh^{-1}) g(v) = \frac{1}{o(G)} \sum_{g \in G} \alpha(g) g(v).$$

Perciò $\alpha \in \mathbb{C}_{\text{classe}}(G) \Rightarrow \varphi_{\alpha,V} \in \text{End}_G(V)$. Per il viceversa supponiamo che sia $\alpha \notin \mathbb{C}_{\text{classe}}(G) \Rightarrow \exists \overline{h}, \overline{g} \in G$ tali che $\alpha(\overline{h}\overline{g}\overline{h}^{-1}) \neq \alpha(\overline{g})$. Dobbiamo trovare una G-rappresentazione V tale che $\varphi_{\alpha,V} \notin \text{End}_G(V)$. Possiamo aspettarci che V sia irriducibile e quindi (le rappresentazioni irriducibili sono tutte sottorappresentazioni della regolare) possiamo porre $V = \mathbb{C}G$.

$$\overline{h}^{-1} \varphi_{\alpha,\mathbb{C}G}(\overline{h}e) = \frac{1}{o(G)} \sum_{g \in G} \alpha(\overline{h}g\overline{h}^{-1}) g$$

e $\varphi_{\alpha,\mathbb{C}G}(e) = \overline{h}^{-1} \varphi_{\alpha,G}(\overline{h}e) \Rightarrow$

$$\sum_{g \in G} (\alpha(\overline{h}g\overline{h}^{-1}) - \alpha(g)) g = 0.$$

Ma $\{g : g \in G\}$ è una $\mathbb{C}$-base di $\mathbb{C}G$ e quindi per ogni $g \in G$ $\alpha(\overline{h}g\overline{h}^{-1}) - \alpha(g) = 0$. In particolare $\alpha(\overline{h}\overline{g}\overline{h}^{-1}) = \alpha(\overline{g})$ contro le ipotesi. $\square$

Teorema 13. I caratteri χ_V (con V che varia tra le rappresentazioni irriducibili di G a meno di isomorfismo) formano una *base* ortonormale di $\mathbb{C}_{\text{classe}}(G)$.

Dimostrazione. Basta dire che generano (sappiamo già che sono ortonormali). Supponiamo di avere $\alpha \in \mathbb{C}_{\text{classe}}(G)$ tale che $(\alpha, \chi_V) = 0$ $\forall V$ G-rappresentazione irriducibile. Vogliamo dimostrare che $\alpha = 0$. Consideriamo

$\varphi_{\alpha,V}$, per il lemma di Schur $\varphi_{\alpha,V} = \lambda id$ e passando alle tracce abbiamo che $\lambda \dim V = \operatorname{tr} \varphi_{\alpha,V}$, ora

$$\operatorname{tr} \varphi_{\alpha,V} = \frac{1}{o(G)} \sum_{g \in G} \alpha(g)\chi_V(g) \Rightarrow \lambda = \frac{1}{\dim V o(G)} \sum_{g \in G} \alpha(g)\chi_V(g) =$$

$$\frac{1}{\dim V o(G)} \overline{\sum_{g \in G} \overline{\alpha(g)\chi_V(g)}} = \frac{1}{\dim V o(G)} \overline{\sum_{g \in G} \overline{\alpha(g)}\chi_{V^*}(g)} = \frac{1}{\dim V} \overline{(\alpha, \chi_{V^*})} = 0.$$

Perché α è ortogonale a tutti i caratteri delle G-rappresentazioni. Comunque si può anche dimostrare che V è irriducibile se e solo se V^* è irriducibile, infatti $(\chi_{V^*}, \chi_{V^*}) = \overline{(\chi_V, \chi_V)} = 1$.

Concludendo $\lambda = 0 \Rightarrow \varphi_{\alpha,V} = 0$ per ogni G-rappresentazione V e quindi (si vede usando, come nel teorema precedente, $V = \mathbb{C}G$) $\alpha = 0$. □

Corollario 14. Le rappresentazioni irriducibili di G (a meno di isomorfismo) sono quante le classi di coniugio di G.

Possiamo definire $\mathrm{Rapp}(G)$ come lo $\mathbb{Z}$-modulo libero sulle rappresentazioni irriducibili (al solito, a meno di isomorfismo) di G (quindi un elemento di $\mathrm{Rapp}(G)$ è della forma $\sum a_i V_i$). Questo è un anello con il prodotto indotto da

$$V_i V_j = V_i \otimes V_j = \sum a_k V_k$$

dove l'uguaglianza a destra è la decomposizione in irriducibili. Abbiamo quindi definito una mappa

$$\begin{aligned} \chi : \mathrm{Rapp}(G) &\to \mathbb{C}_{\text{classe}}(G) \\ \sum a_i V_i &\mapsto \sum a_i \chi_{V_i} \end{aligned}$$

che sappiamo già essere iniettiva (per ortonormalità dei caratteri). Inoltre per il teorema precedente χ induce un isomorfismo

$$\mathrm{Rapp}(G) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} \cong \mathbb{C}_{\text{classe}}(G).$$

Esempio 10 (Tabella dei caratteri di A_4)*.* La tabella 3 mostra la tabella dei caratteri di A_4. In generale se una classe di coniugio in S_n è individuata da una struttura ciclica $l_1 \geq l_2 \geq \cdots \geq l_k$ (cioè prodotto di cicli disgiunti di lunghezza l_j), allora se gli l_j sono tutti *distinti* (si intende che gli elementi fissati sono cicli di lunghezza 1, quindi c'è al più un elemento fissato) e tutti *dispari* la classe di coniugio si spezza in A_n in due classi della stessa cardinalità, altrimenti la classe di coniugio in A_n coincide con quella in S_n.

Cominciamo a cercare rappresentazioni irriducibili di A_4, sia $H \subseteq A_4$ il sottogruppo di Klein (come nell'esempio 9). La proiezione al quoziente

A_4	e	$(1,2,3)$	$(1,3,2)$	$(1,2)(3,4)$
id	1	1	1	1
ζid	1	ζ	ζ^2	1
$\zeta^2 id$	1	ζ^2	ζ	1
W	3	0	0	-1

Tabella 3: Tabella dei caratteri di A_4

$A_4 \to A_4/H \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ ci permette di trovare delle rappresentazioni di A_4 a partire da quelle di $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ e queste sono irriducibili se e solo se lo sono come rappresentazioni di $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Le rappresentazioni irriducibili di $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ sono 3 (quante le classi di coniugio) e se $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = C_3 = \langle x \rangle$ sono date da

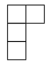
$$\begin{aligned} C_3 &\to GL(\mathbb{C}) \\ x &\mapsto \zeta^j id \end{aligned}$$

dove $\zeta \in \mathbb{C}$ è radice terza primitiva dell'unità. Per $j = 0$ si ottiene la rappresentazione banale (sia di $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ che di A_4) che riempirà la prima riga della tabella. Per $j = 1, 2$ la classe di coniugio $(1,2)(3,4)$ agisce sempre come l'identità e quindi il suo carattere sarà 1; mentre la classe $(1,2,3)$ agisce come x e quindi il suo carattere sarà ζ^j e $(1,3,2) = (1,2,3)^2$ ha come carattere ζ^{2j}.

Manca una rappresentazione irriducibile W (A_4 ha 4 classi di coniugio). Sappiamo che $o(A_4) = 12 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + (\dim W)^2 \Rightarrow \dim W = 3$ e se $g \in A_4$ è $g \neq e$ allora $\sum \dim V \chi_V(g) = 0$ e così riempiamo l'ultima riga.

Nell'esempio precedente abbiamo la situazione $A_4 \to S_4 \curvearrowright V$ e questo ci permette di trovare una rappresentazione $A_4 \curvearrowright V$ che chiamiamo *restrizione* di V ed indichiamo con $\mathrm{Res}_{A_4}^{S_4}(V)$. Non è detto che la restrizione di una rappresentazione irriducibile sia irriducibile. Nel nostro esempio

$$\begin{aligned} \mathrm{Res}_{A_4}^{S_4} \ydiagram{4} &= id \\ \mathrm{Res}_{A_4}^{S_4} \ydiagram{1,1,1,1} &= id \\ \mathrm{Res}_{A_4}^{S_4} \ydiagram{3,1} &= W \\ \mathrm{Res}_{A_4}^{S_4} \ydiagram{2,1,1} &= W \\ \mathrm{Res}_{A_4}^{S_4} \ydiagram{2,2} &= \zeta id \oplus \zeta^2 id \end{aligned}$$

Infatti il carattere di $\ydiagram{3,1}$ in S_4 corrisponde al vettore $(3, 1, 0, -1, -1)$ che in A_4 diventa (cancellando le classi di coniugio dispari e sdoppiando quelle che si spezzano) $(3,0,0,-1)$, la stessa cosa succede con  . Invece il carattere di  corrisponde al vettore $(2,-1,-1,2) = (1,\zeta,\zeta^2,1) + (1,\zeta^2,\zeta,1)$.

In generale se $H \subseteq G$ è sottogruppo e V è una G-rappresentazione possiamo costruire la H-rappresentazione $\mathrm{Res}_H^G V$.

2.5 Rappresentazione indotta

Sia W una H-rappresentazione, vogliamo costruire "in modo universale" una G-rappresentazione V con $W \subseteq V$ e tale che W sia H-invariante in V. Sia g_σ, al variare di σ tra le classi laterali di H in G, un rappresentante della classe σ (così $G = \cup_\sigma g_\sigma H$). Potrebbe succedere che $V = \oplus_\sigma g_\sigma W$, in questo caso avremmo per ogni $g \in G$ $gg_\sigma = g_\tau h$ con $h \in W$ e $g(g_\sigma W) = g_\tau(hW) = g_\tau W$. Quindi l'azione di G permuta le componenti g_σ coerentemente con l'azione di G sulle classi laterali di H in G. Osserviamo che il sottospazio $g_\sigma W$ non dipende dal rappresentante scelto, infatti $(g_\sigma h)W = g_\sigma(hW) = g_\sigma W$. Segue che se V si decompone in questo modo a partire dall'azione di G sulle classi laterali di H e dall'azione di H su W possiamo ricostruire l'azione di G su V. Inoltre abbiamo $\dim V = i_G(H) \dim W$.

Definizione 7. Data una H-rappresentazione W ed una G-rappresentazione V, si dice che V è *indotta da* W se

$$V = \oplus_\sigma g_\sigma W$$

dove σ varia tra le classi laterali di H in G e g_σ è un rappresentante di σ. In questo caso si scrive $V = \mathrm{Ind}_H^G W$.

La rappresentazione $\mathrm{Ind}_H^G W$ è unica a meno di isomorfismo.

Esempio 11. Sia $W = \langle w \rangle$ la rappresentazione banale di H, allora la rappresentazione di permutazione associata all'azione di G sulle classi laterali di H in G è indotta da W. Infatti $V = \oplus g_\sigma W$ e $gg_\sigma w = g_\tau(hw) = g_\tau w$.

Esercizio 5. La rappresentazione regolare $\mathbb{C}G$ è $\mathrm{Ind}_H^G \mathbb{C}H$.

In ogni caso abbiamo sempre un modo per costruire una rappresentazione indotta. Poniamo $V = \oplus_\sigma W^\sigma$, dove W^σ è una copia di W, e definiamo l'azione di G come

$$g \in G, gg_\sigma = g_\tau h, w^\sigma \in W^\sigma \Rightarrow gw^\sigma = (hw)^\tau.$$

Si verifica che l'azione è ben definita (*esercizio*).

Teorema 15 (Frobenius)**.** Sia W una rappresentazione di $H \subseteq G$ ed U una G-rappresentazione, allora ogni omomorfismo $\varphi : W \to \mathrm{Res}_H^G U$ di H-moduli si estende in modo unico ad un omomorfismo di G-moduli $\tilde{\varphi} : \mathrm{Ind}_H^G W \to U$.

In altre parole $\mathrm{Hom}_H(W, \mathrm{Res}_H^G U) \cong \mathrm{Hom}_G(\mathrm{Ind}_H^G W, U)$. Con il linguaggio delle categorie questo significa che il funtore Ind_H^G è aggiunto sinistro del funtore Res_H^G.

Corollario 16.

$$(\chi_{\mathrm{Ind}_H^G W}, \chi_U)_G = (\chi_W, \chi_{\mathrm{Res}_H^G U})_H$$

Dimostrazione. Osservando che $\mathrm{Ind}_H^G(W_1 \oplus W_2) = \mathrm{Ind}_H^G W_1 \oplus \mathrm{Ind}_H^G W_2$ (e l'analogo sulle restrizioni) ci si riconduce ad U e W irriducibili. Se $\mathrm{Ind}_H^G W = \cdots \oplus U^n \oplus \cdots$ (decomposizione in irriducibili) allora $(\chi_{\mathrm{Ind}_H^G W}, \chi_U)_G = (\chi_{U^n}, \chi_U)_G = n$ è il numero di copie di U che ci sono in $\mathrm{Ind}_H^G W$. Ora per il lemma di Schur $\dim \mathrm{Hom}_G(\mathrm{Ind}_H^G W, U) = \dim \mathrm{Hom}_G(U^n, U) = \dim \mathrm{Hom}_G(U, U)^n = n = (\chi_{\mathrm{Ind}_H^G W}, \chi_U)_G$ e allo stesso modo $(\chi_W, \chi_{\mathrm{Res}_H^G U})_H = \dim \mathrm{Hom}_H(W, \mathrm{Res}_H^G U)$ e si conclude osservando che $\mathrm{Hom}_H(W, \mathrm{Res}_H^G U) \cong \mathrm{Hom}_G(\mathrm{Ind}_H^G W, U)$. $\square$

Esercizio 6. Dimostrare che $\mathrm{Ind}_{S_3}^{S_4} \yng(2,1) = \yng(3,1) \oplus \yng(2,2) \oplus \yng(2,1,1)$ (si usa Frobenius). 20/03/09

Dimostriamo il teorema di reciprocità di Frobenius.

Dimostrazione. Sappiamo che, in generale, $\mathrm{Ind}_H^G W = \oplus_\sigma W^\sigma$ dove σ varia tra le classi laterali di H in G e W^σ è la copia di W corrispondente a σ. Comunque, sapendo già che $\mathrm{Ind}_H^G W$ esiste ed è unica a meno di isomorfismo, possiamo scrivere

$$\mathrm{Ind}_H^G W = \oplus_\sigma g_\sigma W$$

dove g_σ è un rappresentante di σ. Sia $\varphi : W \to U$ mappa di H-moduli, vogliamo estenderla ad una mappa di G-moduli $\tilde{\varphi} : \mathrm{Ind}_H^G W \to U$; chiaramente $\tilde{\varphi}$ deve verificare $w \in W \Rightarrow \tilde{\varphi}(w) = \varphi(w)$ e

$$\tilde{\varphi}(g_\sigma w) = g_\sigma \tilde{\varphi}(w) = g_\sigma \varphi(w).$$

Questa ultima formula non dipende dal rappresentante scelto g_σ, infatti $\tilde{\varphi}((g_\sigma h)w) = g_\sigma \varphi(hw) = g_\sigma h \varphi(w)$. Quindi possiamo sceglierla come definizione di $\tilde{\varphi}$ ed è facilmente una mappa di G-moduli. $\square$

Esercizio 7. Calcolare $\mathrm{Ind}_{S_3}^{S_4} \yng(2,1)$.

Dimostrazione. In carattere di $\yng(2,1)$ è $(2, 0, 1)$, per il corollario 16 abbiamo

$$(\chi_{\mathrm{Ind}_{S_3}^{S_4} \yng(2,1)}, \chi_{\yng(4)})_{S_4} = (\chi_{\yng(2,1)}, \chi_{\yng(3)})_{S_3} = 0$$

$$(\chi_{\mathrm{Ind}_{S_3}^{S_4} \yng(2,1)}, \chi_{\yng(3,1)})_{S_4} = (\chi_{\yng(2,1)}, \chi_{\mathrm{Res}_{S_3}^{S_4} \yng(3,1)})_{S_3}$$

Ora il carattere di $\ydiagram{3,1}$ è $(3, 1, 0, -1, -1)$ e quindi il carattere di $\mathrm{Res}^{S_4}_{S_3}\ydiagram{3,1}$ è $(3, 1, 0) \Rightarrow \mathrm{Res}^{S_4}_{S_3}\ydiagram{3,1} = \ydiagram{3} \oplus \ydiagram{2,1}$. Perciò $(\chi_{\mathrm{Ind}^{S_4}_{S_3}\ydiagram{2,1}}, \chi_{\ydiagram{3,1}})_{S_4} = 1$; continuando così si scopre che

$$\mathrm{Ind}^{S_4}_{S_3}\ydiagram{2,1} = \ydiagram{2,1,1} \oplus \ydiagram{2,2} \oplus \ydiagram{3,1}.$$

$\square$

Esercizio 8. Se C è una classe di coniugio di G tale che $C \cap H$ si spezza in classi di coniugio $D_1, \ldots, D_r$ di H, allora

$$\chi_{\mathrm{Ind}^G_H W}(C) = \frac{o(G)}{o(H)} \sum_{i=1}^{r} \frac{|D_i|}{|C|} \chi_W(D_i).$$

dove con $\chi_{\mathrm{Ind}^G_H W}(C)$ si intende il carattere valutato su di un qualunque elemento di C.

Dimostrazione. Scriviamo come prima $\mathrm{Ind}^G_H W = \oplus_\sigma g_\sigma W$ e sia $g \in G$ con $g g_\sigma = g_\tau h$. g è rappresentato da una matrice a blocchi e quindi $g_\sigma W$ contribuisce alla traccia se e solo se $\sigma = \tau$, cioè se e solo se $g_\sigma^{-1} g g_\sigma = h \in H$. In questo caso g agisce su $g_\sigma W$ come h agisce W, perciò vale la seguente formula

$$\chi_{\mathrm{Ind}^G_H W}(g) = \sum_{\sigma :\, g\sigma = \sigma} \chi_W(g_\sigma^{-1} g g_\sigma).$$

Ci chiediamo ora quanti sono i $\vartheta \in G$ tali che $\vartheta^{-1} g \vartheta \in D_i$:

$$\{\vartheta \in G : \vartheta^{-1} g \vartheta \in D_i\} = \sqcup_{g_i \in D_i} \{\vartheta \in G : \vartheta^{-1} g \vartheta = g_i\}.$$

Ora $\vartheta^{-1} g \vartheta = g_i = \tau^{-1} g \tau \Leftrightarrow \vartheta \tau^{-1} \in C(g)$ (dove $C(g)$ è il centralizzatore di g in G), quindi $|\{\vartheta \in G : \vartheta^{-1} g \vartheta = g_i\}| = o(C(g))$ e $|\{\vartheta \in G : \vartheta^{-1} g \vartheta \in D_i\}| = o(C(g))|D_i|$.

Consideriamo un tale ϑ ed un $h \in H$, allora $(\vartheta h)^{-1} g (\vartheta h) = h^{-1}(\vartheta^{-1} g \vartheta) h \in D_i$ quindi questa proprietà vale per tutta la classe laterale ϑH. Perciò nella formula precedente il numero di volte in cui $g_\sigma^{-1} g g_\sigma \in D_i$ è

$$\frac{o(C(g))|D_i|}{o(H)} = \frac{o(G)|D_i|}{|C| o(H)}$$

da cui abbiamo

$$\chi_{\mathrm{Ind}^G_H W}(g) = \sum_{i=1}^{r} \frac{o(G)|D_i|}{|C| o(H)} \chi_W(D_i)$$

$\square$

Corollario 17. Se W è la rappresentazione banale

$$\chi_{\mathrm{Ind}_H^G W}(C) = \frac{o(G)}{o(H)} \sum_{i=1}^{r} \frac{|D_i|}{|C|} = \frac{o(G)|C \cap H|}{o(H)|C|}$$

Esercizio 9. (1) Se $H < K < G$, $\mathrm{Ind}_H^G W = \mathrm{Ind}_K^G(\mathrm{Ind}_H^K W)$.

(2) Se U è un G-modulo e W è un H-modulo (con $H < G$), allora $U \otimes \mathrm{Ind}_H^G W \cong \mathrm{Ind}_H^G(\mathrm{Res}_H^G U \otimes W)$ (con l'isomorfismo $u \otimes g_\sigma w \mapsto g_\sigma(g_\sigma^{-1} u \otimes w)$).

Corollario 18. Se W è la rappresentazione banale, allora $U \otimes \mathrm{Ind}_H^G W \cong \mathrm{Ind}_H^G(\mathrm{Res}_H^G U)$.

3 Esempi ed esercizi

Esercizio 10. Sia W la rappresentazione standard di S_d con $d \geq 3$; dimostrare che $\mathrm{Sym}^2 W$ *non* è mai irriducibile (al contrario $\bigwedge^k W$ è sempre irriducibile).

Dimostrazione. Scriviamo $\mathbb{C}^d = W \oplus U$ dove U è la rappresentazione banale; $\mathrm{Sym}^2\mathbb{C}^d = \mathrm{Sym}^2 W + W + U$. Se $\mathbb{C}^d$ ha una base $\{v_1, \ldots, v_d\}$ allora $\mathrm{Sym}^2\mathbb{C}^d = \mathbb{C}[v_1, \ldots, v_d]_2$ è lo spazio dei polinomi omogenei di secondo grado nelle variabili $v_1, \ldots, v_d$ ed S_d agisce su $\mathrm{Sym}^2\mathbb{C}^d$ permutando le variabili. Il polinomio $v_1^2 + \cdots + v_d^2$ è lasciato fisso da S_d e quindi $\langle v_1^2 + \cdots + v_d^2 \rangle \cong U$, allo stesso modo il polinomio $v_i v_2 + v_1 v_3 + \cdots + v_i v_j + \cdots$ viene lasciato fisso da S_d e genera un'altra copia della rappresentazione banale. Segue che almeno una copia della banale deve stare in $\mathrm{Sym}^2 W$. □

Esercizio 11. Dimostrare che $\mathrm{Sym}^k W$ non è mai irriducibile per ogni k.

Esercizio 12. La rappresentazione standard è irriducibile per ogni d [sugg: scrivere $\mathbb{C}^d = W \oplus U$ (standard $\oplus$ banale) e dimostare che $2 = (\chi_{\mathbb{C}^d}, \chi_{\mathbb{C}^d}) = (\chi_W, \chi_W) + (\chi_W, \chi_U) + (\chi_U, \chi_W) + (\chi_U, \chi_U)$ e dedurre che $(\chi_W, \chi_W) = 1$].

