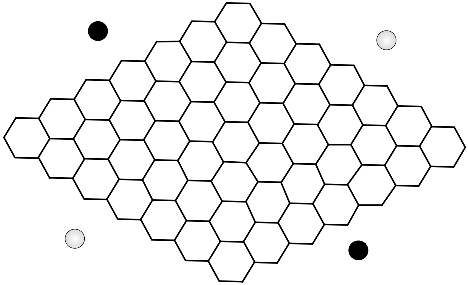
Giochi, grafi e strategie