3.1 Rappresentazioni di D_n

Consideriamo D_n con $n = 2h$; $D_n = \langle r, s | r^n = e, s^2 = e, rs = sr^{-1} \rangle$. Contiamo le classi di coniugio: $sr^i s = r^{-i}$ e $sr^{-i}s = r^i$, quindi ci sono h classi di coniugio del tipo $\{r^i, r^{-i}\}$ per $i \in \{1, \ldots, h\}$ (che per $i = h$ diventa $\{r^h\}$). Poi abbiamo la relazione $r^{-1}sr = sr^2$ e quindi ci sono le due classi di coniugio $\{s, sr^2, sr^4, \cdots\}$ e $\{sr, sr^3, \cdots\}$ e poi c'è la classe della sola identità. In totale ci sono $h + 3$ classi di coniugio e quindi $h + 3$ rappresentazioni irriducibili.

Troviamo immediatamente 4 rappresentazioni 1-dimensionali mandando $s \mapsto \pm id$ ed $r \mapsto \pm id$ (va bene perché $2 \mid o(r)$). Sia V un D_n-modulo;

S_5	e	$(1,2)$	$(1,2,3)$	$(1,2,3,4)$	$(1,2,3,4,5)$	$(1,2)(3,4)$	$(1,2)(3,4,5)$
$\ydiagram{5}$	1	1	1	1	1	1	1
$\ydiagram{1,1,1,1,1}$	1	-1	1	-1	1	1	-1
$\ydiagram{4,1}$	4	2	1	0	-1	0	-1
$\ydiagram{2,1,1,1}$	4	-2	1	0	-1	0	1
$\bigwedge^2 \ydiagram{5}$	6	0	0	0	1	-2	0
$\ydiagram{3,2}$	5	1	-1	-1	0	1	1
$\ydiagram{3,2} \otimes \ydiagram{1,1,1,1,1}$	5	-1	-1	1	0	1	-1

Tabella 4: Tabella dei caratteri di S_5

possiamo vedere (tramite restrizione con $C_n = \langle r \rangle$) V come C_n-modulo. V si spezza come C_n-rappresentazioni irriducibili, nelle quali r agisce come la moltiplicazione per una radice n-esima dell'unità.

Sia $v \in V$ tale che $\langle v \rangle \subseteq V$ sia una C_n-sottorappresentazione irriducibile $\Rightarrow rv = \omega^i v$ (con ω radice n-esima primitiva dell'unità). Ora $r(sv) = s(r^{-1}v) = s(\omega^{-i}v) = \omega^{-i}sv$ e quindi $\langle v, sv \rangle$ è una rappresentazione di D_n in cui r ed s agiscono come

$$r = \begin{pmatrix} \omega^i & 0 \\ 0 & \omega^{-i} \end{pmatrix}, \qquad s = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Da qui si vede anche che la rappresentazione $\langle v, sv \rangle$ è irriducibile (per $i \neq 0$, $i \neq h$). Abbiamo dunque trovato $h-1$ rappresentazioni irriducibili di dimensione 2 (che corrispondono ad $i = 1, \ldots, h-1$) che insieme alle 4 di dimensione 1 trovate prima danno tutte le $h+3$ rappresentazioni irriducibili di D_n.

Esercizio 13. Trovare tutte le rappresentazioni di D_n quando n è dispari.

3.2 Rappresentazioni di S_5 e di A_5

La tabella 4 mostra la tabella dei caratteri di S_5. La prima riga mostra il carattere della rappresentazione banale, la seconda della segno e la terza della standard (calcolato come sempre osservando che $\mathbb{C}^5 = \ydiagram{4,1} \oplus \ydiagram{5}$). La

A_5	e	$(1,2,3)$	$(1,2)(3,4)$	$(1,2,3,4,5)$	$(2,1,3,4,5)$
$\mathrm{Res}^{S_5}_{A_5}\yng(5)$	1	1	1	1	1
$\mathrm{Res}^{S_5}_{A_5}\yng(4,1)$	4	1	0	-1	-1
$\mathrm{Res}^{S_5}_{A_5}\yng(3,2)$	5	-1	1	0	0
Y	3	0	-1	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$
Z	3	0	-1	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Tabella 5: Tabella dei caratteri di A_5

quarta riga mostra il carattere della rappresentazione

$$\yng(2,1,1,1) = \yng(4,1) \otimes \yng(1,1,1,1,1)$$

che sappiamo già essere irriducibile. La quinta riga mostra il carattere della rappresentazione $\bigwedge^2\yng(4,1)$ calcolato osservando che per ogni rappresentazione V $\chi_{\bigwedge^2 V}(g) = \frac{1}{2}(\chi_V(g)^2 - \chi_V(g^2))$.

Consideriamo ora la rappresentazione $\mathrm{Sym}^2\yng(4,1)$; sappiamo che questa non è irriducibile. Il suo carattere è rappresentato dal vettore $(10,4,1,0,0,2,1)$, da cui vediamo che $(\chi_{\mathrm{Sym}^2\yng(4,1)}, \chi_{\mathrm{Sym}^2\yng(4,1)}) = 3$. Quindi $V = \mathrm{Sym}^2\yng(4,1)$ non può contenere una rappresentazione irriducibile con coefficiente 2 e deve spezzarsi come somma di 3 rappresentazioni irriducibili distinte. Sia $\{v_1, \ldots, v_4\}$ una base di V, allora $\langle v_1^2, v_2^2, v_3^2, v_4^2\rangle \subseteq \mathrm{Sym}^2 V$ e su questo sottospazio S_5 agisce esattamente come su V. Quindi

$$\mathrm{Sym}^2\yng(4,1) = \yng(5) \oplus \yng(4,1) \oplus ?$$

Da questa formula possiamo ricavare il carattere della rappresentazione misteriosa che indichiamo con $\yng(3,2)$ e riempe la sesta riga. La settima riga si ottiene considerando il prodotto tensore di $\yng(3,2)$ e della segno.

Veniamo adesso alle rappresentazioni di A_5 (la cui tabella dei caratteri è mostrata nella tabella 5). Restringendo le rappresentazioni banale, standard e $\yng(3,2)$ otteniamo le prime tre rappresentazioni irriducibili. Il carattere di $\mathrm{Res}^{S_5}_{A_5} \bigwedge^2\yng(4,1)$ corrisponde al vettore $(6,0,-2,,1,1)$ da cui possiamo vedere che $\mathrm{Res}^{S_5}_{A_5} \bigwedge^2\yng(4,1)$ non è irriducibile. Mancano quindi due rappresentazioni irriducibili Y e Z; osserviamo inanzitutto che

$$1^2 + 4^2 + 5^2 + \dim Y^2 + \dim Z^2 = 60 \Rightarrow \dim Y^2 + \dim Z^2 = 18 \Rightarrow \\ \dim Y = \dim Z = 3.$$

I caratteri di Y e Z devono essere ortogonali ai caratteri delle tre rappresentazioni trovate: questo ci fornisce 3 equazioni indipendenti, ma dobbiamo determinare 4 variabili. Imponiamo allora l'equazione di secondo grado $(\chi_Y, \chi_Y) = 1$. Questa ha due soluzioni e determina quindi le due rappresentazioni Y e Z.

Otteniamo inoltre che $\mathrm{Res}_{A_5}^{S_5} \bigwedge^2 \yng(3,1) = Y \oplus Z$. Possiamo considerare $\yng(3,1)$ anche come rappresentazione a coefficienti in $\mathbb{Q}$; se $\mathrm{Res}_{A_5}^{S_5} \bigwedge^2 \yng(3,1)$ si spezzasse come rappresentazione a coefficienti in $\mathbb{Q}$ avremmo che i caratteri delle componenti irriducibili sarebbero razionali (perché su $\mathbb{Q}$ vale sia il teorema di completa riducibilità che quello di indipendenza lineare dei caratteri).

A_5 è il gruppo delle isometrie del dodecaedro (o dell'icosaedro) (in $\mathbb{R}^3$). Le rappresentazioni Y e Z sono collegate nel seguente modo

$$\begin{tikzcd}
A_5 \arrow[rr, "Y"] \arrow[dr, "\tau"'] & & GL(\mathbb{R}^3) \\
& A_5 \arrow[ur, "X"'] &
\end{tikzcd}$$

dove τ è un automorfismo esterno (coniugio per un elemento che non sta in A_5). Da quanto detto prima si deduce che non si può immergere un dodecaedro in $\mathbb{R}^n$ in modo che abbia vertici razionali.

4 Rappresentazioni irriducibili di S_d

27/03/09

Sia $d \geq 1$, una *partizione* λ di d è una successione non crescente di numeri naturali

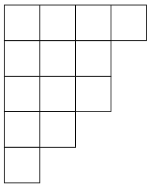
$$\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \lambda_k \geq 0 \geq \cdots)$$

tale che $\sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n = d$ (in particolare λ è definitivamente nulla). Spesso scriveremo $\lambda = (\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_k)$ omettendo gli zeri. Una partizione di d si può rappresentare con un *diagramma di young*:

$$\yng(5,4,4,3,1)$$

dove la j-esima riga ha λ_j quadratini.

Esempio 12. Se $d = 13$, il diagramma di young che rappresenta $\lambda = (4, 3, 3, 2, 1)$ è



Osservazione 8. Dato un diagramma di young si può sempre prendere il diagramma simmetrico rispetto alla diagonale (cioè trasporre il diagramma). In questo modo si ottiene un'altra partizione λ' che chiamiamo *partizione coniugata di* λ.

Nell'esempio precedente si ha $\lambda' = (5, 4, 3, 1)$.

Osservazione 9. Le partizioni di d sono in corrispondenza biunivoca con le classi di coniugio di S_d. Cioè sono tante quante le rappresentazioni irriducibili di S_d.

Definizione 8. Un *tableaux di Young* è un riempimento di un diagramma di Young con gli elementi di $\{1, \dots, d\}$.

Ad esempio

1	3	4	5
8	7		
6	2		
9			

Ad un tableaux T si associa il sottogruppo di S_d

$$P_T = \{\sigma \in S_d : \sigma \text{ preserva ogni riga}\}$$

Nell'esempio precedente $(1, 4, 5)(6, 2) \in P_T$. A T possiamo anche associare il gruppo

$$Q_T = \{\sigma \in S_d : \sigma \text{ preserva ogni colonna}\}$$

Consideriamo gli elementi di $\mathbb{C}S_d$

$$a_T = \sum_{\gamma \in P_T} \gamma, \qquad b_T = \sum_{\delta \in Q_T} (-1)^\delta \delta$$

Definizione 9. Il *simmetrizzatore di Young* è l'elemento

$$c_T = a_T b_T \in \mathbb{C}S_d.$$

Vedremo che $(\mathbb{C}S_d)c_T$ è una S_d-rappresentazione irriducibile. Sia T un tableax di young, se scegliamo un altro riempimento T' dello stesso diagramma possiamo considerare la permutazione $\vartheta \in S_d$ che manda T in T' ($\vartheta T = T'$). Allora $P_{T'} = \vartheta P_T \vartheta^{-1}$ e $Q_{T'} = \vartheta Q_T \vartheta^{-1}$, dunque a_T e b_T cambiano per coniugio e di conseguenza anche c_T cambia per coniugio. Segue che

$$(\mathbb{C}S_d)c_{T'} = (\mathbb{C}S_d)\vartheta c_T \vartheta^{-1} = (\vartheta \mathbb{C}S_d \vartheta^{-1})\vartheta c_T \vartheta^{-1} = \vartheta(\mathbb{C}S_d)c_T\vartheta^{-1}.$$

Quindi un diagramma di Young identifica una S_d-rappresentazione a meno di coniugio in $\mathbb{C}S_d$.

Esempio 13. (1) $\lambda = (d)$; il corrispondente diagramma di Young è $\square\square\square\square$ e si ha

$$P_T = S_d,\ Q_T = (e) \quad \Rightarrow \quad a_T = \sum_{g \in S_d} g,\ b_T = e \quad \Rightarrow \quad c_T = a_T = \sum_{g \in S_d} g.$$

S_d agisce banalmente su $(\mathbb{C}S_d)c_T$, quindi $(\mathbb{C}S_d)c_T = \mathbb{C}c_T$ è una rappresentazione 1-dimensionale ed è la rappresentazione banale.

(2) $\lambda = (1, 1, \ldots, 1)$; abbiamo $P_T = (e)$ e $Q_T = S_d$, da cui

$$a_T = e,\ c_T = b_T = \sum_{g \in S_d} (-1)^g g.$$

Ogni elemento $h \in S_d$ agisce su $(\mathbb{C}S_d)c_T$ come $(-1)^h id$, infatti

$$hc_T = \sum_{g \in S_d} (-1)^g hg = (-1)^h \sum_{g \in S_d} (-1)^{hg} hg = (-1)^h c_T.$$

Quindi $(\mathbb{C}S_d)c_t$ ha dimensione 1 ed è la rappresentazione segno.

Esercizio 14. Calcolare $(\mathbb{C}S_3)c_T$ dove T è il tableaux

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}\ .$$

[sugg: $P_T = \{e, (1, 2)\}$, $Q_T = \{e, (1, 3)\}$, $a_T = e + (1, 2)$, $b_T = e - (1, 3)$, $c_T = e - (1, 3) + (1, 2) - (1, 3, 2)$]

Teorema 19. Data una partizione λ, chiamando $c_\lambda = c_T$ per un qualunque riempimento T del diagramma di Young corrispondente, vale

(1) $c_\lambda^2 = n_\lambda c_\lambda$ con $n_\lambda \in \mathbb{Z}$,

(2) $(\mathbb{C}S_d)c_\lambda$ è una rappresentazione irriducibile di S_d; inoltre tutte le rappresentazioni irriducibili di S_d si ottengono in questo modo.

Osservazione 10. Questa costruzione si può fare anche su $\mathbb{Q}$. Si considerano gli S_d-moduli $(\mathbb{Q}S_d)c_\lambda$; questi, per il teorema appena enunciato, devono essere irriducibili, infatti se si spezzassero in più fattori irriducibili anche $(\mathbb{Q}S_d)c_\lambda \otimes \mathbb{C} \cong (\mathbb{C}S_d)c_\lambda$ di spezzerebbe.

Il teorema di completa riducibilità vale anche su $\mathbb{Q}$ o, più in generale, su campi tali che $\operatorname{char}\mathbb{K} \nmid o(G)$. Se $L \subseteq V$ è un G-modulo, consideriamo una proiezione $\pi : V \to L$ (scegliendo un complementare qualunque). La mappa

$$\varphi : \frac{1}{o(G)} \sum_{g \in G} g\pi_L$$

è un morfismo di G-moduli. φ è una proiezione, quindi $V = \operatorname{Ker}\varphi \oplus L$ è somma diretta di G-moduli.

Inoltre per dimostare che i caratteri delle rappresentazioni irriducibili sono tutte le funzioni di classe si usa la parte del lemma di Schur che non dipende da $\mathbb{C}$. Quindi questo fatto vale anche su $\mathbb{Q}$. In questo modo possiamo trovare tutte le rappresentazioni irriducibili di S_d su $\mathbb{Q}$.

Chiamiamo $P_\lambda = P_T$ e $Q_\lambda = Q_T$, osserviamo che $P_\lambda \cap Q_\lambda = (e)$ e quindi le scritture

$$pq : \quad p \in P_\lambda,\, q \in Q_\lambda$$

sono uniche (ma può accadere che $P_\lambda Q_\lambda \neq S_d$). Quindi

$$c_\lambda = a_\lambda b_\lambda = \sum_{g \in P_\lambda Q_\lambda} \varepsilon(g) g$$

dove $\varepsilon(pq) = (-1)^q$, in particolare $\varepsilon(e) = 1$.

Lemma 20. (a) $\forall p \in P_\lambda\ pa_\lambda = a_\lambda p = a_\lambda$,

(b) $\forall q \in Q_\lambda\ qb_\lambda = b_\lambda q = (-1)^q b_\lambda$,

(c) $\forall p \in P_\lambda, q \in Q_\lambda\ pc_\lambda((-1)^q q) = c_\lambda$ e, a meno di multipli scalari, c_λ è l'unico elemento di $\mathbb{C}S_d$ con questa proprietà.

Dimostrazione. Le prime due proprietà e la prima parte della terza sono immediate, vediamo il resto. Sia $\sum_g n_g g \in \mathbb{C}S_d$ tale che per ogni $p \in P_\lambda$ e $q \in Q_\lambda$

$$p\left(\sum_g n_g g\right)((-1)^q q) = \sum_g (-1)^q n_g pgq = \sum_g n_g g,$$

allora $n_{pgq} = (-1)^q n_g$ e per $g = e$ abbiamo $n_{pq} = (-1)^q n_e$. Se dimostriamo che $n_g \neq 0 \Rightarrow g \in P_\lambda Q_\lambda$ allora $\sum_g n_g g = n_e c_\lambda$ come voluto. Supponiamo che sia $g \notin P_\lambda Q_\lambda$ e cerchiamo una trasposizione $t \in P_\lambda$ tale che $g^{-1}tg \in Q_\lambda$, così $g = tg(g^{-1}tg)$ e $n_g = n_{tg(g^{-1}tg)} = (-1)^{g^{-1}tg} n_g = -n_g \Rightarrow n_g = 0$ (dove $g^{-1}tg$ è una trasposizione, quindi è dispari).

Trovare una tale t equivale a dire che esistono due indici i e j che stanno nella stessa riga di T e nella stessa colonna di gT. Supponiamo che non esistano tali indici, allora ogni coppia di indici della prima riga di T viene mandata (da g) in colonne diverse di gT. Moltiplicando per un opportuno $q_1 \in Q_{gT}$ possiamo supporre che la prima riga di T venga mandata nella prima riga di gT e, moltiplicando per un opportuno $p_1 \in P_T$ possiamo fissare la prima riga. Cioè p_1T e q_1gT hanno la stessa prima riga. Iterando si trovano $p_2 \in P_T$ e $q_2 \in Q_T$ tali che p_2p_1T e q_2q_1T abbiano le stesse prime due righe. Iterando ancora abbiamo $(p_k \cdots p_1)T = (q_k \cdots q_1 g)T \Rightarrow p = qg \Rightarrow g = p(g^{-1}q^{-1}g) \in P_TQ_T$ (dove $q \in Q_{gT} \Rightarrow g^{-1}q^{-1}g) \in Q_T$),assurdo. □

Mettiamo un ordinamento totale sull'insieme delle partizioni;

$$\lambda > \tau \Leftrightarrow \lambda_1 > \tau_1 \text{ o } \lambda_1 = \tau_1 \text{ e } (\lambda_2, \ldots, \lambda_k) > (\tau_2, \ldots, \tau_h).$$

Lemma 21. (a) Se $\lambda > \mu$ allora $\forall x \in \mathbb{C}S_d\ a_\lambda x b_\mu = 0$;

(b) per ogni $x \in \mathbb{C}S_d\ c_\lambda x c_\lambda = kc_\lambda$, in particolare $c_\lambda^2 = n_\lambda c_\lambda$.

Dimostrazione. (a) Basta mostrarlo per $x = g$ con $g \in S_d$. Consideriamo il tableaux T utilizzato per costruire a_λ ed il tableaux Γ utilizzato per costruire b_μ. Prendendo $g\Gamma$ al posto di Γ si ottiene $gb_\mu g^{-1}$ ed $a_\lambda g b_\mu = 0 \Leftrightarrow a_\lambda g b_\mu g^{-1} = 0$. Perciò ($\Gamma$ è arbitrario) basta dimostrare che $a_\lambda b_\mu = 0$.

Poiché $\lambda > \mu$ (detti T e Γ i riempimenti di λ e μ) esistono due indici i e j che stanno nella stessa riga di T e nella stessa colonna di Γ. Sia $t = (i, j) \in S_d$, allora $t \in P_\lambda \cap Q_\mu \Rightarrow a_\lambda t = a_\lambda$, $tb_\mu = (-1)^t b_\mu = -b_\mu \Rightarrow a_\lambda b_\mu = a_\lambda t t b_\mu = -a_\lambda b_\mu \Rightarrow a_\lambda b_\mu = 0$.

(b) Usando il lemma 20 basta dimostrare che per ogni $p \in P_\lambda$, $q \in Q_\lambda$

$$p(c_\lambda x c_\lambda)((-1)^q q) = c_\lambda x c_\lambda.$$

Ora $p(c_\lambda x c_\lambda)((-1)^q q) = pa_\lambda b_\lambda x a_\lambda b_\lambda (-1)^q q = a_\lambda b_\lambda c a_\lambda b_\lambda = c_\lambda x c_\lambda$.

□

Lemma 22. (1) Ogni $V_\lambda = (\mathbb{C}S_d)c_\lambda$ è una rappresentazione irriducibile,

(2) Se $\lambda \neq \mu$, V_λ e V_μ *non* sono isomorfe.

Dimostrazione. (1) Per il lemma 21 abbiamo $c_\lambda(\mathbb{C}S_d)c_\lambda \subseteq \mathbb{C}c_\lambda$. Sia $W \subseteq (\mathbb{C}S_d)c_\lambda$ una sottorappresentazione, allora $c_\lambda W \subseteq \mathbb{C}c_\lambda$ e (per questioni di dimensione) $c_\lambda W = 0$ o $c_\lambda W = \mathbb{C}c_\lambda$.

Nel secondo caso $W \supseteq (\mathbb{C}S_d)c_\lambda W = (\mathbb{C}S_d)c_\lambda = V_\lambda \supseteq W \Rightarrow V_\lambda = W$. Nel primo caso $W \cdot W \subseteq (\mathbb{C}S_d)c_\lambda W = 0 \Rightarrow W \cdot W = 0$. Scriviamo $\mathbb{C}S_d = W \oplus U$ e sia $e = w+u$, possiamo supporre $w \neq 0$ perché altrimenti $\mathbb{C}S_d = (\mathbb{C}S_d)e = (\mathbb{C}S_d)u \subseteq U$ e quindi $W = 0$.

La mappa $\cdot w : \mathbb{C}S_d \to W$ è surgettiva, infatti sia $w_1 \in W$, $w_1 e = w_1 w + w_1 u$; ora $w_1 u \in U$ ma $w_1 u = w_1 - w_1 w \in U \cap W \Rightarrow w_1 u = 0$ e $w_1 e = w_1 w$. Prendendo $w_1 = w$ abbiamo $w = w^2$, ma $W^2 = 0 \Rightarrow w^2 = w = 0 \Rightarrow W = 0$. *03/04/09*

(2) Abbiamo dimostrato che $c_\lambda V_\lambda = \mathbb{C}c_\lambda \neq 0$ e $c_\lambda V_\mu = c_\lambda(\mathbb{C}S_d)c_\mu = 0$. Se esistesse un isomorfismo di S_d-moduli $\varphi : V_\lambda \to V_\mu$ avremmo che $\varphi(c_\lambda x) = c_\lambda \varphi(x) = 0$ e $c_\lambda x \neq 0$ per qualche $x \in V_\lambda$, assurdo (φ non sarebbe iniettiva).

□

Osservazione 11. Per il lemma 21 abbiamo $c_\lambda^2 = n_\lambda c_\lambda$, mostriamo che $n_\lambda \in \mathbb{Z}$; infatti consideriamo la mappa $\cdot c_\lambda : \mathbb{C}S_d \to V_\lambda$, scriviamo $\mathbb{C}S_d = V_\lambda \oplus K$. Su V_λ questa mappa agisce come $n_\lambda \cdot$ (moltiplicazione a sinistra) mentre K lo manda in V_λ. Quindi

$$\operatorname{tr}(\cdot c_\lambda) = (\dim V_\lambda) n_\lambda.$$

Calcoliamo la traccia di $\cdot c_\lambda$ in un altro modo: $\{h\}_{h \in S_d}$ è una base di $\mathbb{C}S_d$, sappiamo che $c_\lambda = \sum_{p \in P_\lambda, q \in Q_\lambda} (-1)^q pq = e \pm \cdots$, dunque per ogni $h \in S_d$ $hc_\lambda = h \pm \cdots$ ed h da contributo 1 alla traccia di $\cdot c_\lambda$. Quindi $\operatorname{tr}(\cdot c_\lambda) = d!$. Mettendo insieme le due cose abbiamo

$$(\dim V_\lambda) n_\lambda = d! \Rightarrow n_\lambda = \frac{d!}{\dim V_\lambda}$$

Il fatto che n_λ sia intero segue dal seguente

Esercizio 15. Per ogni rappresentazione irriducibile V di un gruppo finito G si ha $\dim V \mid o(G)$.

Dimostrazione. Sia C una classe di coniugio di G, allora $\varphi = \sum_{g \in C} g\cdot : V \to V$ è una mappa di G-rappresentazioni (perché è $\sum_{g \in S_n} \alpha(g) g\cdot$ dove α è la funzione caratteristica di C che è una funzione di classe) e per il lemma di Schur $\varphi = \lambda id$. Ora da un lato $\operatorname{tr} \varphi = \lambda \dim V$ e da un altro $\operatorname{tr} \varphi = \sum_{g \in C} \operatorname{tr} g = |C| \operatorname{tr} g = |C| \chi_V(C)$ (perché la traccia è costante sulle classi di coniugio). Quindi $\lambda \dim V = |C| \chi_V(C)$.

Mostriamo che λ è un intero algebrico. $\sum_{g\in C} g$ appartiene al centro dell'algebra $\mathbb{C}G$ (e quindi anche a quello dell'algebra $\mathbb{Z}G$); in realtà il centro dell'algebra $\mathbb{Z}G$ è generato come $\mathbb{Z}$-modulo dagli elementi $\sum_{g\in D} g$ al variare di D nelle classi di coniugio (e quindi è finitamente generato). Infatti sia $\sum_{g\in G} n_g g \in Z(\mathbb{Z}G)$, allora per ogni $h \in G$

$$h\left(\sum_{g\in G} n_g g\right)h^{-1} = \sum_{g\in G} n_g hgh^{-1} = \sum_{g\in G} n_g g \Rightarrow \forall g, h \in G n_{hgh^{-1}} = n_g$$

e quindi $\sum_{g\in G} n_g g = \sum_C n_C x_C$ dove $x_C = \sum_{g\in C} g$.

Ora $Z(\mathbb{Z}G)$ è un'algebra e quindi, fissata una classe di coniugio C, $\mathbb{Z}\left[\sum_{g\in C} g\right] \subseteq Z(\mathbb{Z}G)$ che è finitamente generato come $\mathbb{Z}$-modulo. Dunque $x_C = \sum_{g\in C} g$ è intero su $\mathbb{Z}$. Se $x_C^k + \cdots + a_1 x_C + a_0 = 0$, allora $(\lambda^k + \cdots + a_1\lambda + a_0)\cdot$ è l'applicazione nulla e quindi $\lambda^k + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0$. Perciò λ è intero su $\mathbb{Z}$.

Ora imponiamo $(\chi_V, \chi_V) = 1$ (V è irriducibile):

$$\begin{aligned} 1 = \frac{1}{o(G)}\sum_{g\in G}\overline{\chi_V(g)}\chi_V(g) = \frac{1}{o(G)}\sum_C |C|\overline{\chi_V(C)}\chi_V(C) = \\ \frac{1}{o(G)}\sum_C \frac{(\dim V)\lambda_C}{|C|}|C|\overline{\chi_V(C)} \Rightarrow \\ \frac{o(G)}{\dim V} = \sum_C \lambda_C\overline{\chi_V(C)}. \end{aligned}$$

Ora $\overline{\chi_V(C)}$ è intero algebrico (è radice n-esima dell'unità) e quindi anche $\frac{o(G)}{\dim V}$ è intero algebrico. Ma $\frac{o(G)}{\dim V} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \frac{o(G)}{\dim V} \in \mathbb{Z}$ ($\mathbb{Z}$ è integralmente chiuso). $\square$

Quindi se un gruppo G ha ordine dispari, ogni sua rappresentazione pari sarà riducibile.

Esercizio 16. La rappresentazione di S_n data dalla sottorappresentazione $\{(x_1, \dots, x_n) : \sum x_i = 0\}$ è isomorfa a $V_{\tiny\begin{array}{|c|c|c|}\hline & & \\ \hline \\ \cline{1-1}\end{array}}$ (cioè V_λ con $\lambda = (n-1, 1)$).

Dimostrazione. Consideriamo un riempimento che ha $1, \dots, n-1$ nella prima riga ed n nella seconda. Allora

$$a_\lambda = \sum_{g\in S_n:\, g(n)=n} g, \quad b_\lambda = e - (1, n) \quad \Rightarrow \quad c_\lambda = \sum_{g(n)=n} g - \sum_{g(1)=n} g.$$

Sia $g \in S_n$ con $g(n) = j$, $gc_\lambda = \sum_{h(n)=j} h - \sum_{h(1)=j} h = v_j$ e quindi $V_\lambda = \langle v_1, \dots, v_n\rangle_{\mathbb{C}}$ ha dimensione $\leq n$. Osserviamo che $\sum_{i=1}^n v_i = 0$ ed (esercizio) $v_2, \dots, v_n$ sono linearmente indipendenti. Quindi $\dim V_\lambda = n - 1$.

Una base di V_λ è data da $\{v_2 - v_1, v_3 - v_2, \dots, v_n - v_{n-1}\}$ e se $g \in S_n$ verifica $g(j) = i$, $g(j-1) = k$ allora $g(v_j - v_{j-1}) = v_i - v_k$. Mentre una base di $\{\sum x_i = 0\} \subseteq \mathbb{C}^n$ è data da $\{e_2 - e_1, \dots, e_n - e_{n-1}\}$ e $g \in S_n$ agisce come $g(e_j - e_{j-1}) = e_i - e_k$. Perciò le due rappresentazioni sono isomorfe. $\square$

Esercizio 17. Sia U la rappresentazione segno, allora per ogni partizione λ

$$V_\lambda \otimes U \cong V_{\lambda'}$$

dove λ' è la partizione coniugata. [sugg: $V_\lambda = \mathbb{C}S_n a_\lambda b_\lambda$].

5 Funzioni simmetriche

Consideriamo l'azione di S_n su $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$ che permuta le variabili.

Definizione 10. Un polinomio $p \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$ si dice *simmetrico* se $\forall \sigma \in S_n \ \sigma p = p$.

I polinomi simmetrici formano un sottoanello $\Lambda_n \subseteq \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$. In particolare Λ_n è graduato, cioè $\Lambda_n = \oplus_{k \geq 0} \Lambda_n^k$ dove $\Lambda_n^k = \{$polinomi simmetrici omogenei di grado $k\} \cup \{0\}$.

Esempio 14. Se $p(x_1, x_2, x_3)$ è un polinomio simmetrico che contiene come monomio $x_1^2 x_2$, allora contiene anche $x_1^2 x_3, x_2^2 x_1, x_2^2 x_3, x_3^2 x_1, x_3^2 x_2$.

Se $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ scriviamo x^α per il monomio $x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$. Se λ è una partizione chiamiamo *lunghezza* di λ il numero $l(\lambda)$ di termini non nulli (ad esempio $l(3, 2, 2, 1, 1, 1, 0, \dots) = 6$) e $|\lambda| = \sum \lambda_i$.

Definizione 11. Se λ è una partizione, definiamo $m_\lambda(x_1, \dots, x_n) = \sum_\alpha x^\alpha$ dove α è una permutazione effettiva di $(\lambda_1, \dots, \lambda_k, 0, \dots)$ (cioè non lo fissa).

Ad esempio $m_{(1,1,0)}(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_1 x_3$ perché le permutazioni distinte di $(1, 1, 0)$ sono $(1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1)$; allo stesso modo $m_{(2,0)}(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$, infatti $(2, 0)$ lo pensiamo come $(2, 0, 0, 0)$ le cui permutazioni distinte sono $(2, 0, 0, 0), (0, 2, 0, 0), (0, 0, 2, 0), (0, 0, 0, 2)$.

Proposizione 23. $\{m_\lambda(x_1, \dots, x_n) : |\lambda| \leq n\}$ è una base di Λ_n; in particolare $\{m_\lambda(x_1, \dots, x_n) : |\lambda| = k\}$ è una base di Λ_n^k.

Osservazione 12. Un modo per creare polinomi simmetrici è considerare l'espressione

$$(x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_n) = x^n - s_1 x^{n-1} + s_2 x^{n-2} - \cdots \pm s_{n-1} x \pm s_n;$$

gli s_i hanno la proprietà che ogni variabile compare con grado 1.

Vogliamo avere un modo di trattare tutti i polinomi simmetrici simultaneamente. Se $m > n$ possiamo costruire l'omomorfismo di anelli

$$\begin{gathered}\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_m] \to \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n] \\ x_i \mapsto x_i \text{ se } i \leq n \\ x_i \mapsto 0 \text{ se } i > n\end{gathered}$$

Questo si restringe ad un omomorfismo $\rho_{m,n} : \Lambda_m \to \Lambda_n$; se $l(\lambda) > n$ allora $\rho_{m,n}(m_\lambda(x_1, \dots, x_m)) = 0$, se invece $l(\lambda) \leq n$ allora $\rho_{m,n}(m_\lambda(x_1, \dots, x_m)) = m_\lambda(x_1, \dots, x_n)$. Dunque $\rho_{m,n}$ è surgettiva ed è un omomorfismo omogeneo (cioè mantiene il grado). In particolare è ben definita $\rho^k_{m,n} : \Lambda^k_m \to \Lambda^k_n$; se $k \leq n \leq m$ allora $m_\lambda \in \Lambda^k_m \Rightarrow |\lambda| = k$ ed $l(\lambda) \leq k \leq n$, da cui $\rho^k_{m,n}(m_\lambda) = m_\lambda$ e $\rho^k_{m,n}$ è bigettiva.

Definiamo per ogni $k \in \mathbb{N}$ $\Lambda^k = \varprojlim \Lambda^k_n$. Dunque un elemento di Λ^k è una successione di polinomi (f_n) tale che per ogni n $f_n \in \Lambda^k_n$ e per ogni $m > n$ $\rho_{m,n}(f_m) = f_n$ (*successione coerente*).

Λ^k ha una base costituita dalle *funzioni simmetriche monomiali* $m_\lambda = (m_\lambda(x_1, \dots, x_n))$ (attenzione! è una successione). Ad esempio $m_{(1,1)} = (0, x_1x_2, x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3, \dots)$. Infatti per $m \geq n \geq k$ $\rho^k_{m,n}$ è una bigezione e quindi una volta scelti $f_1, \dots, f_k$ gli elementi $f_{k+1}, \dots$ sono fissati.

Definizione 12. L'anello delle funzioni simmetriche è $\Lambda = \oplus_{k \geq 0} \Lambda^k$.

Λ è veramente un anello e la moltiplicazione è indotta da $(f_n) \in \Lambda^j, (g_n) \in \Lambda^k \Rightarrow (f_n)(g_n) = (f_ng_n) \in \Lambda^{j+k}$.

Osservazione 13. Λ *non* è il limite inverso nella categoria degli anelli; infatti se lo fosse conterrebbe anche l'elemento $\prod_{i=1}^\infty (1 + x_i) = (\prod_{i=1}^n (1 + x_i))_{n=1}^\infty = (1, x_1, x_1 + x_2 + x_1x_2, \dots)$. Ora un generico elemento di Λ è del tipo $\sum k_\lambda m_\lambda$ dove la somma è finita ed ogni elemento della successione coinvolge al più $l(\overline{\lambda})$ variabili ($\overline{\lambda}$ è la partizione di lunghezza massima).

5.1 Funzioni simmetriche elementari

07/04/09

Abbiamo visto che, dato un polinomio $p(x) = (x - \gamma_1) \cdots (x - \gamma_n) = x^n - s_1x^{n-1} + s_2x^{n-2} - \cdots \pm s_{n-1}x \pm s_n$, gli s_i sono polinomi simmetrici.

Definizione 13. Per ogni intero $r \geq 0$ la r-esima funzione elementare simmetrica è

$$e_r = \left(\sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_r} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_r} \right) = m_\lambda$$

dove $\lambda = (1, 1, \dots, 1, 0, \dots)$ e $|\lambda| = l(\lambda) = r$.

La funzione generatrice associata agli elementi e_r è

$$E(t) = \sum_{r \geq 0} e_r t^r \in \Lambda[[x]].$$

Osserviamo che vale $E(t) = \prod_{i \geq 1}(1 + x_i t) = (\prod_{i=1}^{n}(1 + x_i t))_{n=1}^{\infty}$. Quest'ultima è un'uguaglianza di serie formali e si dimostra grado per grado (si scopre che il coefficiente di grado r è proprio e_r).

Definizione 14. Per ogni partizione $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k, 0, \dots)$ definiamo gli elementi

$$e_\lambda = e_{\lambda_1} e_{\lambda_2} \cdots e_{\lambda_k}$$

Dimostreremo il seguente:

Teorema 24. Gli e_λ costituiscono una base di Λ su $\mathbb{Z}$.

Teorema 25. Sia λ una partizione, λ' la sua coniugata; allora

$$e_{\lambda'} = m_\lambda + \sum_{\mu} a_{\lambda\mu} m_\mu$$

dove $a_{\lambda\mu} \in \mathbb{N}$ e μ varia tra le partizioni con $\mu \prec \lambda$ secondo l'ordine

$$\mu \preceq \lambda \Leftrightarrow \forall i \quad \mu_1 + \cdots + \mu_i \leq \lambda_1 + \cdots + \lambda_i$$

Dimostrazione. Sia $e_{\lambda'} = e_{\lambda'_1} e_{\lambda'_2} \cdots e_{\lambda'_k} = \sum (x_{i_1} \cdots x_{i_{\lambda'_1}})(x_{j_1} \cdots x_{j_{\lambda'_2}}) \cdots (x_{h_1} \cdots x_{h_{\lambda'_k}})$. Ogni termine della sommatoria corrisponde ad un riempiemento della tabella di young corrispondente a λ

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}
\hline
i_1 & j_1 & \cdots & h_1 \\
\hline
i_2 & j_2 & \cdots & h_2 \\
\hline
\vdots & \vdots & \ddots & \\
\hline
\vdots & j_{\lambda'_2} & & \\
\hline
i_{\lambda'_1} & & & \\
\hline
\end{array}$$

In questo riempimento gli elementi $\leq r$ stanno nelle prime r righe. Perciò se scriviamo $e_{\lambda'} = \sum_\alpha x^\alpha$, allora per ogni α che compare nell'espressione $\alpha_1 + \cdots + \alpha_r$ conta il numero di occorrenze degli indici $\leq r$ in $i_1, \dots, h_{\lambda'_k}$ e per quanto detto si ha

$$\alpha_1 + \cdots + \alpha_r \leq \lambda_1 + \cdots + \lambda_r$$

cioè se α fosse una partizione varrebbe $\alpha \preceq \lambda$. Sia μ la permutazione di α che è una partizione (cioè la permutazione non crescente), allora $\mu \prec \lambda$ (perché μ è uno dei particolari α che si può ottenere). Quindi $e_{\lambda'} = \sum_{\mu \preceq \lambda} a_{\lambda\mu} m_\mu$.

Resta da dire che $a_{\lambda\lambda} = 1$, ma m_λ occorre solo se $i_1 = j_1 = \cdots = h_1 = 1$, $i_2 = j_2 = \cdots = h_2 = 2$ e così via. Perciò c'è un solo monomio in cui compare m_λ e $a_{\lambda\lambda} = 1$. □

Osservazione 14. L'ordine definito *non* è totale e in particolare non coincide con quello del lemma 21. Infatti $(3,1,1,1)$ e $(2,2,2)$ non sono confrontabili.

Il teorema 25 ci permette di concludere che gli e_λ formano una base di Λ; infatti l'endomorfismo (omogeneo) $f : m_\lambda \mapsto e_{\lambda'}$ ristretto ad ogni Λ_n^k è un automorfismo. Per vederlo osserviamo che $\lambda \prec \mu \Rightarrow \lambda < \mu$ (dove il secondo è l'ordinamento del lemma 21) e quindi se ordiniamo gli $\{m_\lambda : |\lambda| = k\}$ secondo l'ordine $<$ f è rappresentato da una matrice triangolare con 1 sulla diagonale. Dunque $f : \Lambda^k \to \Lambda^k$ è isomorfismo per ogni k.

Possiamo comunque dimostrare esplicitamente che gli e_λ formano una base. Infatti per ogni λ le partizioni $\mu \prec \lambda$ sono in numero finito e "induttivamente" possiamo dimostrare che $m_\lambda \in \operatorname{span}\langle e_\lambda \rangle$, osservando che

$$m_\lambda = e_{\lambda'} - \sum_{\mu \prec \lambda} a_{\lambda\mu} m_\mu.$$

Perciò gli e_λ generano Λ. Supponiamo invece di avere una relazione lineare $0 = \sum k_{\lambda'} e_{\lambda'} = \sum k_{\lambda'}(m_\lambda + \cdots)$. In questa scrittura i λ massimali compaiono soltanto una volta, quindi i coefficienti corrispondenti k_λ devono essere nulli e si procede ricorsivamente.

Corollario 26. $\Lambda = \mathbb{Z}[e_1, \ldots, e_n, \ldots]$ e gli e_i sono algebricamente indipendenti su $\mathbb{Z}$.

5.2 Un paio di applicazioni

Esempio 15 (Kronecker). Sia $p \in \mathbb{Z}[x]$ un polinomio monico le cui radici complesse hanno modulo ≤ 1 e tale che $p(0) \neq 0$, allora le radici di p sono radici dell'unità.

Dimostrazione. Sia $p = x^n - e_1(\boldsymbol{z})x^{n-1} + \cdots + (-1)^n e_n(\boldsymbol{z})$ dove $\boldsymbol{z} = (z_1, \ldots, z_n)$ sono le radici di p ed $e_j(\boldsymbol{z}) \in \mathbb{Z}$ per ogni j. Sia Ω_n l'insieme dei polinomi di questo tipo di grado n; allora $|\Omega_n| < \infty$, infatti (usando il fatto che $|z_i| \leq 1$)

$$|e_p(\boldsymbol{z})| = \left| \sum_{I \subseteq \{1,\ldots,n\},\, |I| = p} \prod_{i \in I} z_i \right| \leq \binom{n}{p}.$$

Consideriamo il polinomio

$$Q_k = (x - z_1^k) \cdots (x - z_n^k)$$

Ora le radici di Q_k sono $|z_j^k| \leq 1$ e $Q(0) \neq 0$, inoltre $Q_k \in \mathbb{Z}[x]$ infatti

$$Q_k = x^n - e_1(\boldsymbol{z}^k)x^{n-1} + \cdots + (-1)^n e_n(\boldsymbol{z}^k)$$

dove $e_j(\boldsymbol{z}^k) = e_j(z_1^k, \ldots, z_n^k)$ è un polinomio simmetrico in $\mathbb{Z}[z_1, \ldots, z_n]$ e per il teorema 24

$$e_j(z_1^k, \ldots, z_n^k) = g(e_1(\boldsymbol{z}), \ldots, e_n(\boldsymbol{z}))$$

con $g \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$ e quindi $e_j(\boldsymbol{z}^k) \in \mathbb{Z}$.

Perciò $Q_k \in \Omega_n$; ora l'insieme delle radici dei polinomi in Ω_n è finito e quindi l'applicazione $k \mapsto z_i^k$ non può essere iniettiva. $\square$

Consideriamo le varietà affini $\mathscr{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$, $GL(n, \mathbb{C})$ ed $SL(n, \mathbb{C})$; occupiamoci di $\mathscr{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ (gli altri casi sono analoghi). $GL(n, \mathbb{C})$ agisce per coniugio su $\mathscr{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$.

Esercizio 18. Quali sono le funzioni regolari $f : \mathscr{M}_{n\times n}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ invarianti per coniugio?

Dimostrazione. Sia f una tale funzione ($f(A)$ è polinomiale nei coefficienti della matrice A) e $D \subseteq \mathscr{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ l'insieme delle matrici diagonali.

$$f_{|D} = f(d_1, 0, \ldots, 0, d_2, 0, \ldots, d_n) = f_{|D}(d_1, \ldots, d_n).$$

Ora $S_n \hookrightarrow GL(n, \mathbb{C})$ agisce su D ed f invariante per coniugio $\Rightarrow$ $f_{|D}$ è un polinomio simmetrico in $d_1, \ldots, d_n$. Per il teorema 24 esiste $g \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$ tale che $f_{|D}(d_1, \ldots, d_n) = g(e_1(\boldsymbol{d}), \ldots, e_n(\boldsymbol{d}))$. Il polinomio g si può estendere ad una funzione polinomiale $\mathscr{M}_{n\times n}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ ponendo $g(A) = g(e_1(A), \ldots, e_n(A))$ dove $e_j(A) = e_j(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ e $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ sono gli autovalori di A; gli $e_j(A)$ (e quindi anche g) sono funzioni polinomiali perché sono i coefficienti del polinomio caratteristico. Quindi g è polinomiale, invariante per coniugio (il polinomio caratteristico lo è) e $g_{|D} = f_{|D}$. Ma le matrici diagonali sono dense con la topologia di Zariski in $\mathscr{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$; anzi, sono dense le matrici con autovalori distinti. Sia $A \in \mathscr{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ e p_A il suo polinomio caratteristico, p_A ha radici distinte se e solo se $\mathrm{ris}(p_A, p'_A) \neq 0$, ris è il risultante ed in particolare è una funzione polinomiale. Dunque le matrici con autovalori distinti sono un'aperto di Zariski in $\mathscr{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ che è irriducibile e quindi sono un aperto denso. Dunque f è invariante per coniugio se e solo se $f = g(e_1(A), \ldots, e_n(A))$. $\square$

5.3 Funzioni simmetriche complete

Definizione 15. Per ogni $n \geq 0$ la funzione simmetrica completa h_r è la somma di tutti i monomi di grado totale r nelle variabili $x_1, \dots, x_n$. In particolare

$$h_r = \sum_{\lambda : |\lambda| = r} m_\lambda.$$

Esempio 16. $h_0 = 1$, $h_1 = (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)_n$, $h_2 = (\sum_{i<j} x_i x_j)$.

La funzione generatrice corrispondente agli h_r è $H(t) = \sum_{r \geq 0} h_r t^r = \prod_{i \geq 1} (1 - x_i t)^{-1}$. Infatti

$$\frac{1}{1 - x_i t} = \sum_{k \geq 0} x_i^k t^k$$

e si verifica l'uguaglianza grado per grado.

Teorema 27. In $\Lambda[[t]]$ vale $H(t)E(-t) = 1$.

Dimostrazione. $E(t) = \prod_{i \geq 1}(1 + x_i t) \Rightarrow E(-t) = \prod_{i \geq 1}(1 - x_i t)$. Se ci concentriamo su di un grado finito k e sulle prime n variabili, $E(t)$ è dato dai primi m prodotti sommato a fattori che contengono variabili superiori. La stessa cosa succede in H e moltiplicando i due si ottiene 1+ qualcosa che contiene variabili superiori. □

Corollario 28. $\sum_{r=0}^n (-1)^r e_r h_{n-r} = 0$

Sappiamo che gli e_r sono algebricamente indipendenti, quindi possiamo definire il morfismo di anelli

$$\begin{aligned} \omega : \Lambda &\to \Lambda \\ e_r &\mapsto h_r \end{aligned}$$

Proposizione 29. $\omega^2 = id$ ed in particolare ω è un isomorfismo.

Dimostrazione. Per il corollario precedente abbiamo

$$\begin{aligned} e_0 h_1 - e_1 h_0 &= 0 \\ e_0 h_2 - e_1 h_1 + e_2 h_0 &= 0 \\ &\dots \end{aligned}$$

Ora $e_0 = h_0 = 1$, da cui otteniamo

$$h_2 - e_1 h_1 + e_2 = 0$$

Applicando ω abbiamo $\omega(e_1) = \omega(h_1) = h_1 = e_1$ ed

$$\omega^2(e_2) = \omega(h_2) = \omega(e_1)\omega(h_1) - \omega(e_2) = e_1 h_1 - h_2 = e_2$$

e si procede analogamente. □

Teorema 30. Vale $\Lambda = \mathbb{Z}[h_1, h_2, \dots]$ e gli h_i sono algebricamente indipendenti.

Dimostrazione. Segue dal fatto che ω è un isomorfismo e dal teorema 24. $\square$

Osservazione 15. Se consideriamo un numero finito di variabili $x_1, \dots, x_n$ (o equivalentemente mandiamo le altre a 0) abbiamo che $\omega : \Lambda_n \to \Lambda_n$ è un isomorfismo e $\Lambda_n = \mathbb{Z}[h_1, \dots, h_n]$. Ora $h_{n+1} \in \Lambda_n \Rightarrow h_{n+1}$ si può scrivere come polinomio in $h_!, \dots, h_n$. Ad esempio per $n = 2$ $h_3 = x_1^3 + x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 + x_2^3$ ed $h_1 = (x_1 + x_2)$, $h_2 = x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2$; abbiamo $h_3 = -h_1^3 + 2h_1 h_2$.

5.4 Somme di potenze

24/04/09

Definizione 16. $\forall r > 1$ la *somma di potenze* r-esima è

$$p_r = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^r \right)_n = m_{(r)}$$

Consideriamo una funzione generatrice per i p_r “traslata” (cioè poniamo il grado di p_r ad $r-1$):

$$P(t) = \sum_{r \geq 1} p_r t^{r-1} \in \Lambda[[t]]$$

Osserviamo che

$$P(t) = \sum_{r \geq 1} \sum_{i \geq 1} x_i^r t^{r-1} = \sum_{i \geq 1} x_i \sum_{r \geq 1} (x_i t)^{r-1} = \sum_{i \geq 1} \frac{x_i}{1 - x_i t}.$$

Dove, come al solito, $\frac{x_i}{1-x_i t}$ indica la serie formale $\sum_{r \geq 1} x_i^r t^{r-1}$. I passaggi che faremo ora sono abbreviazioni per operazioni sulle serie formali in $\Lambda[[t]]$ (per esercizio si possono verificare le uguaglianze esplicitamente).

$$P(t) = \sum_{i \geq 1} \frac{d}{dt} \log \frac{1}{1 - x_i t} = \frac{d}{dt} \log \left(\prod_{i \geq 1} (1 - x_i t)^{-1} \right) = \frac{d}{dt} \log H(t).$$

Da qui otteniamo la importante uguaglianza

$$P(t) = \frac{H'(t)}{H(t)}.$$

Per il teorema 27 abbiamo che

$$P(-t) = \frac{E'(t)}{E(t)}$$

Teorema 31 (Formule di Newton)**.** Per ogni $n \geq 1$ vale

(1) $nh_n = \sum_{r=1}^{n} p_r h_{n-r}$

(2) $ne_n = \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r-1} p_r e_{n-r}$

Dimostrazione. (1) $H'(t) = P(t)H(t)$; il coefficiente di grado $n-1$ in $H'(t)$ è nh_n mentre quello in $P(t)H(t)$ è $\sum_{r=1}^{n} p_r h_{n-r}$.

(2) è uguale.

□

Dal primo punto possiamo concludere che $\mathbb{Q}[p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots] = \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. Inoltre i p_j sono algebricamente indipendenti; infatti per ogni n $\mathbb{Q}[p_1, \ldots, p_n] = \mathbb{Q}[h_1, \ldots, h_n]$, se $p_1, \ldots, p_n$ fossero algebricamente dipendenti avremmo $\dim_{\text{Krull}} \mathbb{Q}[p_1, \ldots, p_n] < n = \dim_{\text{Krull}} \mathbb{Q}[h_1, \ldots, h_n]$ che è assurdo. Abbiamo quindi dimostrato il seguente

Teorema 32. $\Lambda_{\mathbb{Q}} = \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = \mathbb{Q}[p_1, \ldots, p_n, \ldots]$ e i p_j sono algebricamente indipendenti (in particolare i $p_\lambda = p_{\lambda_1} p_{\lambda_2} \cdots p_{\lambda_k}$ sono una $\mathbb{Q}$-base di $\Lambda_{\mathbb{Q}}$).

Osservazione 16. Questo teorema *non* vale con i coefficienti in $\mathbb{Z}$! infatti

$$h_2 = \sum x_i^2 + \sum_{i<j} x_i x_j = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2)$$

e la scrittura è unica in $\mathbb{Q}[p_1, p_2, \ldots]$. Dunque $h_2 \notin \mathbb{Z}[p_1, p_2, \ldots]$.

Applicando l'automorfismo $\omega : \Lambda \to \Lambda$ della proposizione 29 otteniamo

$$P(t) = \frac{H'(t)}{H(t)} \overset{\omega}{\mapsto} \frac{E'(t)}{E(t)} = P(-t)$$

da cui possiamo concludere che $\omega(p_n) = (-1)^{n-1} p_n$.

Esercizio 19. $\omega(p_\lambda) = \varepsilon_\lambda p_\lambda$, dove $\varepsilon_\lambda = (-1)^{|\lambda| - l(\lambda)}$.

Teorema 33.

$$H(t) = \sum_\lambda z_\lambda^{-1} p_\lambda t^{|\lambda|}, \qquad E(t) = \sum_\lambda \varepsilon_\lambda z_\lambda^{-1} p_\lambda t^{|\lambda|}$$

dove, detto $|\lambda| = d$, il numero di elementi $w \in S_d$ con struttura ciclica λ è $\frac{d!}{z_\lambda}$; in particolare $z_\lambda = \prod_{i \in \lambda} i^{m_i} m_i!$ dove m_i è il numero di occorrenze di i in λ.

Dimostrazione. $P(t) = \frac{d}{dt}\log H(t) \Rightarrow \int P(t) = \log H(t) \Rightarrow H(t) = e^{\int P(t)} = e^{\sum_{r\geq 1}\frac{p_r}{r}t^r}$ e svolgendo i conti viene proprio quello che serve. □

Osservazione 17. Dal teorema segue la formula

$$h_n = \sum_{|\lambda|=n} z_\lambda^{-1} p_\lambda.$$

Per esempio $h_2 = z_{(1,1)}^{-1}p_1^2 + z_{(2,0)}^{-1}p_2$ e $z_{(1,1)} = z_{(2,0)} = 2$.

5.5 Funzioni di Schur

Sia R_n lo $\mathbb{Z}$-modulo generato dai caratteri delle rappresentazioni irriducibili di S_n; consideriamo lo $\mathbb{Z}$-modulo $R = \oplus_{n\geq 0} R_n$. Se $f \in R_n$ e $g \in R_m$ vogliamo definire $f \cdot g \in R_{n+m}$; basta definirlo per $f = V$, $g = W$ rappresentazioni irriducibili; $f \times g = V \times W$ è una rappresentazione di $S_n \times S_m$ (dove gli elementi di S_n agiscono su V e quelli di S_m su W) e definiamo

$$f \cdot g = \mathrm{Ind}_{S_n \times S_m}^{S_{n+m}} f \times g$$

In questo modo (lo dimostreremo) R è un anello e contiene le rappresentazioni irriducibili di tutti gli S_n. Dimostreremo che la mappa

$$\begin{aligned} R &\to \Lambda \\ \chi_\lambda &\mapsto s_\lambda \end{aligned}$$

dove s_λ è la funzione di Schur associata a λ, è un isomorfismo. In questo modo, calcolando il prodotto delle funzioni di Schur, sappiamo calcolare alcune rappresentazioni indotte. Ad esempio se χ_λ è il carattere di una rappresentazione di S_n e χ_1 è il carattere della rappresentazione (banale) di S_1, allora $\mathrm{Ind}_{S_n}^{S_{n+1}} \chi_\lambda = \chi_\lambda \cdot \chi_1$.

Mettiamoci nel caso ad $n < \infty$ variabili e consideriamo $\alpha \in \mathbb{N}^n$; definiamo

$$a_\alpha = a_\alpha(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{w \in S_n} (-1)^w w(x^\alpha)$$

a_α è un polinomio *antisimmetrico*, cioè per ogni $\gamma \in S_n$ $\gamma a_\alpha = (-1)^\gamma a_\alpha$. Osserviamo che se gli α_i non sono tutti distinti si ha $a_\alpha = 0$, perciò gli a_α interessanti sono della forma $a_{\lambda+\delta}$, dove λ è una partizione e $\delta = (n-1, n-2, n-3, \ldots, 2, 1, 0)$. Abbiamo che

$$a_{\lambda+\delta} = \sum_{w \in S_n} (-1)^w w(x^{\lambda+\delta}) = \det(x_i^{\lambda_j+n-j})_{1\leq i,j\leq n}.$$

In particolare $a_\delta = \det(x_i^{n-j})_{1\leq i,j\leq n} = \prod_{i<j}(x_i - x_j)$ è il determinante di Vandermonde.

Osservazione 18. Per ogni i, j $(x_i - x_j) \mid a_{\lambda+\delta}$ e dal fatto che $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$ è UFD abbiamo $a_\delta \mid a_{\lambda+\delta}$ per ogni λ.

Definizione 17. La *funzione di Schur* associata alla partizione λ è

$$s_\lambda = \frac{a_{\lambda+\delta}}{a_\delta}.$$

$s_\lambda \in \Lambda$ perché per ogni $w \in S_n$ $ws_\lambda = \frac{wa_{\lambda+\delta}}{wa_\delta} = \frac{a_{\lambda+\delta}}{a_\delta} = s_\lambda$. Inoltre s_λ è omogeneo di grado $|\lambda|$, quindi $s_\lambda \in \Lambda^{|\lambda|}$.

Teorema 34. $\{s_\lambda : l(\lambda) \leq n\}$ è una base di Λ_n.

Dimostrazione. Sia A_n lo $\mathbb{Z}$-modulo generato dai polinomi antisimmetrici in n variabili e consideriamo la mappa di $\mathbb{Z}$-moduli

$$\cdot a_\delta : \Lambda_n \to A_n$$

Gli $a_{\lambda+\delta}$, al variare di λ tra le partizioni con $l(\lambda) \leq n$ sono una base di A_n (per lo stesso motivo per cui gli m_λ lo sono di Λ_n). Ora $\cdot a_\delta$ è restrizione di $\cdot a_\delta : \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n] \to \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$ e, siccome $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$ è un dominio, è iniettiva. Inoltre $s_\lambda \mapsto s_\lambda a_\delta = a_{\lambda+\delta}$ e quindi $\cdot a_\delta$ è anche surgettiva. Perciò $\cdot a_\delta$ è un isomorfismo di $\mathbb{Z}$-moduli e dal fatto che gli $a_{\lambda+\delta}$ sono base concludiamo che anche gli s_λ lo sono. □

Osserviamo che se $l(\alpha) \leq n$ allora $a_\alpha(x_1, \dots, x_n, 0) = a_\alpha(x_1, \dots, x_n)$ e quindi $\rho_{n+1,m}(s_\lambda(x_1, \dots, x_{n+1})) = s_\lambda(x_1, \dots, x_n)$. Da questo abbiamo che la successione $s_\lambda = (s_\lambda(x_1, \dots, x_n))_n$ è coerente ed appartiene a $\Lambda^{|\lambda|}$ e gli s_λ formano una base di Λ.

Consideriamo la matrice (dove $e_r^{(k)}$ indica l'r-esima funzione simmetrica elementare nelle variabili $x_1, \dots, \widehat{x_k}, \dots, x_n$).

$$M = \left((-1)^{n-i} e_{n-i}^{(k)}\right)_{i,k} = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_2^{(1)} & e_2^{(2)} & \cdots & e_2^{(n)} \\ -e_1^{(1)} & -e_1^{(2)} & \cdots & -e_1^{(n)} \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Lemma 35. Per ogni $\alpha \in \mathbb{N}^n$, dette $A_\alpha = (x_j^{\alpha_i})_{i,j}$ e $H_\alpha = (h_{\alpha_i - n + j})$ (dove $h_t = 0$ se $t < 0$), vale $A_\alpha = H_\alpha M$.

Dimostrazione. Lavoriamo con le "versioni in n variabili" delle funzioni generatrici. $E^{(k)}(t) = \sum_{r=0}^{n-1} e_r^{(k)} t^r = \prod_{i \neq k}(1 + x_i t)$, ora

$$H(t)E^{(k)}(-t) = \left(\prod_{i=1}^{n} (1 - x_i t)^{-1}\right) \left(\prod_{i \neq k} (1 - x_i t)\right) = (1 - x_k t)^{-1}$$

Ora il coefficiente di t^{α_i} in $H(t)E^{(k)}(-t)$ è $\sum_{j=1}^n h_{\alpha_i-n+j}(-1)^{n+j}e^{(k)}_{n-j}$ mentre quello di $(1-x_kt)$ è $x_k^{\alpha_i}$. □

Teorema 36 (Formule di Jacobi-Trudi)**.** Sia λ partizione con $l(\lambda) \leq n$; valgono

(1) $s_\lambda = \det(h_{\lambda_i-i+j})_{1\leq i,j\leq n}$,

(2) $s_\lambda = \det(e_{\lambda'_i-i+j})_{1\leq i,j\leq n}$.

Dimostrazione. Facciamo solo la prima; mettiamoci nel caso ad n variabili. Ora $a_\alpha = \det A_\alpha = (\det H_\alpha)(\det M)$ e per $\alpha = \delta$ abbiamo $a_\delta = (\det H_\delta)(\det M)$, ma $H_\delta = (h_{n-i-n+j})_{i,j} = (h_{j-i})$ è triangolare con 1 sulla diagonale $\Rightarrow a_\delta = \det M$. Dunque

$$a_\alpha = \det H_\alpha a_\delta = a_\delta \left(\sum_{w\in S_n} (-1)^w h_{\alpha-w(\delta)} \right)$$

Prendiamo $\alpha = \lambda+\delta$ ed otteniamo

$$s_\lambda = \sum_{w\in S_n} (-1)^w h_{\lambda+\delta-w(\delta)} = \det(h_{\lambda_i+(n-i)-(n-j)})_{i,j} = \det(h_{\lambda_i-i+j})_{i,j}.$$

□

Osservazione 19. Dalle due formule di Jacobi-Trudi segue che $\omega(s_\lambda) = s_{\lambda'}$. *30/04/09*

Osservazione 20. Dal teorema 36 segue che

$$s_{(n)} = \det \begin{pmatrix} h_n & * & \cdots & * \\ 0 & h_0 & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & h_0 \end{pmatrix}$$

e, ricordando che $h_0 = 1$, si ha $s_{(n)} = h_n$; allo stesso modo si ha $s_{(1,1,\ldots,1)} = s_{(n)'} = e_n$.

5.5.1 Ortogonalità

Consideriamo, due famiglie di variabili $x_1, x_2, \ldots$ e $y_1, y_2, \ldots$. Indichiamo con $p_\lambda(x)$ la funzione simmetrica p_λ relativa alle variabili x_i e facciamo lo stesso con le altre funzioni simmetriche.

Teorema 37. (a) $\prod_{i,j}(1-x_iy_j)^{-1} = \sum_\lambda z_\lambda^{-1} p_\lambda(x)p_\lambda(y)$;

(b) $\prod_{i,j}(1-x_iy_j)^{-1} = \sum_\lambda h_\lambda(x)m_\lambda(y) = \sum_\lambda m_\lambda(x)h_\lambda(y)$;

(c) $\prod_{i,j}(1-x_iy_j)^{-1} = \sum_\lambda s_\lambda(x)s_\lambda(y)$.

Dimostrazione. (a) Consideriamo le variabili $(x_iy_j)_{i,j}$ (a due indici) e consideriamo la serie formale

$$H(t) = \prod_{i,j}(1-(x_iy_j)t)^{-1}$$

Per il teorema 33 $H(t) = \sum_\lambda z_\lambda^{-1}p_\lambda(xy)t^{|\lambda|}$. Ora è facile vedere che $p_\lambda(xy) = p_\lambda(x)p_\lambda(y)$; ad esempio $p_{(3,3,2)} = p_3p_3p_2$ e $p_3(xy)$ è la somma dei monomi di grado 3 nelle variabili x_iy_j e coincide con (somma di cubi nelle variabili x)(somma di cubi nelle variabili y). Dunque

$$H(t) = \sum_\lambda z_\lambda^{-1}p_\lambda(x)p_\lambda(y)t^{|\lambda|}$$

(b)

$$\prod_{i,j}(1-x_iy_j)^{-1} = \prod_j H(y_j) = \prod_j\left(\sum_r h_r(x)y_j^r\right) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}:\sum\alpha_i<\infty} h_\alpha(x)y^\alpha.$$

dove $h_\alpha = h_{\alpha_1}\cdots h_{\alpha_k}$; possiamo riordinare α in maniera non crescente ed ottenere una partizione λ, in tal caso $h_\alpha = h_\lambda$.

$$\prod_{i,j}(1-x_iy_j)^{-1} = \sum_\lambda h_\lambda(x)(\underbrace{\sum_{\alpha\mapsto\lambda} y^\alpha}_{=m_\lambda(y)}) = \sum_\lambda h_\lambda(x)m_\lambda(y).$$

L'altra uguaglianza segue dalla simmetria del primo punto.

(c) Facciamo il caso a finite variabili $x_1, \dots, x_n$, $y_1, \dots, y_n$.

$$\sum_\lambda s_\lambda(x)s_\lambda(y) = \sum_\lambda \frac{a_{\lambda+\delta}(x)}{a_\delta(x)}\frac{a_{\lambda+\delta}(y)}{a_\delta(y)}.$$

$$a_\delta(x)a_\delta(y)\prod_{i,j}(1-x_iy_j)^{-1} = \text{pt. prec.}$$

$$a_\delta(x)a_\delta(y)\left(\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} h_\alpha(x)y^\alpha\right)$$

$$a_\delta(x)\left(\sum_{w\in S_n}(-1)^w y^{w\delta}\right)\left(\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} h_\alpha(x)y^\alpha\right) =$$

$$a_\delta(x)\sum_{w\in S_n,\,\alpha\in\mathbb{N}^n}(-1)^w h_\alpha(x)y^{\alpha+w\delta} =$$

$$a_\delta(x)\sum_{w\in S_n,\,\beta\in\mathbb{N}^n}(-1)^w h_{\beta-w\delta}(x)y^\beta =$$

$$\sum_{\beta\in\mathbb{N}^n}\left(a_\delta(x)\sum_{w\in S_n}(-1)^w h_{\beta-w\delta}(x)\right)y^\beta =$$

$$\sum_{\beta\in\mathbb{N}^n} a_\beta(x)y^\beta.$$

Ora in questa scrittura compaiono soltano in β tali che $a_\beta \neq 0$, in particolare

- β deve avere componenti distinte,
- Sia $\gamma = (\gamma_1 > \gamma_2 > \cdots > \gamma_k > 0)$ il riordinamento di β che è una partizione, allora $a_\beta(x)0(-1)^w a_\gamma(x)$.

Si ha quindi (dove γ è una partizione come sopra e λ è una partizione qualunque)

$$a_\delta(x)a_\delta(y)\prod_{i,j}(1-x_iy_j)^{-1} = \sum_\gamma a_\gamma(x)a_\gamma(y) = \sum_\lambda a_{\lambda+\delta}(x)a_{\lambda+\delta}(y);$$

e poi si conclude per passaggio al limite.

□

Definizione 18. Definiamo la forma bilineare $\langle\cdot,\cdot\rangle : \Lambda\times\Lambda \to \mathbb{Z}$ data da $\langle h_\lambda, m_\mu\rangle = \delta_{\lambda,\mu}$.

Osserviamo che $\langle\cdot,\cdot\rangle$ è ben definita perché sia gli h_λ che gli m_μ formano una base.

Proposizione 38. Date due $\mathbb{Q}$-basi di $\Lambda_{\mathbb{Q}}$ $\{u_\lambda\}$ e $\{v_\lambda\}$, sono equivalenti

(1) $\langle u_\lambda, v_\mu\rangle = \delta_{\lambda,\mu}$;

(2) $\sum_\lambda u_\lambda(x)v_\lambda(y) = \prod_{i,j}(1 - x_i y_j)$.

Dimostrazione. Scriviamo $u_\lambda = \sum_\rho a_{\lambda,\rho}h_\rho$ e $v_\lambda = \sum_\xi b_{\lambda,\xi}m_\xi$; allora

$$\langle u_\lambda, v_\mu\rangle = \sum_{\rho,\xi} a_{\lambda,\rho}b_{\mu,\xi}\langle h_\rho, m_\xi\rangle = \sum_\rho a_{\lambda,\rho}b_{\mu,\rho}.$$

Mentre

$$\sum_\lambda u_\lambda(x)v_\lambda(y) = \sum_\lambda \left(\sum_{\rho,\xi} a_{\lambda,\rho}b_{\lambda,\xi}h_\rho(x)m_\xi(y)\right) = \sum_{\rho,\xi}\left(\sum_\lambda a_{\lambda,\rho}b_{\lambda,\xi}\right) h_\rho(x)m_\xi(y)$$

Mettiamoci nel caso a finite variabili e consideriamo le matrici $A = (a_{\lambda,\rho})$ e $B = (b_{\mu,\xi})$, abbiamo quindi che[2]

$$\sum_\rho a_{\lambda,\rho}b_{\mu,\rho} = \delta_{\lambda,\mu} \Leftrightarrow AB = Id \Leftrightarrow BA = Id \Leftrightarrow \sum_\lambda a_{\lambda,\rho}b_{\lambda,\xi} = \delta_{\rho,\xi}$$

e dunque (1) è equivalente a

$$\sum_\lambda u_\lambda(x)v_\lambda(y) = \sum_\lambda h_\lambda(x)m_\lambda(y) = \prod_{i,j}(1 - x_i y_j).$$

Dove nell'ultima uguaglianza abbiamo usato il teorema 37. □

Corollario 39. (1) $\langle \frac{p_\lambda}{z_\lambda}, p_\mu\rangle = \delta_{\lambda,\mu}$ ($\Rightarrow \langle p_\lambda, p_\mu\rangle = z_\lambda\delta_{\lambda,\mu}$),

(2) $\langle s_\lambda, s_\mu\rangle = \delta_{\lambda,\mu}$ e in particolare gli s_λ sono "ortonormali".

Corollario 40. $\langle\cdot,\cdot\rangle$ è una forma bilineare simmetrica definita positiva.

Osservazione 21. Il fatto di essere "base ortonormale" caratterizza gli s_λ; infatti un'altra base ortonormale deve differire da $\{s_\lambda\}$ per una matrice ortogonale a coefficienti interi, cioè una matrice di permutazione.

Corollario 41. $\omega : \Lambda_{\mathbb{Q}} \to \Lambda_{\mathbb{Q}}$ (cfr. proposizione 29) è un'isometria.

Dimostrazione. Sappiamo che (esercizio 19) $\omega(p_\lambda) = (-1)^{|\lambda|-l(\lambda)}p_\lambda$, da cui abbiamo $\langle\omega(p_\lambda), \omega(p_\mu)\rangle = (-1)^{|\lambda|+|\mu|-(l(\lambda)+l(\mu))}\langle p_\lambda, p_\mu\rangle$ e dunque $\mu \neq \lambda \Rightarrow \langle\omega(p_\lambda), \omega(p_\mu)\rangle = 0 = \langle p_\lambda, p_\mu\rangle$ mentre $\langle\omega(p_\lambda), \omega(p_\lambda)\rangle = (-1)^{2(|\lambda|-l(\lambda))}\langle p_\lambda, p_\lambda\rangle = \langle p_\lambda, p_\lambda\rangle$. □

[2]grazie Maurizio!

5.5.2 I caratteri irriducibili di S_n

Vogliamo costruire una generalizzazione del prodotto hermitiano tra caratteri della definizione 6.

Definizione 19. Sia G un gruppo, A una $\mathbb{Q}$-algebra commutativa ed $f, g : G \to A$ funzioni, definiamo

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{o(G)} \sum_{x \in G} f(x^{-1})g(x) = \frac{1}{o(G)} \sum_{x \in G} f(x)g(x^{-1}).$$

Osserviamo che questo prodotto concide davvero con quello della definizione 6. perché per ogni g e V $\chi_V(g)$ è una radice dell'unità e quindi $\chi_V(g^{-1}) = \overline{\chi_V(g)}$. Se $w \in S_n$ indichiamo con $\rho(w) = (\rho_1, \dots, \rho_k)$ la partizione che individua la struttura ciclica di w.

Definizione 20. Definiamo la mappa

$$\begin{aligned} \psi : S_n &\to \Lambda^n \\ w &\mapsto p_{\rho(w)} = p_{\rho_1} \cdots p_{\rho_k}. \end{aligned}$$

Osserviamo che ψ è costante sulle classi coniugio. Consideriamo l'immersione "standard" $S_n \times S_m \to S_{n+m}$ (cioè quella che identifica S_n con le permutazioni delle prime n variabili ed S_m con quelle delle ultime m); scriviamo $(u, v) \mapsto u \times v$. Ora $\rho(u \times v)$ è il riordinamento di $\rho(u) \cdot \rho(v)$ (concatenazione) che è una partizione. Abbiamo che

$$\begin{aligned} \psi : S_{n+m} &\to \Lambda^{n+m} \\ u \times v &\mapsto \psi(u)\psi(v). \end{aligned}$$

Definizione 21. Chiamiamo $R^{(n)}$ lo $\mathbb{Z}$-modulo generato dai caratteri delle rappresentazioni irriducibili di S_n (poniamo $R^{(0)} = \mathbb{Z}$) e definiamo

$$R = \oplus_{n \geq 0} R^{(n)},$$

se $f \in R^{(n)}$ e $g \in R^{(m)}$ sono caratteri di rappresentazioni irriducibili poniamo

$$f \cdot g = \mathrm{Ind}_{S_n \times S_m}^{S_{n+m}} f \times g.$$

Con questo prodotto R è un anello graduato commutativo con unità.

Definiamo un prodotto scalare su R come

$$f = \sum_n f_n,\ g = \sum_n g_n \Rightarrow \langle f, g\rangle = \sum_n \langle f_n, g_n\rangle_{S_n},$$

dove le somme a sinistra sono le decomposizioni in componenti omogenee e $\langle \cdot, \cdot\rangle_{S_n}$ è il prodotto della definizione 19.

Definizione 22. La *mappa caratteristica* è

$$\begin{gathered}\mathrm{ch} : R \to \Lambda_{\mathbb{C}} \\ R^{(n)} \ni f \mapsto \langle f, \psi \rangle_{S_n}\end{gathered}$$

$f : S_n \to \mathbb{C} \subseteq \Lambda_{\mathbb{C}}$, $\psi : S_n \to \Lambda^{(n)} \subseteq \Lambda_{\mathbb{C}}$ e poniamo

$$\langle f, \psi \rangle_{S_n} = \frac{1}{n!} \sum_{w \in S_n} f(w)\psi(w^{-1}) = \frac{1}{n!} \sum_{w \in S_n} f(w)\psi(w) = \sum_{|\rho|=n} z_\rho^{-1} f_\rho p_\rho.$$

Dove ρ è una partizione ed f_ρ è il valore di f sulla classe di coniugio individuata da ρ.

Teorema 42. ch è un isomorfismo di anelli $R \to \Lambda$.

Dimostrazione. (1) Facciamo intanto vedere che ch è isometrico. Siano $f, g \in R^{(n)}$, abbiamo che

$$\langle \mathrm{ch}(f), \mathrm{ch}(g) \rangle_\Lambda = \langle \sum_{|\rho|=n} z_\rho^{-1} f_\rho p_\rho, \sum_{|\rho|=n} z_\rho^{-1} g_\rho p_\rho \rangle = \sum_{|\rho|=n} z_\rho^{-1} f_\rho g_\rho = \langle f, g \rangle_{S_n}$$

dove la seconda uguaglianza segue dall'ortogonalità dei p_ρ e la terza da un ragionamento analogo a quello precedente.

(2) Mostriamo ora che ch è un omomorfismo di anelli. Siano $f \in R^{(n)}, g \in R^{(m)}$:

$$\mathrm{ch}(f \cdot g) = \langle f \cdot g, \psi \rangle_{S_{n+m}} = \langle \mathrm{Ind}_{S_n \times S_m}^{S_{n+m}} f \times g, \psi \rangle_{S_{n+m}}$$

e, usando la reciprocità di Frobenius (corollario 16), abbiamo che

$$\mathrm{ch}(f \cdot g) = \langle f \times g, \mathrm{Res}_{S_n \times S_m}^{S_{n+m}} \psi \rangle_{S_n \times S_m} = \frac{1}{n!m!} \sum_{(w,\vartheta) \in S_n \times S_m} f(w)g(\vartheta)\psi(w^{-1}\vartheta^{-1}).$$

Ora $\psi(w^{-1}\vartheta^{-1}) = \psi(w^{-1})\psi(\vartheta^{-1}) = \psi(w)\psi(\vartheta)$ e quindi

$$\mathrm{ch}(f \cdot g) = \left(\frac{1}{n!} \sum_{w \in S_n} f(w)\psi(w) \right) \left(\frac{1}{m!} \sum_{\vartheta \in S_m} g(\vartheta)\psi(\vartheta) \right) = \\ \langle f, \psi \rangle_{S_n} \langle g, \psi \rangle_{S_m} = \mathrm{ch}(f)\mathrm{ch}(g).$$

(3) Mostriamo adesso che ch è surgettivo. Consideriamo il carattere χ_n della rappresentazione banale di S_n.

$$\mathrm{ch}(\chi) = \sum_{|\rho|=n} z_\rho^{-1} p_\rho \chi(\rho) = \sum_{|\rho|=n} z_\rho^{-1} p_\rho = h_n$$

dove nell'ultima uguaglianza si usa la formula di Newton. Se $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ è una partizione, definiamo l'elemento $\psi_\lambda \in R$ come $\psi_\lambda = \chi_{\lambda_1}\chi_{\lambda_2}\cdots\chi_{\lambda_n}$ ed abbiamo (per il punto precedente)

$$\mathrm{ch}(\psi_\lambda) = h_{\lambda_1}h_{\lambda_2}\cdots h_{\lambda_k} = h_\lambda.$$

Quindi $\mathrm{Im}\,\mathrm{ch}$ contiene una base di Λ e $\Lambda \subseteq \mathrm{Im}\,\mathrm{ch}$. Se troviamo degli elementi χ^λ tali che $\mathrm{ch} : \chi^\lambda \mapsto s_\lambda$, poi per isometria abbiamo

$$\langle \chi^\lambda, \chi^\lambda \rangle = \langle s_\lambda, s_\lambda \rangle = 1$$

e, più in generale, $\langle \chi^\lambda, \chi^\mu \rangle = \delta_{\lambda,\mu}$. Quindi $\pm\chi^\lambda$ è un carattere di una rappresentazione irriducibile ed i χ^λ sono indipendenti. Poniamo

$$\chi^\lambda = \det(\chi_{\lambda_i - i + j})$$

ed usando Jacobi-Trudi abbiamo

$$\mathrm{ch}(\chi^\lambda) = \det(\mathrm{ch}(\chi_{\lambda_i-i+j})) = \det(h_{\lambda_i-i+j}) = s_\lambda.$$

Per questioni di dimensione i χ^λ sono, a meno del segno, tutti i caratteri delle rappresentazioni irriducibili. Quindi $\mathrm{ch}^{-1}(\Lambda) = R$ e $\mathrm{Im}\,\mathrm{ch} = \Lambda$.

□

Rimangono alcune domande aperte:

(1) I χ^λ sono caratteri di rappresentazioni irriducibili? (si tratta cioè di stabilire il segno).

(2) Che relazione c'è tra i χ^λ e i caratteri χ_{V_λ}?

08/05/09

Nella dimostrazione del teorema 42 abbiamo costruito il carattere

$$\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \Rightarrow \psi_\lambda = \chi_{\lambda_1}\cdots\chi_{\lambda_k} = \mathrm{Ind}_{S_{\lambda_1}\times\cdots\times S_{\lambda_k}}^{S_{|\lambda|}}(\text{rappr. banale}).$$

Dove χ_n è il carattere della rappresentazione banale di S_n. Abbiamo anche visto che $\mathrm{ch}(\chi_n) = h_n$ e quindi $\mathrm{ch}(\psi_\lambda) = h_\lambda$.

Vogliamo arrivare a dimostrare il seguente:

Teorema 43. I caratteri irriducibili di S_n sono i χ^λ con $|\lambda| = n$; più precisamente

$$\chi^\lambda = \chi_{V_\lambda}.$$

Sappiamo che $s_\lambda = \mathrm{ch}(\chi^\lambda) = \sum_\rho z_\rho^{-1}\chi^\lambda(\rho)p_\rho$ da cui, usando il corollario 39, abbiamo

$$\langle s_\lambda, p_\rho\rangle = \chi^\lambda(\rho).$$

Osservazione 22. Questa è una relazione importante: ci permette di valutare il carattere χ^λ sulla classe di coniugio ρ conoscendo s_λ.

Analogamente $\mathrm{ch}(\psi_\lambda) = h_\lambda = \sum_\rho z_\rho^{-1}\psi_\lambda(\rho)p_\rho$ e

$$\langle h_\lambda, p_\rho\rangle = \psi_\lambda(\rho)$$

e dal fatto che gli s_λ formano una base ortonormale, abbiamo

$$p_\rho = \sum_\lambda \chi^\lambda(\rho)s_\lambda = \sum_\lambda \psi_\lambda(\rho)m_\lambda.$$

Definizione 23. Il *numero di Kostka* $k_{\mu\lambda}$ è il numero di modi di riempire il diagramma associato a μ con λ_1 1, λ_2 2, ..., λ_k k in modo che risulti un *tableaux semi-standard*. Cioè tale che ogni riga sia non decrescente e ogni colonna sia crescente.

Esempio 17. Prendiamo $\mu = (4, 3, 2)$ e $\lambda = (3, 2, 2, 1, 1)$.

$$\mu \quad \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 1 & 2 \\ \hline 2 & 3 & 3 & \\ \cline{1-3} 4 & 5 & & \\ \cline{1-2}\end{array} \qquad \lambda \quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 2 & 2 & \\ \cline{1-2} 3 & 3 & \\ \cline{1-2} 4 & & \\ \cline{1-1} 5 & & \\ \cline{1-1}\end{array}$$

Non sempre esistono tali riempimenti; chiaramente gli 1 vanno messi tutti nella prima riga (perché le colonne devono essere crescenti) quindi bisogna avere $\lambda_1 \leq \mu_1$, analogamente i k vanno messi nelle prime k righe. Quindi condizione necessaria affinché $k_{\mu,\lambda} \neq 0$ è

$$\forall k: \quad \lambda_1 + \cdots + \lambda_k \leq \mu_1 + \cdots + \mu_k,$$

cioè $\lambda \preceq \mu$ (dove $\preceq$ è l'ordine definito nel teorema 25).

Esercizio 20. $k_{\mu,\lambda} = 0 \Leftrightarrow \mu \prec \lambda$.

Supponiamo che valga la seguente relazione (poi lo dimostreremo)

$$s_\mu = \sum_\lambda k_{\mu,\lambda}m_\lambda. \tag{1}$$

Allora

$$\langle h_\lambda, s_\mu\rangle = k_{\mu,\lambda} \Rightarrow h_\lambda = \sum_\mu k_{\mu,\lambda}s_\mu.$$

Queste due relazioni sono equivalenti (basta prendere $\langle s_\mu, h_\lambda\rangle$).

Proposizione 44. Vale $\psi_\lambda(\rho) = \sum_\mu k_{\mu,\lambda}\chi^\mu(\rho)$.

Dimostrazione.

$$p_\rho = \sum_\lambda \psi_\lambda(\rho) m_\lambda = \sum_\mu \chi^\mu(\rho) s_\mu = \sum_{\mu,\lambda} \chi^\mu(\rho) k_{\mu,\lambda} m_\lambda =$$

$$\sum_\lambda \left(\sum_\mu \chi^\mu(\rho) k_{\mu,\lambda} \right) m_\lambda \Rightarrow$$

$$\psi_\lambda(\rho) = \sum_\mu \chi^\mu(\rho) k_{\mu,\lambda}.$$

□

Osservando che $k_{\lambda,\lambda} = 1$ si ha immediatamente il seguente:

Corollario 45. $\psi_\lambda = \chi^\lambda + \sum_{\lambda \prec \mu} k_{\mu,\lambda}\chi^\mu(\rho)$.

Osservazione 23. A posteriori la proposizione 44 ci dice come si decompone la rappresentazione indotta ψ_λ. Se prendiamo $\lambda = (1, 1, \ldots, 1)$ allora

$$\psi_\lambda = \mathrm{Ind}_{S_1 \times \cdots \times S_1}^{S_n}(\text{banale}) = \mathbb{C}S_n$$

è la rappresentazione regolare. Se scriviamo $\psi_\lambda = \sum_\mu (\dim V_\mu) V_\mu$ (decomposizione in irriducibili della rappresentazione regolare) otteniamo la formula

$$\dim V_\mu = k_{\mu,(1,1,\ldots,1)}.$$

$k_{\mu,(1,1,\ldots,1)}$ è il numero di modi di riempire il diagramma associato a μ con gli elementi $\{1, 2, \ldots, n\}$ in modo che sia un *tableaux standard*, cioè sia le colonne che le righe devono essere crescenti (perché deve essere un tableaux quasi standard ma gli elementi sono tutti distinti).

Esempio 18. $\yng(4,1)$ ha dimensione 4, vediamo come riempire il diagramma con $\{1, 2, 3, 4\}$.

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 5 \\ \cline{1-1}\end{array}$$

L'1 va necessariamente nella prima posizione mentre il 5 si può scambiare con uno qualunque tra 2, 3, e 4. Quindi possiamo riempire il diagramma in 4 modi, in accordo con la formula trovata.

Vediamo invece $\yng(2,2)$; sappiamo che ha dimensione 2.

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline\end{array}$$

L'1 va necessariamente nella prima posizione e il 4 va necessariamente nell'ultima. Mentre 2 e 3 si possono scambiare; quindi ci sono due possibili riempimenti.

Sappiamo che ψ_λ è il carattere di $U_\lambda = \mathrm{Ind}_{S_{\lambda_1}\times\cdots\times S_{\lambda_k}}^{S_n}(\text{banale})$. Ora V_λ deve necessariamente comparire nella decomposizione di U_λ. Infatti lo stabilizzatore dell'elemento $a_\lambda \in \mathbb{C}S_n$ (cioè $\{w \in S_n : wa_\lambda = a_\lambda\}$) è proprio $S_{\lambda_1}\times\cdots\times S_{\lambda_k}$ e quindi S_n permuta le sue classi laterali e $\mathrm{Ind}_{S_{\lambda_1}\times\cdots\times S_{\lambda_k}}^{S_n}(\text{banale}) = \mathbb{C}S_n a_\lambda$. La mappa

$$\cdot b_\lambda : \mathbb{C}S_n a_\lambda \to V_\lambda$$

è surgettiva e quindi per il lemma di Schur V_λ deve apparire nella decomposizione di U_λ. Possiamo quindi scrivere

$$\psi_\lambda(\rho) = \sum_\mu \eta_{\lambda,\mu}\chi_{V_\mu}$$

con $\eta_{\lambda,\lambda} \geq 1$. Dimostriamo ora il teorema 43 con un argomento induttivo. Se λ è massimale, allora $\lambda = \square\square\square\square\square$ (e in particolare è massimo) e si vede facilmente che $\chi^\lambda = \chi_{V_\lambda}$. Supponiamo che per ogni $\lambda \prec \mu$ $\chi^\mu = \chi_{V_\mu}$; allora $\psi_\lambda = \chi^\lambda + \sum_{\lambda\prec\mu} k_{\mu,\lambda}\chi^\mu = \chi^\lambda + \sum_{\lambda\prec\mu} k_{\mu,\lambda}\chi_{V_\mu}$ e quindi

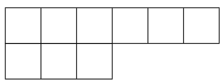
$$\chi^\lambda = \sum_{\mu\preceq\lambda} \eta_{\lambda,\mu}\chi_{V_\mu}.$$

Ma $\pm\chi^\lambda$ è irriducibile e χ_{V_λ} compare nella decomposizione di ψ_λ; segue che $\chi^\lambda = \chi_{V_\lambda}$.

Corollario 46. Per ogni partizione μ di n abbiamo

$$\dim V_\mu = k_{\mu,(1,1,\cdots,1)} = \text{numero di tableaux standard.}$$

Esercizio 21. Decomponiamo $U_{(6,3)} = \mathrm{Ind}_{S_6\times S_3}^{S_9}(\text{banale})$.



le partizioni μ con $(6,3) \leq \mu$ sono $(6,3)$ (che compare con coefficiente 1), $(7,2)$, $(8,1)$, $(9,0)$. Queste compaiono tutte con coefficiente 1 (c'è un solo riempiemento possibile), perciò

$$U_{(6,3)} = V_{(6,3)} \oplus V_{(7,2)} \oplus V_{(8,1)} \oplus V_{(9,0)}.$$

Esercizio 22. Generalizzare la formula dell'esercizio precedente a $\mathrm{Ind}_{S_n\times S_m}^{S_{n+m}}(\text{banale})$.

Dimostriamo ora la formula (1)

Teorema 47. $s_\mu = \sum_\lambda k_{\mu,\lambda} h_\lambda$ o equivalentemente $h_\lambda = \sum_\mu k_{\mu,\lambda} s_\mu$.

Lemma 48 (Regola di Pieri)**.**

$$s_\mu h_r = \sum_\lambda s_\lambda$$

dove la somma è sulle partizioni λ ottenute da μ aggiungendo r caselle ma non due sulla stessa colonna.

Dimostrazione. Applicando l'involuzione $\omega : \Lambda \to \Lambda$ (che manda $e_r \to h_r$ e $s_\lambda \to s_{\lambda'}$) otteniamo la formula equivalente

$$s_\mu e_r = \sum_\lambda s_{\lambda'} = \sum_\lambda s_\lambda$$

dove l'ultima somma è sui λ ottenuti aggiungendo a μ r caselle ma non due sulla stessa riga.

Consideriamo finite variabili $x_1, \dots, x_n$; $s_\mu = \frac{a_{\mu+\delta}}{a_\delta}$ e, cancellando gli a_δ, ci basta dimostrare che $a_{\mu+\delta} e_r = \sum_\lambda a_{\lambda+\delta}$.

$$\begin{aligned} a_{\mu+\delta} e_r = \left(\sum_{w \in S_n} (-1)^w x^{w(\mu+\delta)}\right) \left(\sum_{\alpha \in \{0,1\}^n : \sum \alpha_i = r} x^\alpha\right) = \\ \left(\sum_{w \in S_n} (-1)^w x^{w(\mu+\delta)}\right) \left(\sum_{\alpha \in \{0,1\}^n : \sum \alpha_i = r} x^{w(\alpha)}\right) = \\ \sum_{w,\alpha} (-1)^w x^{w(\mu+\delta+\alpha)} = \sum_\alpha a_{\mu+\delta+\alpha}. \end{aligned}$$

Nell'ultima formula compaiono solo gli α tali che $a_{\mu+\delta+\alpha} \neq 0$, in particolare gli elementi $\mu_i + \alpha_i + \delta_i = \mu_i + \alpha_i + (n-i)$ devono essere distinti. Dal fatto che μ è una partizione e che $\alpha \in \{0,1\}^n$ abbiamo

$$\mu_1 + \alpha_1 + (n-1) \geq \mu_2 + \alpha_2 + (n-2) \geq \dots \geq \mu_n + \alpha_n$$

e quindi $\mu + \alpha + \delta$ è una partizione. Ora questi elementi sono tutti distinti se e solo se per ogni j $\mu_j + \alpha_j \geq \mu_{j+1} + \alpha_{j+1}$, cioè se e solo se $\mu + \alpha$ è una partizione, cioè se e solo se $\mu + \alpha = \lambda$ è una partizione ottenuta da μ aggiungendo r caselle ma non due sulla stessa colonna. $\square$

Dimostrazione Teorema. Dimostriamo la formula per induzione su $l(\lambda)$ (il caso $\lambda = (\lambda_1)$ è facile). Sia $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ e $\mu = (\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1})$;

$$h_\lambda = h_\mu h_{\lambda_k} = \left(\sum_\rho k_{\rho,\mu} s_\rho \right) h_{\lambda_k} = \sum_{\rho,\eta_\rho} k_{\rho,\mu} s_{\eta_\rho}$$

dove η_ρ varia tra le partizioni ottenute da ρ aggiungendo λ_k casella ma non due sulla stessa colonna. Fissiamo un partizione ξ, vogliamo capire qual'è il coefficiente di s_ξ in h_λ; consideriamo ρ tale che $\xi = \eta_\rho$ (cioè ξ si ottiene da ρ aggiungendo bla bla bla) e fissiamo un riempimento di ρ con λ_1 1, … λ_{k-1} $k-1$ in modo da ottenere un tableaux semi-standard. Se riempiamo ogni casella aggiunta in ρ con k si ottiene ancora un tableaux semi-standard. Viceversa dato un riempimento semistandard di ξ le caselle riempite con $1, \dots, k-1$ formano una partizione e ξ si ottiene aggiungendo ad essa λ_k caselle, al più una per colonna. Dunque il coefficiente di s_ξ in h_λ è $k_{\xi,\lambda}$. □

La regola di Pieri può essere utile per calcolare rappresentazioni indotte. Sappiamo che $h_r = s_{(r,0,\dots,0)}$ ed $s_\mu s_{(r)}$ corrisponde al carattere $\chi_{V_\mu} \cdot \chi_r$ (χ_r come al solito è il carattere della rappresentazione banale di S_r). In particolare

$$\chi_{V_\mu} \cdot \chi_r = \mathrm{Ind}_{S_n \times S_r}^{S_{n+r}} V_\mu \otimes \text{banale}.$$

La formula di Pieri ci permette di calcolare la decomposizione in irriducibili di questa rappresentazione. Consideriamo, ad esempio, il caso $r = 1$

$$\mathrm{Ind}_{S_n \times S_1}^{S_{n+1}} V_\mu = \chi_{V_\mu} \cdot \chi_{V_{\ydiagram{1}}} = \sum_\lambda V_\lambda$$

dove la somma è sui λ ottenuti da μ aggiungendo 1 casella.

Esempio 19.

$$\mathrm{Ind}_{S_4}^{S_5} \ydiagram{2,2} = \ydiagram{2,2,1} \oplus \ydiagram{3,2}$$
$$\mathrm{Ind}_{S_5}^{S_6} \ydiagram{4,1} = \ydiagram{5,1} \oplus \ydiagram{4,2} \oplus \ydiagram{4,1,1}$$

Allo stesso modo la restrizione $\mathrm{Res}_{S_n}^{S_{n+1}} \chi_\mu$ si ottiene cancellando da μ una casella in tutti i modi possibili (si vede usando la reciprocità di Frobenius).

Esempio 20.

$$\mathrm{Res}_{S_5}^{S_6} \ydiagram{3,2,1} = \ydiagram{2,2,1} \oplus \ydiagram{3,1,1} \oplus \ydiagram{3,2}$$

Esempio 21. Supponiamo di avere una rappresentazione V di S_n di dimensione $n-1$ che non sappiamo studiare; sappiamo però che $\mathrm{Res}_{S_{n-1}}^{S_n} V = \yng(4,1) \oplus \yng(5)$. Allora $V = \yng(6,1)$; infatti nella decomposizione in irriducibili non possiamo avere diagrammi con più di due righe, né diagrammi con più di due caselle nella seconda riga. Dunque possono comparire solo la standard e la banale; la standard deve necessariamente comparire altrimenti non avremmo la standard nella restrizione e se comparisse anche la banale avremmo almeno due componenti della banale nella restrizione.

5.6 La dimensione con gli uncini

Trattiamo ora un'altra formula per calcolare la dimensione di una rappresentazione irriducibile di S_n. Consideriamo un diagramma di Young; l'*uncino* di una casella è il numero di caselle a destra e sotto di essa (lei compresa). Ad esempio nel diagramma

$$\yng(4,3,2)$$

gli uncini sono (per riga) 7,6,3,1,4,3,1,2,1.

La *hook formula* dice

$$\dim V_\lambda = \frac{|\lambda|!}{\prod \text{tutti gli uncini}}.$$

Esempio 22. Consideriamo la rappresentazione $\yng(2,2)$; gli uncini sono $3, 2, 2, 1$ e con la hook-formula otteniamo

$$\dim \yng(2,2) = \frac{4!}{3 \cdot 2 \cdot 2} = 2.$$

Esercizio 23. Dimostrare la hook-formula.

Esercizio 24. Dimostrare che la dimensione delle rappresentazioni irriducibili di S_n è sempre $\geq n$ fatta eccezione per

(1) standard,

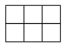
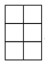
(2) standard $\otimes$ segno,

(3) banale,

(4) segno,

(5) per $n = 4$ $\yng(2,2)$,

(6) per $n = 6$

 e .

[Sugg: per induzione sul diagramma, considerando la prima colonna a parte e usando la formula di hook].

6 Il teorema di Chevalley-Shephard–Todd

14/05/09

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita su un campo K a caratteristica 0. Consideriamo $S = S(V^*)$, l'algebra simmetrica sul duale V^*; se fissiamo una base $\{v_1, \ldots, v_n\}$ di V e consideriamo la sua base duale $\{x_1, \ldots, x_n\}$ di V^*, allora $S \cong K[x_1, \ldots, x_n]$. Quindi in un certo senso possiamo dire che $S(V^*)$ è l'algebra dei polinomi su V.

Sia G un gruppo che agisce su V, definiamo l'azione su V^* come

$$\forall g \in G, f \in S \quad (gf)(v) = f(g^{-1}v)\, \forall v \in V.$$

Siamo interessati a studiare gli invarianti di questa azione, cioè $R = S^G$. Osserviamo che R è ancora una K-algebra.

Esempio 23. Sia $V = \mathbb{C}^2$ e consideriamo

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

$S = \mathbb{C}[x, y]$; certamente $\mathbb{C}[x^2, y^2] \subseteq R$ ma $R = \mathbb{C}[x^2, y^2] \oplus (xy)\mathbb{C}[x^2, y^2]$ *non* è un'algebra polinomiale.

Abbiamo un'estensione di algebre $R \subseteq S$ e possiamo pensare S come R-modulo. In generale S *non* è un R-modulo libero; ci interessa quindi dare condizioni per cui

(1) R sia un'algebra polinomiale,

(2) S sia un R-modulo libero.

Esempio 24. Sia $G = S_n$, $V = \mathbb{C}^n$ ed S_n agisce permutando le coordinate. Sappiamo già che $R = \mathbb{C}[e_1, \ldots, e_n]$ è l'algebra polinomiale generata dalle funzioni simmetriche elementari.

Esempio 25. $V = \mathbb{C}$ e $G = \langle e^{\frac{2\pi i}{d}} \rangle \cong \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$; allora $S = \mathbb{C}[x]$ ed $R = \mathbb{C}[x^d]$.

Definizione 24. Una *riflessione*[3] è un elemento $g \in GL(V)$ rappresentato in un'opportuna base da una matrice del tipo

$$\begin{pmatrix} \zeta & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

dove ζ è una radice dell'unità.

Il nostro obiettivo è dimostrare il seguente

Teorema 49 (Chevalley-Shephard–Todd)**.** Sia V spazio vettoriale, $G \subseteq GL(V)$ sottogruppo finito; sono equivalenti

(1) R è una $\mathbb{C}$-algebra polinomiale,

(2) S è un R-modulo libero,

(3) G è un gruppo finito generato da riflessioni.

Scriviamo $S = K[x_1, \dots, x_n]$ e chiamiamo $L = Q(S) = K(x_1, \dots, x_n)$ il suo campo delle frazioni. L/K è un'estensione di campi e[4] $\operatorname{trdeg} L/K = n$, mentre L/L^G è un'estensione di Galois e $[L : L^G] = o(G)$, segue che L^G/K è un'estensione trascendente e $\operatorname{trdeg} L^G/K = n$.

Lemma 50. L^G è il campo delle frazioni di R.

Dimostrazione. Siano $f_1, f_2 \in R$, allora $\frac{f_1}{f_2} \in Q(R) \subseteq L$ è ancora stabile per l'azione di G; quindi $Q(R) \subseteq L^G$. Viceversa sia $\frac{p}{q} \in L^G$, allora $\prod_{g \in G} gp \in R$ e

$$\frac{p}{q} = \frac{\prod_{g \in G} gp}{q \prod_{g \in G \setminus \{e\}} gp} \in L^G$$

ora nella scrittura a destra sia la frazione che il nominatore sono G-invarianti, quindi lo è anche il denominatore; da cui $\frac{p}{q} \in Q(R)$. $\square$

Dunque se $R = K[y_1, \dots, y_m]$ è un'algebra polinomiale, allora $m = \operatorname{trdeg} Q(R)/K = n$. Abbiamo quindi dimostrato la seguente

Proposizione 51. Se R è un'algebra polinomiale, allora è generata da $n = \dim V$ elementi algebricamente indipendenti.

[3] a volte si dice *pseudoriflessione*
[4] con trdeg indichiamo il grado di trascendenza

Proposizione 52. Sia $R_+ = \mathrm{Ker}\, f_0 \subseteq R$ dove $f_0 : R \to K$ è la valutazione in $(0, \dots, 0)$ (quindi R_+ è l'ideale di R generato dagli elementi omogenei di grado strettamente positivo) e sia $I = R_+ S \subseteq S$ il corrispondente ideale esteso.

Se $f_1, \dots, f_r \in R$ sono elementi omogenei non costanti che generano I, allora $1, f_1, \dots, f_r$ generano R come algebra.

Dimostrazione. Sia $f \in R$ omogeneo di grado d. Dimostriamo, per induzione su d, che $f \in K[f_1, \dots, f_r]$. Per $d = 0$ non ci sono problemi ($1 \in K[f_1, \dots, f_r]$); sia quindi $d > 0$, allora $f \in R_+ \subseteq I$ e possiamo scrivere $f = h_1 f_1 + \dots + h_r f_r$ con gli $h_i \in S$ omogenei.

Ma non è restrittivo supporre $h_i \in R$, infatti se $h \in S$ definiamo

$$h_\# = \frac{1}{o(G)} \sum_{g \in G} gh \in R,$$

ed abbiamo $f = f_\# = h_{1\#} f_{1\#} + \dots + h_{r\#} f_{r\#} = h_{1\#} f_1 + \dots + h_{r\#} f_r$. Ora, poiché gli f_j sono non costanti, abbiamo $\deg h_j < d$ per ogni j e possiamo applicare l'ipotesi induttiva: $h_j \in K[f_1, \dots, f_r]$ e quindi $f \in K[f_1, \dots, f_r]$. □

Lemma 53. Sia $l \in S$ omogeneo di grado 1 (quindi $l \in V^*$ è un funzionale lineare); se $f \in S$ è tale che $\ker l \subseteq \{f = 0\}$, allora esiste $g \in S$ tale che $f = lg$.

Dimostrazione. Supponiamo che x_n compaia nella scrittura di l; possiamo quindi dividere $f = lg + r$ con $\deg_{x_n} r < \deg_{x_n} l = 1 \Rightarrow \deg_{x_n} r = 0$. Se $r \neq 0$ allora esistono $\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_{n-1} \in K$ tali che $r(\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_{n-1}) \neq 0$. Ma il coefficiente di x_n in l è non nullo da cui $l(\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_{n-1}, x_n) \in K[x_n]$ è non nullo ed esiste $\overline{x}_n \in K$ tale che $l(\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_n) = 0$ e $f(\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_n) = r(\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_{n-1}) \neq 0$ che è assurdo. □

Lemma 54. Siano $f_1, \dots, f_r \in R$ elementi omogenei tali che $f_1 \notin \langle f_2, \dots, f_r \rangle$ (ideale di R) e siano $g_i \in S$ tali che

$$f_1 g_1 + \dots + f_r g_r = 0. \tag{2}$$

Se G è generato da riflessioni si ha $g_1 \in I = R_+ S \subseteq S$.

Dimostrazione. Osserviamo che $f_1 \notin \langle f_2, \dots, f_r \rangle_S$; infatti se esistessero gli $h_j \in S$ tali che $f_1 = h_2 f_2 + \cdots h_r f_r$ avremmo $f_1 = h_{2\#} f_2 + \dots + h_{r\#} f_r \in \langle f_2, \dots, f_r \rangle_R$.

Dimostriamo $g_1 \in I$ per induzione su $\deg g_1 = d$ (possiamo sempre supporre che i g_i siano omogenei). Sia $d = 0$, se fosse $g_1 \neq 0$ si avrebbe $f_1 \in I$;

perciò $g_1 = 0 \in I$. Sia ora $d > 0$, sia $s \in G$ una riflessione e sia $H = \ker l$ l'iperpiano fissato da s. L'elemento $sg_1 - g_1$ si annula su $\ker l$ e per il lemma 53 abbiamo

$$sg_1 = g_1 + lh_1, \quad h_1 \in S.$$

Allo stesso modo per ogni i abbiamo $sg_i = g_i + lh_i$ con $h_i \in S$. Considerando l'equazione $s(2)-(2)$ otteniamo

$$l(h_1 f_1 + \cdots + h_r f_r) = 0 \Rightarrow h_1 f_1 + \cdots + h_r f_r = 0$$

e per ipotesi induttiva si ha $h_1 \in I$; dunque $sg_1 \equiv g_1 \pmod I$. Ma G è *generato da riflessioni*, quindi $g_1 \equiv wg_1 \pmod I$ per ogni $w \in G$. Segue che $g_1 \equiv g_{1\#} \pmod I$; ma $g_{1\#} \in I \Rightarrow g_1 \in I$. □

Teorema 55. Sia V come prima e $G \subseteq GL(V)$ un gruppo finito; Se G è generato da riflessioni, allora $R = S^G$ è un'algebra polinomiale generata da $n = o(G)$ elementi algebricamente indipendenti $f_1, \ldots, f_n$.

Dimostrazione. Sia $f_1, \ldots, f_r$ un insieme minimale di generatori dell'ideale $I = R_+ S$; vogliamo dire che $f_1, \ldots, f_r$ sono algebricamente indipendenti (abbiamo già osservato che poi deve essere $r = n$).

Per assurdo sia $h \in K[y_1, \ldots, y_r]$ non nullo (che possiamo supporre omogeneo) tale che

$$h(f_1, \ldots, f_r) = 0$$

Allora per ogni $k \in \{1, \ldots, r\}$ abbiamo

$$0 = \frac{\partial}{\partial x_k} h(f_1, \ldots, f_r) = \sum_{i=1}^{r} h_i \frac{\partial f_i}{\partial x_k}, \quad h_i = \frac{\partial h}{\partial y_i}(f_1, \ldots, f_r).$$

A meno di riodinare possiamo supporre che $\{h_1, \ldots, h_m\}$ sia un insieme di generatori minimale per l'ideale $\langle h_1, \ldots, h_r \rangle$; possiamo quindi scrivere per ogni $j > m$ $h_j = \sum_{i=1}^{m} g_{i,j} h_i$. Abbiamo quindi

$$0 = \sum_{i=1}^{m} h_i \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_k} + \sum_{j=m+1}^{r} g_{i,j} \frac{\partial f_j}{\partial x_k} \right).$$

Ora per la minimalità di m $h_1 \notin \langle h_2, \ldots, h_r \rangle$ e per il lemma 54 abbiamo

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_k} + \sum_{j=m+1}^{r} g_{1,j} \frac{\partial f_j}{\partial x_k} \in R_+ S = \langle f_1, \ldots, f_r \rangle \Rightarrow$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_k} + \sum_{j=m+1}^{r} g_{1,j} \frac{\partial f_j}{\partial x_k} = f_1 q_1 + \cdots + f_r q_r.$$

Vogliamo usare l'identità di Eulero[5]. Sia $d_i = \deg f_i$; moltiplicando per x_k e sommando su k otteniamo

$$\sum_{k=1}^{n} x_k \frac{\partial f_1}{\partial x_k} + \sum_{j=m+1}^{r} g_{1,j} \left(\sum_{k=1}^{n} x_k \frac{\partial f_j}{\partial x_k} \right) = d_1 f_1 + \sum_{j=m+1}^{r} g_{1,j} d_j f_j = f_1 s_1 + \cdots + f_r s_r. \tag{3}$$

Ora $d_1 f_1$ è omogeneo di grado d_1, mentre $s_1 = \sum_{k=1}^{n} x_k q_1$ non ha componenti omogenei di grado 0. Quindi spezzando (3) in componenti omogenee si ha che $f_1 s_1$ non contribuisce alla componente di grado d_1 del termine a destra. Da cui $f_1 \in \langle f_2, \dots, f_r \rangle$ contro la minimalità di $\{f_1, \dots, f_r\}$. □

Proposizione 56. Sia V come prima e $G \subseteq GL(V)$ un gruppo finito; Se G è generato da riflessioni, allora S è un R-modulo libero di rango $o(G)$.

Dimostrazione. Studiamo il $K = R/R_+$-spazio vettoriale S/I (dove, come prima $I = R_+ S$). Siano $\{g_\alpha\} \subseteq S$ elementi omogenei che generano S/I come spazio vettoriale; allora i $\{g_\alpha\}$ generano S come R-modulo. Infatti sia $T = \langle g_\alpha \rangle \subseteq S$, dobbiamo dire che $S \subseteq T$; lo dimostriamo sulle componenti omogenee T_d ed S_d, per induzione su d.

Per $d = 0$ non ci sono problemi, infatti almeno uno tra i g_α deve essere costante. Sia $d > 0$ ed $f \in S_d$, possiamo scrivere

$$f = \sum_{\alpha} c_\alpha g_\alpha + \underbrace{\sum_{\beta} f_\beta h_\beta}_{\in I} \qquad c_\alpha \in K, h_\beta \in R_+, f_\beta \in S.$$

Ora $h_\beta \in R_+ \Rightarrow \deg h_\beta > 0 \Rightarrow \deg f_\beta < d \Rightarrow f_\beta \in T \Rightarrow f \in T$.

Dobbiamo adesso mostrare che se $g_1, \dots, g_m \in S$ sono indipendenti in S/I (visto come K-spazio), allora lo sono anche in S (visto come R-modulo). Per induzione su m; se $m = 1$ va bene, sia quindi $m > 1$ e supponiamo di avere una relazione

$$f_1 g_1 + \cdots + f_m g_m = 0, \qquad f_i \in R \text{ omogenei}$$

Ora $g_1 \notin I$ e per il lemma 54 $f_1 = h_2 f_2 + \cdots + h_m f_m$ con gli $h_j \in R$. Dunque possiamo riscrivere la relazione come

$$f_2(g_2 + h_2 g_1) + \cdots + f_m(g_m + h_m g_1) = 0.$$

Ora gli elementi $g_j + h_j g_1$ sono indipendenti in S/I e, per ipotesi induttiva, lo sono anche in S. Perciò $f_2 = \cdots = f_m = 0$ e $g_1 \neq 0 \Rightarrow f_1 = 0$. □

[5]Se P è omogeneo $\sum x_i \frac{\partial P}{\partial x_i} = (\deg P)P$

Proposizione 57. Sia $G \subseteq GL(V)$ generato da riflessioni, per il teorema 55 $R = S^G$ è un'algebra polinomiale; se $R = K[f_1, \dots, f_n] = K[g_1, \dots, g_n]$ allora, a meno di riordinare, si ha $d_i = \deg f_i = \deg g_i = e_i$.

Dimostrazione. Scriviamo $f_i = h_i(g_1, \dots, g_n)$ e $g_i = k_i(f_1, \dots, f_n)$. Allora abbiamo

$$\frac{\partial f_i}{\partial g_j} = \frac{\partial h_i}{\partial x_j}(g_i, \dots, g_j), \quad \frac{\partial g_i}{\partial f_j} = \frac{\partial k_i}{\partial x_j}(f_1, \dots, f_n)$$
$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial g_j}\frac{\partial f_j}{\partial g_k} = \delta_{i,k}$$

Consideriamo quindi le matrici $F = \left(\frac{\partial f_i}{\partial g_j}\right)_{i,j}$ e $G = \left(\frac{\partial g_i}{\partial f_j}\right)_{i,j}$ ed abbiamo $FG = Id$; in particolare $\det F = \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial g_{\sigma i}} \neq 0$. quindi a meno di riordinare possiamo suppore $\prod_{i=1}^{m} \frac{\partial f_i}{\partial g_i} \neq 0$. Da cui per ogni i $\frac{\partial f_i}{\partial g_i} \neq 0 \Rightarrow \deg f_i \geq \deg g_i$. Con un analogo argomento si ha $\deg g_i \geq \deg f_i$. □

15/05/09

Teorema 58. Se S è un R-modulo libero, allora R è un'algebra polinomiale.

Dimostrazione. Utilizzando la proposizione 52 ci basta dimostrare che R_+ è generato da elementi algebricamente indipendenti. Osserviamo che R è un anello noetheriano; infatti S è notheriano, sia $I \subseteq R$ un ideale allora $I^e = \langle h_1, \dots, h_s \rangle \subseteq S$ è finitamente generato ed è facile vedere che $I = \langle h_{1\#}, \dots, h_{s\#} \rangle$ è finitamente generato.

Dunque anche $R_+ \subseteq R$ è finitamente generato: $R_+ = \langle f_1, \dots, f_m \rangle$ e possiamo supporre che $\{f_1, \dots, f_m\}$ sia un insieme di generatori omogenei minimale. Mostriamo che gli f_i sono algebricamente indipendenti, supponiamo per assurdo che esista $h \in K[y_1, \dots, y_m]$ non nullo tale che $h(f_1, \dots, f_m) = 0$; possiamo supporre che h sia "omogeneo pesato", cioè omogeneo secondo il grado:

$$\deg(y_1^{k_1} \cdots y_m^{k_m}) = \sum_{i=1}^{m} k_i d_i$$

dove $d_i = \deg f_i$, supponiamo inoltre che h abbia grado (pesato) minimo. Sia $h_i = \frac{\partial h}{\partial y_i}(f_1, \dots, f_m) \in R$ e consideriamo l'ideale di R $J = \langle h_1, \dots, h_m \rangle$. Supponiamo che $\{h_1, \dots, h_s\}$ sia un insieme di generatori minimale per J, allora per ogni $j > s$ $h_j = \sum_{i=1}^{s} r_{i,j} h_i$ con $r_{i,j} \in R$. Da cui

$$0 = \frac{\partial}{\partial x_k} h(f_1, \dots, f_m) = \sum_{i=1}^{m} h_i \frac{\partial f_i}{\partial x_k} = \sum_{i=1}^{s} u_{i,k} h_i \tag{4}$$
$$u_{i,k} = \frac{\partial f_i}{\partial x_k} + \sum_{j=s+1}^{m} r_{i,j} \frac{\partial f_j}{\partial x_k} \in S.$$

Sia $\{e_\alpha\}$ una R-base di S e scriviamo $u_{i,k} = \sum_\alpha r^\alpha_{i,k} e_s$ con gli $r^\alpha_{i,k} \in R$. Dunque, spezzando (4) in componenti abbiamo

$$\sum_{i=1}^{s} h_i r^\alpha_{i,k} = 0$$

Ora $\{h_i\}_{i=1}^s$ era un insieme minimale di generatori per J, dunque gli $r^\alpha_{i,k}$ *non* possono avere componenti di grado 0 ed $r^\alpha_{i,k} \in R_+ \Rightarrow u_{i,k} \in SR_+$. Possiamo quindi scrivere

$$u_{i,k} = \sum_h u^h_{i,k} f_h$$

e, usando l'identità di Eulero, abbiamo

$$\sum_{h,k} u^h_{i,k} f_h x_k = \sum_k x_k u_{i,k} = d_i f_i + \sum_{j=s+1}^{m} r_{i,j} d_j f_j.$$

Infine, passando alla componente omogenea di grado d_i otteniamo, come nella dimostrazione del teorema 55, $f_i \in \langle f_1, \ldots, \widehat{f_i}, \ldots, f_m \rangle$ contro la minimalità degli f_j. $\square$

Ricordiamo che se $G \subseteq GL(E)$ agisce sullo spazio vettoriale E, allora

$$\dim E^G = \operatorname{tr}\left(\frac{1}{o(G)} \sum_{g \in G} g \right).$$

Osservazione 24. Se $w \in \operatorname{End}(V)$, allora

$$\det(1 - tw) = (1 - c_1 t) \cdots (1 - c_n t) \Rightarrow$$
$$\frac{1}{\det(1 - tw)} = \prod_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=0}^{\infty} (ct)^k \right) =$$
$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{\sum k_i = k} c_1^{k_1} \cdots c_n^{k_n} \right) t^k = \sum_{k=0}^{\infty} h_k(c_1, \ldots, c_n) t^k$$

Proposizione 59. Sia $G \subseteq GL(V)$ finito e supponiamo che $R = S^G = K[f_1, \ldots, f_n]$ sia un'algebra polinomiale (scriviamo $d_i = \deg f_i$). Allora

$$\frac{1}{o(G)} \sum_{g \in G} \frac{1}{\det(1 - tg)} = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{(1 - t^{d_i})}. \tag{5}$$

Dimostrazione. Conseriamo $g \in G \curvearrowright V^*$ come $g : V^* \to V^*$ e scriviamo $\mathrm{sp}\,(g) = \{c_1, \ldots, c_n\}$ (gli autovalori di g). Sia $\{z_1, \ldots, z_n\}$ una base di V^*, allora

$$\frac{1}{o(G)} \sum_{g \in G} \frac{1}{\det(1 - tg)} = \frac{1}{o(G)} \sum_{g \in G} \sum_{k=0}^{\infty} h_k(c_1, \ldots, c_n) t^k =$$

$$\frac{1}{o(G)} \sum_{g \in G} \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{tr}\,(g \curvearrowright \mathrm{Sym}^k V^*) t^k = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{tr}\left(\left(\frac{1}{o(G)} \sum_{g \in G} g\right) \curvearrowright \mathrm{Sym}^k V^*\right) t^k =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \dim(\mathrm{Sym}^k V^*)^G t^k$$

è la serie di Poincaré dell'algebra graduata $R = S^G$. Mentre

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{(1 - t^{d_i})} = \prod_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=0}^{\infty} t^{kd_i} \right)$$

è anche lei la serie di Poincaré di $K[f_1, \ldots, f_n] = R$. $\square$

Proposizione 60. Sia $G \subseteq GL(V)$ finito e supponiamo che $R = S^G$ sia un'algebra polinomiale; allora detto N il numero di riflessioni in G abbiamo

(1) $\prod_{i=1}^{n} d_i = o(G)$.

(2) $\sum_{i=1}^{n} d_i = N + n$.

Dimostrazione. Se $g = id$ allora $\det(1 - tg) = (1 - t)^n$; se $g \in G$ è una riflessione si ha $\det(1 - tg) = (1 - t)^{n-1}(1 - \zeta t)$, dove ζ è radice dell'unità. Moltiplicando (5) per $(1 - t)^n$ otteniamo:

$$\frac{1}{o(G)} \left(1 + \sum_{w \text{ riflessione}} \frac{1 - t}{1 - \zeta t} + (1 - t)^2 (\cdots) \right) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1 + t + t^2 + \cdots + t^{d_i - 1}}.$$

Dove l'$(1 - t)^2$ viene dal fatto che se $(1 - t)^{n-1} \mid \det(1 - tg)$ allora g è una riflessione (l'unico autovalore $\neq 1$ è radice dell'unità perché G è finito). Valutando quesa uguaglianza in $t = 1$ otteniamo

$$\frac{1}{o(G)} = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{d_i}$$

e quindi il primo punto.

Consideriamo la somma $\sum_g \frac{1}{1-\zeta_g t}$ al variare di g tra le riflessioni in G. Fissiamo un'iperpiano $H \subseteq V$ e occupiamoci delle riflessioni in G che lo fissano. Queste sono tutte rotazioni attorno alla retta $H^{\perp}$ e generano un sottogruppo ciclico; cioè sono tutte del tipo

$$\begin{pmatrix} \zeta_m^i & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{con } i \in \{1, \ldots, m-1\}.$$

Perciò nella somma il pezzo relativo all'iperpiano H è

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{1-\zeta_m^i t} = \sum_{i=0}^{m} \frac{1}{1-\zeta_m^i t} - \frac{1}{1-t} =$$
$$\sum_{i=0}^{m} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \zeta_m^{ik} t^k \right) - \frac{1}{1-t} = m \sum_{k=0}^{\infty} t^{km} - \frac{1}{1-t} =$$
$$\frac{m}{1-t^m} - \frac{1}{1-t} = \frac{m-1}{2} + (1-t)h(t).$$

e sommando tutti i pezzi si ha

$$\sum_{g \in G \text{ riflessione}} \frac{1}{1-\zeta_g t} = \frac{\sum_H (m_H - 1)}{2} + (1-t)H(t) = \frac{N}{2} + (1-t)H(t).$$

Quindi il termine a sinistra dell'uguaglianza è:

$$\frac{1}{o(G)} \left(1 + \frac{N}{2}(1-t) + (1-t)^2 g(t) \right)$$

derivando e valutando in $t = 1$ otteniamo $-\frac{1}{o(G)} \frac{N}{2}$. Mentre a destra otteniamo

$$\frac{d}{dt} \left(\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1+t+t^2+\cdots+t^{d_i-1}} \right)_{|t=1} = - \left(\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{d_i} \right) \sum_{i=1}^{n} \frac{d_i - 1}{2} \Rightarrow$$
$$\frac{N}{o(G)} = \frac{1}{\prod_{i=1}^{n} d_i} \sum_{i=1}^{n} (d_i - 1) \Rightarrow$$
$$N + n = \sum_{i=1}^{n} d_i$$

dove abbiamo usato il fatto che $\prod_{i=1}^{n} d_i = o(G)$. $\square$

Lemma 61. $f_1, \ldots, f_n \in K[x_1, \ldots, x_n]$ sono algebricamente indipendenti se e solo se

$$J(f_1, \ldots, f_n) = \det \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{i,j} \neq 0$$

Dimostrazione. ($\Leftarrow$) Supponiamo che $f_1, \ldots, f_n$ siano algebricamente dipendenti; allora esiste $h \in K[y_1, \ldots, y_n]$ non nullo tale che $h(f_1, \ldots, f_n) = 0$, prendiamo h di grado minimo.

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial h}{\partial y_i} \frac{\partial f_i}{\partial x_k} = 0$$

Osserviamo che i $\frac{\partial h}{\partial y_i}$ non sono tutti nulli. Chiamiando $F = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{i,j}$ ed $H = \left(\frac{\partial h}{\partial y_i} \right)_i$ abbiamo $H \in \ker F$ e quindi $\det F = 0$.

($\Rightarrow$) Siano $f_1, \ldots, f_n$ indipendenti; per questioni di dimensione abbiamo che per ogni i $\{x_i, f_1, \ldots, f_n\}$ sono dipendenti ed esiste $h_i(y_0, y_1, \ldots, y_n) \neq 0$ tale che $h_i(x_i, f_1, \ldots, f_n) = 0$ ed h_i di grado minimo. Derivando abbiamo

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial h_i}{\partial y_j} \frac{\partial f_j}{\partial x_k} \right) + \frac{\partial h_i}{\partial y_0} \delta_{i,k} = 0.$$

Per minimalità di h_i si ha $\frac{\partial h_i}{\partial y_0} \neq 0$ e quindi, in termini di matrici:

$$\left(\frac{\partial h_i}{\partial y_j} \right)_{i,j} \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_k} \right)_{j,k} = \left(\frac{\partial h_i}{\partial y_0} \delta_{i,k} \right)_{i,k}$$

Quella a destra è una matrice diagonale con elementi non nulli sulla diagonale e pertanto ha determinante non nullo; segue che anche $\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_k} \right)_{j,k}$ ha determinante non nullo. $\square$

Osservazione 25. $J(f_1, \ldots, f_n)$ è un polinomio omogeneo di grado $\sum_{i=1}^{n}(d_i - 1)$.

Teorema 62. Sia $G \subseteq GL(V)$ finito; se $R = S^G$ è un'algebra polinomiale (con generatori algebricamente indipendenti $g_1, \ldots, g_m$, di gradi $e_1, \ldots, e_m$). Allora G è generato da riflessioni.

Dimostrazione. Sia $H \subseteq G$ il sottogruppo generato dalle riflessioni di G. Sappiamo già che $S^H \supseteq S^G = R$ è un'algebra polinomiale. Scriviamo $S^H = K[f_1, \ldots, f_n]$ e $d_i = \deg f_i$. Allora $g_i = h_i(f_1, \ldots, f_n)$ e

$$\frac{\partial g_i}{\partial x_k} = \sum_j \frac{\partial g_i}{\partial f_j} \frac{\partial f_j}{\partial x_k} \Rightarrow \left(\frac{\partial g_i}{\partial x_k} \right)_{i,k} = \left(\frac{\partial g_i}{\partial f_j} \right)_{i,j} \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_k} \right)_{j,k}$$

Ora i g_i sono indipendenti; quindi $\det\left(\frac{\partial g_i}{\partial x_k}\right)_{i,k} \neq 0$ da cui $\det\left(\frac{\partial g_i}{\partial f_j}\right)_{i,j} \neq 0$, cioè

$$\sum_{\sigma\in S_n}\left(\prod_{i=1}^{n}\frac{\partial g_i}{\partial f_{\sigma(i)}}\right)\neq 0$$

e, a meno di riordinare, $\prod_{i=1}^{n}\frac{\partial g_i}{\partial f_i}\neq 0$. In particolare per ogni i $\frac{\partial g_i}{\partial f_i}\neq 0$ ed $e_i = \deg g_i \geq \deg f_i = d_i$. Ora $\sum_{i=1}^{n} e_i = N + n = \sum i = 1^n d_i \Rightarrow d_i = e_i \forall i \Rightarrow o(G) = \prod_{i=1}^{n} e_i = \prod_{i=1}^{n} d_i = o(H) \Rightarrow G = H$. □

Mettendo insieme quanto dimostrato abbiamo il teorema 49; Infatti il teorema 55 dimostra (3) ⇒ (1), la proposizione 56 dimostra (3) ⇒ (2), il teorema 58 dimostra (2) ⇒ (1) ed il teorema 62 dimostra (1) ⇒ (3).

7 Rappresentazioni di $GL(n;\mathbb{C})$ (via S_n)

22/05/09

Vogliamo utilizzare quanto sappiamo sulle rappresentazioni di S_n per classificare le rappresentazioni irriducibili di $GL(n;\mathbb{C})$. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita; ricordiamo che $V\otimes V = \mathrm{Sym}^2 V \oplus \bigwedge^2 V$ dove, se utilizziamo l'identificazione standard di $\mathrm{Sym}^2 V$ e $\bigwedge^2 V$ come sottospazi di $V\otimes V$, la decomposizione è data dalla mappa

$$v_i\otimes v_j \mapsto \frac{v_i\otimes v_j + v_j\otimes v_i}{2} + \frac{v_i\otimes v_j - v_j\otimes v_i}{2}.$$

Allo stesso modo abbiamo

$$V^{\otimes 3} = V\otimes V\otimes V = \mathrm{Sym}^3 V \oplus \bigwedge^3 V \oplus \text{quacos'altro}$$

Esempio 26. Se $k = \dim V = 3$ allora $\dim V^{\otimes 3} = 27$, $\dim \mathrm{Sym}^3 V = 10$ e $\dim \bigwedge^3 V = 1$, quindi $\dim \text{qualcos'altro} = 16$.

Cercheremo le rappresentazioni di $GL(V)$ dentro $V^{\otimes d}$ (su cui $GL(V)$ agisce a sinistra per componenti) e le troveremo (quasi) tutte.

Sullo spazio $V^{\otimes d}$ possiamo fare agisce S_d *da destra* permutando i fattori ed abbiamo che quest'azione commuta con l'azione sinistra di $GL(V)$.

7.1 Costruzione di Weyl

Sia λ una partizione di d e consideriamo il corrispondente simmetrizzatore di young c_λ. L'applicazione (moltiplicazione a destra) $\cdot c_\lambda : V^{\otimes d} \to V^{\otimes d}$ è una mappa di $GL(V)$-moduli, in particolare $V^{\otimes d} c_\lambda = \mathrm{Im}\,(\cdot c_\lambda)$ è un sotto $GL(V)$-modulo.

Definizione 25. Chiamiamo $S_\lambda V = V^{\otimes d} c_\lambda$ come $GL(V)$-modulo; $S_\lambda \cdot$ è un funtore ed è detto *funtore di Schur*.

Esempio 27. Se $\lambda = (d, 0, \dots, 0)$, allora $S_{(d)} V = V^{\otimes d} \cdot \left(\sum_{g \in S_d} g \right)$. La moltiplicazione a destra per $c_{(d)}$ agisce su di un tensore elementare nel seguente modo:

$$(v_1 \otimes \cdots \otimes v_d) c_{(d)} = \sum_{g \in S_n} v_{g(1)} \otimes \cdots v_{g(n)}.$$

Quindi $S_{(d)} V = \mathrm{Sym}^d V$. Analogamente se $\lambda = (1, \dots, 1)$ abbiamo

$$(v_1 \otimes \cdots \otimes v_d) c_\lambda = \sum_{g \in S_n} (-1)^g v_{g(1)} \otimes \cdots v_{g(n)}.$$

e quindi $S_\lambda V = \bigwedge^d V$.

Esempio 28. Sia $\lambda = (2, 1)$, scegliamo il tableaux

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array}$$

allora $a_\lambda = e + (1,2)$ e $b_\lambda = e - (1,3)$, da cui $c_{(2,1)} = e + (1,2) - (1,3) - (1,3,2)$ e

$$\begin{aligned} S_{(2,1)} V = V^{\otimes 3} c_{(2,1)} = \\ \langle v_1 \otimes v_2 \otimes v_3 + v_2 \otimes v_1 \otimes v_3 - v_3 \otimes v_2 \otimes v_1 - v_3 \otimes v_1 \otimes v_2 \rangle \subseteq \\ \langle w_1 \otimes w_2 \otimes w_3 - w_3 \otimes w_2 \otimes w_1 \rangle \cong \bigwedge^2 V \otimes V \subseteq V^{\otimes 3} \end{aligned}$$

Esercizio 25. $V^{\otimes 3} c_{(2,1)} = \ker(\bigwedge^2 V \otimes V \to \bigwedge^3 V)$.

Esempio 29. Se $\dim V = 3$ allora $\dim \bigwedge^2 V \otimes V = 9$ e $\dim \bigwedge^3 V = 1$, perciò $\dim S_{(2,1)} V = 8$ e viene fuori che

$$V^{\otimes 3} = \mathrm{Sym}^3 V \oplus \bigwedge^3 V \oplus (S_{(2,1)} V)^{\oplus 2}.$$

In generale avremo $V^{\otimes d} = \oplus_\lambda (S_\lambda V)^{\oplus \dim V_\lambda}$ dove λ varia tra le partizioni di d. Gli $S_\lambda V$ sono irriducibili e se $\lambda \neq \nu$ allora $S_\lambda V$ e $S_\nu V$ non sono isomorfe. Inoltre, a meno di tensorizzare con la rappresentazione "determinante", queste sono tutte le rappresentazioni di $GL(V)$.

Se $\dim V = k$ una partizione λ fornisce una rappresentazione irriducibile $S_\lambda V$ solo se λ ha meno di k righe, cioè se $l(\lambda) \leq k$ (altrimenti $S_\lambda V = (0)$).

Vedremo inoltre anche come calcolare i caratteri delle S_λ; avremo infatti che

$$\chi_{S_\lambda V}(g) = s_\lambda(x_1, \ldots, x_k)$$

dove s_λ è la funzione di Schur associata alla partizione λ ed $x_1, \ldots, x_k$ sono gli autovalori di g.

Esempio 30. Se $\lambda = (d)$ è la partizione banale, allora $S_\lambda V = \mathrm{Sym}^d V$; supponiamo intanto che g sia diagonale. $\mathrm{Sym}^d V$ ha come base i monomi $v_1^{s_1} \ldots v_k^{s_k}$ con $\sum_{i=1}^k s_i = d$. La traccia di $g \in GL(V)$ è

$$\operatorname{tr} g_{|\mathrm{Sym}^d V} = \sum x_1^{s_1} \cdots x_k^{s_k} = h_{(d)}(x_1, \ldots, x_k) = s_{(d)}(x_1, \ldots, x_k).$$

Per dare un senso formale alla scrittura $s_{(d)}(x_1, \ldots, x_n)$ nel caso non diagonale possiamo scrivere $h_{(d)} = \sum_\lambda c_\lambda e_\lambda$, così $h_{(d)}(x_1, \ldots, x_n) = \sum_\lambda c_\lambda e_\lambda(x_1, \ldots, x_n)$ e gli $e_\lambda(x_1, \ldots, x_n)$ sono i coefficienti del polinomio caratteristico. Ora questa formula senso per ogni $g \in GL(V)$. $\operatorname{tr} g$ ed $h_{(d)}(x_1, \ldots, x_n)$ sono due funzioni polinomiali che coincidono sulle diagonalizzabili e per densità coincidono su tutto $GL(V)$.

Esempio 31. $S_{(1,\ldots,1)}V = \bigwedge^d V$; $\bigwedge^d V$ ha una base di elementi del tipo $v_{i_1} \wedge \cdots \wedge v_{i_k}$ con $i_1 < \cdots < i_k$. Se g è diagonale abbiamo $\operatorname{tr} g = e_{(d)}(x_1, \ldots, x_n) = h_{(1,\ldots,1)}(x_1, \ldots, x_n) = s_{(1,\ldots,1)}(x_1, \ldots, x_n)$ e come prima per densità la formula vale per ogni g.

7.2 Considerazioni di semisemplicità

L'algebra $\mathbb{C}S_d$ è un'algebra di dimensione finita semisemplice. C'è un teorema (teorema di Artin-Wedderburn) che dice che le algebre semisemplici di dimensione finita sono algebre di matrici. Nel nostro caso

Proposizione 63. Se G è un gruppo finito allora $\mathbb{C}G \cong \oplus_i \mathrm{End}(W_i)$ dove i W_i sono le rappresentazioni irriducibili di G.

Dimostrazione. Consideriamo la mappa

$$\varphi : \mathbb{C}G \to \oplus_i \mathrm{End}(W_i)$$

le cui componenti coincidono con l'azione $\mathbb{C}G \curvearrowright W_i$. Ogni componente è un omomorfismo di algebre, quindi anche φ lo è.

φ è anche iniettiva; infatti se un elemento $a \in \mathbb{C}G$ agisce come la mappa nulla su ogni rappresentazione irriducibile W_i, allora ($\mathbb{C}G$ è la rappresentazione regolare) la moltiplicazione per a agisce come la mappa nulla $\mathbb{C}G \to \mathbb{C}G$ ed $a = 0$ perché $\mathbb{C}G$ è un $\mathbb{C}G$-modulo fedele.

Infine φ è surgettiva per questioni dimensionali. $\square$

Sia G un gruppo finito ed U un $\mathbb{C}G$-modulo destro, sia $B = \mathrm{Hom}_G(U, U)$ (cioè i $\varphi : U \to U$ tali che $\varphi(ug) = \varphi(u)g$). Ora $B \curvearrowright U \curvearrowleft \mathbb{C}G$ (cioè B agisce a sinistra su U e $\mathbb{C}G$ agisce a destra su U) e le due azioni commutano. Decomponiamo $U = \oplus_i U_i^{\oplus m_i}$ in $\mathbb{C}G$-moduli destri irriducibili, allora

$$\begin{aligned} B = \mathrm{Hom}_G\left(\oplus_i U_i^{\oplus m_i}, U_i^{\oplus m_i}\right) &= \text{lemma di Schur} \\ \oplus_i \mathrm{Hom}_G\left(U_i^{\oplus m_i}, U_i^{\oplus m_i}\right) &\cong \text{lemma di Schur} \\ \oplus_i \mathscr{M}_{n_i \times n_i}(\mathbb{C}) & \end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio si usa il fatto che ogni componente $U_i \to U_i^{\oplus m_i} \to U_i^{\oplus m_i} \to U_i$ è del tipo λid. Abbiamo quindi visto che B è un'algebra di matrici.

Se U è un $\mathbb{C}G$-modulo destro e W un $\mathbb{C}G$-modulo sinistro possiamo considerare

$$U \otimes_{\mathbb{C}G} W \cong U \otimes_{\mathbb{C}} W / \langle u \otimes av - ua \otimes v : \ a \in \mathbb{C}G \rangle$$

Proposizione 64. Sia U un $\mathbb{C}G$-modulo destro di dimensione finita e $B = \mathrm{Hom}_G(U, U)$, allora

(a) per ogni $c \in \mathbb{C}G$ $U \otimes_{\mathbb{C}G} (\mathbb{C}G) \cdot c \cong U \cdot c$;

(b) se $W = \mathbb{C}G \cdot c$ è un $\mathbb{C}G$-modulo irriducibile sinistro, allora $U \otimes_{\mathbb{C}G} W (\cong U \cdot c)$ è un B-modulo irriducibile oppure è nullo;

(c) se i $W_i = (\mathbb{C}G) \cdot c_i$ sono, al variare di i, tutti i $\mathbb{C}G$-moduli sinistri irriducibili, allora $U \cong \oplus_i (U \cdot c_i)^{\oplus \dim W_i}$ è la decomposizione di U in B-moduli irriducibili.

Dimostrazione. (a) Consideriamo il diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd} U \otimes_{\mathbb{C}G} \mathbb{C}G \arrow[r, two heads, "\cdot c"] \arrow[d] & U \otimes_{\mathbb{C}G} (\mathbb{C}G) \cdot c \arrow[r, "\subseteq"] \arrow[d] & U \otimes_{\mathbb{C}G} \mathbb{C}G \arrow[d] \\ U \arrow[r, two heads, "\cdot c"'] & U \cdot c \arrow[r, "\subseteq"'] & U \end{tikzcd}$$

Le mappe verticali sono $u \times a \mapsto ua$; le mappe a destra e a sinistra sono isomorfismi e dalla commutatività del diagramma segue che la mappa centrale è sia iniettiva che surgettiva.

(b) Supponiamo che U sia un $\mathbb{C}G$-modulo irriducibile; per il lemma di Schur si ha $B = \mathrm{End}_G(U) \cong \mathbb{C}$; quindi un B-modulo è irriducibile se e solo se ha dimensione 1. La tesi quindi diventa $\dim U \otimes_{\mathbb{C}G} W \leq 1$.

Identifichiamo $W \subseteq \mathbb{C}G \cong \oplus_i \mathscr{M}_{n_i \times n_i}(\mathbb{C})$. W è un G-modulo irriducibile $\Rightarrow W \subseteq \oplus_i \mathscr{M}_{n_i \times n_i}(\mathbb{C})$ è ideale minimale. Dunque W è del tipo

$$0 \times 0 \times \cdots \times I \times \cdots \times 0$$

con $I \subseteq \mathscr{M}_{n_i \times n_i}(\mathbb{C})$ ideale sinistro minimale. Questi sono composti dalle matrici con tutte le colonne nulle eccetto una (fissata). Con un discorso analogo a quello fatto per W si vede che U è del tipo

$$0 \times 0 \times \cdots \times J \times \cdots \times 0$$

con $J \subseteq \mathscr{M}_{n_j \times n_j}(\mathbb{C})$ ideal destro minimale. In particolare J è composto dalle matrici che hanno tutte le righe nulle eccetto una (fissata). Ora se $i \neq j$ allora $U \otimes_{\mathbb{C}G} W = 0$, altrimenti osservando che

$$\begin{pmatrix} & 0 & \\ * & * & * \\ & 0 & \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} & * & \\ 0 & * & 0 \\ & * & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & 0 & \\ * & * & * \\ & 0 & \end{pmatrix} g \otimes g^{-1} \begin{pmatrix} & * & \\ 0 & * & 0 \\ & * & \end{pmatrix}$$

ci si riconduce al caso un un solo elemento non nullo sulla riga non nulla ed un solo elemento non nullo sulla colonna non nulla ed in questo modo si ha che $U \otimes_{\mathbb{C}G} W \cong \mathbb{C}$.

Se U *non* è irriducibile scriviamo $U = \oplus_i U_i^{\otimes n_i}$ e

$$U \otimes_{\mathbb{C}G} W = \oplus_i (U_i \otimes_{\mathbb{C}G} W)^{n_i}$$

ora gli $U_i \otimes_{\mathbb{C}G} W$ sono tutti nulli, tranne al più uno corrispondente a W. Quindi $U \otimes_{\mathbb{C}G} W = 0$ oppure $U \otimes_{\mathbb{C}G} W = \mathbb{C}^{n_k}$ e $B = \oplus_i \mathscr{M}_{n_i \times n_i}(\mathbb{C})$ agisce in modo irriducibile su U.

(c) $U \cong U \otimes_{\mathbb{C}G} \mathbb{C}G$ come B-modulo. Ora $U \otimes_{\mathbb{C}G} \mathbb{C}G \cong U \otimes_{\mathbb{C}G} \left(\oplus_i W_i^{\oplus \dim W_i}\right) \cong \oplus \left(U \otimes_{\mathbb{C}G} W_i\right)^{\oplus \dim W_i} \cong \oplus_i \left(U \cdot c_i\right)^{\oplus \dim W_i}$.

□

Ed ora qualcosa di completamente diverso:

Esempio 32. Torniamo alle rappresentazioni di S_d; vogliamo decomporre $\ydiagram{4,1} \otimes \ydiagram{4,1}$ in irriducibili (attenzione! non è il prodotto della definizione 21).

Sappiamo che $U \otimes \mathrm{Ind}_H^G W \cong \mathrm{Ind}_H^G((\mathrm{Res}_H^G U) \otimes W)$. Prendiamo $U = \ydiagram{4,1}$ e $W = \ydiagram{4}$, abbiamo

$$\begin{aligned} \mathrm{Ind}_{S_{d-1}}^{S_d} \mathrm{Res}_{S_{d-1}}^{S_d} \ydiagram{4,1} &\cong \mathrm{Ind}_{S_{d-1}}^{S_d}((\mathrm{Res}_{S_{d-1}}^{S_d} \ydiagram{4,1}) \otimes \ydiagram{4}) \cong \\ \ydiagram{4,1} \otimes \mathrm{Ind}_{S_{d-1}}^{S_d} \ydiagram{4} &\cong (\ydiagram{4,1} \otimes \ydiagram{4,1}) \oplus \ydiagram{4,1} \end{aligned}$$

Ma sappiamo anche che

$$\begin{aligned}\operatorname{Ind}_{S_{d-1}}^{S_d}\operatorname{Res}_{S_{d-1}}^{S_d}\ydiagram{4,1} \cong \operatorname{Ind}_{S_{d-1}}^{S_d}\ydiagram{3,1} \oplus \operatorname{Ind}_{S_{d-1}}^{S_d}\ydiagram{4} \cong \\ \ydiagram{3,1,1} \oplus \ydiagram{3,2} \oplus \ydiagram{4,1} \oplus \ydiagram{4,1} \oplus \ydiagram{5}\end{aligned}$$

Da cui otteniamo

$$\ydiagram{4,1} \otimes \ydiagram{4,1} \cong \ydiagram{3,1,1} \oplus \ydiagram{3,2} \oplus \ydiagram{4,1} \oplus \ydiagram{5}$$

7.3 Rappresentazioni di $GL(V)$

29/05/09

Vogliamo applicare la proposizione 64 alle rappresentazioni di $GL(V)$; poniamo $U = V^{\otimes d}$, dal punto (c) abbiamo immediatamente che

$$V^{\otimes d} \cong \oplus_\lambda \left(\left(V^{\otimes d}\right) \cdot c_\lambda\right)^{\oplus \dim V_\lambda} = \oplus_\lambda \left(S_\lambda V\right)^{\oplus \dim V_\lambda}.$$

dove λ varia tra le partizioni di d e l'isomorfismo è di $B = \operatorname{Hom}_{S_n}(V^{\otimes d}, V^{\otimes d})$-moduli. La proposizione ci dice anche che gli $S_\lambda V$ sono B-moduli irriducibili, oppure sono 0.

Teorema 65. Sia $k = \dim V$,

(a) $\forall g \in GL(V)$ $\operatorname{tr}_{S_\lambda V} g = \chi_{S_\lambda V}(g) = s_\lambda(x_1, \ldots, x_n)$; dove $x_1, \ldots, x_n$ sono gli autovalori di g.

(b) In particolare $l(\lambda) > k \Rightarrow S_\lambda V = 0$; mentre se $l(\lambda) \leq k$ allora

$$\dim S_\lambda V = s_\lambda(1, 1, \ldots, 1) = \prod_{i<j} \frac{\lambda_i - \lambda_j + j - i}{j - i}.$$

(c) $V^{\otimes d} \cong \oplus_\lambda (S_\lambda V)^{\dim V_\lambda}$ come $GL(V)$-moduli.

(d) Ogni $S_\lambda V$ con $l(\lambda) \leq k$ è una rappresentazione irriducibile di $GL(V)$ e queste sono a due a due non isomorfe.

Consideriamo la rappresentazione $U_\lambda = \mathbb{C}S_d \cdot a_\lambda = \operatorname{Ind}_{S_{\lambda_1} \times \cdots \times S_{\lambda_r}}^{S_d}(id)$. Sappiamo che

$$\begin{aligned} U_\lambda = \oplus_{\mu \geq \lambda} k_{\mu,\lambda} V_\mu \Rightarrow \\ V^{\otimes d} \otimes_{\mathbb{C}S_d} U_\lambda \cong V^{\otimes d} \cdot a_\lambda \cong \oplus_{\mu \geq \lambda} k_{\mu,\lambda}\left(V^{\otimes d} \otimes_{\mathbb{C}S_d} V_\mu\right) \cong \\ \oplus_{\mu \geq \lambda} k_{\mu,\lambda}\left(V^{\otimes d} \otimes_{\mathbb{C}S_d} \mathbb{C}S_d \cdot c_\mu\right) \cong \oplus_{\mu \geq \lambda}(S_\mu V)^{\oplus k_{\mu,\lambda}}. \end{aligned}$$

Ora $V^{\otimes d} \cdot a_\lambda = \mathrm{Sym}^{\lambda_1} V \otimes \mathrm{Sym}^{\lambda_2} V \otimes \cdots \otimes \mathrm{Sym}^{\lambda_r} V$; quest'ultima formula ci permette di ricavare

$$\chi_{V^{\otimes d} \cdot a_\lambda}(g) = \chi_{\mathrm{Sym}^{\lambda_1} V}(g) \cdots \chi_{\mathrm{Sym}^{\lambda_r} V}(g) =$$
$$h_{\lambda_1}(x_1, \ldots, x_k) \cdots h_{\lambda_r}(x_1, \ldots, x_k) = h_\lambda(x_1, \ldots, x_k).$$

Mentre da quella precedente abbiamo $\chi_{V^{\otimes d} \cdot a_\lambda}(g) = \sum_{\mu \geq \lambda} k_{\mu,\lambda} \chi_{S_\mu V}(g)$. Da cui

$$h_\lambda(x_1, \ldots, x_k) = \sum_{\mu \geq \lambda} k_{\mu,\lambda} \chi_{S_\mu V}(g).$$

D'altra parte sappiamo anche che

$$h_\lambda(x_1, \ldots, x_k) = \sum_{\mu \geq \lambda} k_{\mu,\lambda} s_\mu(x_1, \ldots, x_k),$$

ed osservando che queste relazioni sono invertibili (perché la matrice $(k_{\mu,\lambda})$ è triangolare superiore con 1 sulla diagonale) otteniamo che

$$\chi_{S_\mu V}(g) = s_\mu(x_1, \ldots, x_k).$$

Da quest'ultima formula abbiamo subito che se $l(\lambda) \leq k$ allora le $S_\lambda V$ sono irriducibili e a due a due non isomorfe (come B-moduli). Se invece $l(\lambda) > k$, usando Jacobi-Trudi abbiamo che

$$s_\lambda(x_1, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0) = \det(e_{\lambda'_i - i + j})$$

ora $\lambda'_1 = l(\lambda) > l$ e per $i = 1$ abbiamo $\lambda'_1 - 1 + j > k$ da cui $e_{\lambda'_1 - 1 + j}$ è somma di monomi in cui compare sempre un qualche x_j con $j > k$ e pertanto $e_{\lambda'_1 - 1 + j}(x_1, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0) = 0$. Quindi anche $\dim S_\lambda V = s_\lambda(1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0) = 0$.

Vediamo adesso la formula per la dimensione degli $S_\lambda V$. Ricordiamo che

$$s_\lambda(x_1, \ldots, x_k) = \frac{a_{\lambda+\delta}}{a_\delta} = \frac{\det(x_i^{\lambda_j + n - j})}{\det(x_i^{n-j})}.$$

in particolare il denominatore è il determinante di Vandermonde. Ponendo $x_i = x^{i-1}$ abbiamo

$$s_\lambda(1, x, x^2, \ldots, x^{k-1}) = \frac{\det(x^{(i-1)(\lambda_j + n - j)})}{\prod_{j<r}(x^{n-j} - x^{n-r})}.$$

Osserviamo che ora anche il nominatore è un determinante di Vandermonde, nelle variabili $x^{\lambda_j + n - j}$, in particolare

$$\det(x^{(i-1)(\lambda_j + n - j)}) = \prod_{j<r} \left(x^{\lambda_j + n - j} - x^{\lambda_r + n - r} \right).$$

Da cui abbiamo

$$s_\lambda(1,\dots,x^{k-1}) = \prod_{j<r} x^{\lambda_r} \frac{x^{\lambda_j-\lambda_r+r-j}-1}{x^{r-j}-1}$$

e facendo tendere x ad 1 otteniamo

$$\dim S_\lambda V = s_\lambda(1,\dots,1) = \prod_{j<r} \frac{\lambda_j-\lambda_r+r-j}{r-j}.$$

Quanto detto finora riguarda la struttura di B-modulo degli $S_\lambda V$; adesso dobbiamo ricondurci a $GL(n,\mathbb{C})$.

$$GL(V) \hookrightarrow \mathrm{End}(V) \hookrightarrow B = \mathrm{Hom}_{S_d}(V^{\otimes s}, V^{\otimes d}).$$

dunque la struttura di $GL(V)$ modulo è compatibile con quella di B-modulo.

Lemma 66. *B è generato, come $\mathbb{C}$ spazio, da $\mathrm{End}(V)$. In particolare un sottospazio di $V^{\otimes d}$ è un B-modulo se e solo se è $\mathrm{End}(V)$-invariante se e solo se è $GL(V)$-invariante.*

Dimostrazione. Sia W uno spazio vettoriale di dimensione finita; allora

$$\mathrm{Sym}^d W = \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\langle w\otimes\cdots\otimes w : \ w\in W\rangle.$$

Infatti sia $\varphi : \mathrm{Sym}^d W \to \mathbb{C}$ funzionale lineare, se φ si annulla su $\mathrm{span}_{\mathbb{C}}\langle w\otimes\cdots\otimes w : \ w\in W\rangle$ allora $\varphi = 0$; sia $v \in \mathrm{Sym}^d W$, allora $v = \sum_\lambda \gamma_\lambda m_\lambda(w_1,\dots,w_k)$ e, detto $\xi_\lambda = \varphi(m_\lambda(w_1,\dots,w_k))$ abbiamo

$$0 = \varphi((x_1w_1+\cdots+x_kw_k)\otimes\cdots\otimes(x_1w_1+\cdots+x_kw_k)) = \sum_\lambda \xi_\lambda m_\lambda(x_1,\dots,x_k)$$

da cui abbiamo $\xi_\lambda = 0$ per ogni λ. Ora

$$\mathrm{End}(V^{\otimes d}) \cong (V^{\otimes d})^* \otimes V^{\otimes d} \cong (V^*)^{\otimes d} \otimes V^{\otimes d} \cong \mathrm{End}(V)^{\otimes d}$$

e gli isomorfismi sono tutti di S_d-moduli destri. Dunque $B = \mathrm{End}(V^{\otimes d})^{S_d} \cong (\mathrm{End}(V)^{\otimes d})^{S_d} \cong \mathrm{Sym}^d\mathrm{End}(V)$ è generato dagli elementi $\varphi\otimes\cdots\otimes\varphi$ con $\varphi\in\mathrm{End}(V)$. □

Come conseguenza abbiamo che un B-modulo è irriducibile se e solo se è irriducibile come $GL(V)$-modulo e dunque da quanto dimostrato finora segue il teorema 65.

Esercizio 26. Calcoliamo la decomposizione in irriducibili di $S_\lambda V \otimes S_\mu V$.

$$S_\lambda V \otimes S_\mu V = V^{\otimes n} \cdot c_\lambda \otimes V^{\otimes m} \cdot c_\mu = (V^{\otimes n} \otimes V^{\otimes m}) \cdot (c_\lambda \otimes c_\mu).$$

Dove $c_\lambda \otimes c_\mu = c \in \mathbb{C}S_{n+m}$; cerchiamo una relazione del tipo

$$S_\lambda V \otimes S_\mu V = V^{\otimes n+m} \cdot c = \oplus_\nu \vartheta_\nu S_\nu V.$$

Passando ai caratteri ci basta avere $s_\lambda \cdot s_\mu = \sum_\nu \vartheta_\nu s_\nu$. Usiamo la *regola di Littlewood-Richardson* che dice che

$$s_\lambda \cdot s_\mu = \sum_\nu N_{\lambda,\mu,\nu} s_\nu$$

dove i $N_{\lambda,\mu,\nu}$ si chiamano *numeri di Littlewood-Richardson* e si costruiscono nel seguente modo: consideriamo la tabella associata a λ

$$\lambda = \ydiagram{5,4,2,1}$$

Vogliamo aggiungere μ_1 caselle riempite con 1, μ_2 caselle riempite con 2 e così via in modo che si ottenga un tableaux non decrescente sulle righe e crescente sulle colonne e tale che leggendo i numeri aggiunti da destra a sinistra e dall'alto in basso la parola che si ottiene è tale che per ogni stringa iniziale il numero di occorrenze di i è maggiore del numero di occorrenze di ogni $j > i$. Ad esempio 12112 va bene mentre 21112 non va bene.

Ad esempio se $\lambda = (3,1) = \ydiagram{3,1}$ e $\mu = (2,1) = \ydiagram{2,1}$ abbiamo le seguenti possibilità

$$\begin{ytableau} * & * & * & 1 & 1 \\ * & 2 \end{ytableau} \qquad \begin{ytableau} * & * & * & 1 & 1 \\ * \\ 2 \end{ytableau} \qquad \begin{ytableau} * & * & * & 1 \\ * & 1 & 2 \end{ytableau} \qquad \text{etc..}$$

Esercizio 27. Sia $V_n = \ydiagram{3,1}$ la rappresentazione standard di S_n, dimostriamo che

$$\bigwedge^s V_n = V_\lambda = \ydiagram{5,1,1,1} \quad \text{con } \lambda = (n-s, \underbrace{1,1,\dots,1}_{s \text{ volte}}).$$

Sia

$$W = \mathrm{Res}^{S_n}_{S_{n-1}} \overset{s}{\bigwedge} V_n \cong \overset{s}{\bigwedge} \ydiagram{3,1} \oplus \ydiagram{4} = \overset{s}{\bigwedge}(V_{n-1} \oplus \text{banale}) =$$
$$\left(\overset{s}{\bigwedge} V_{n-1} \oplus \overset{s-1}{\bigwedge} V_{n-1} \right) \otimes \text{banale} =$$
$$V_\nu \oplus V_\mu \text{ con } \nu = (n-1-s, \underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{s \text{ volte}}), \mu = (n-s, \underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{s-1 \text{ volte}}).$$

e per la regola di Pieri si ha $\bigwedge^s V_n = V_\lambda$ con

$$\lambda = (n-s, \underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{s \text{ volte}}).$$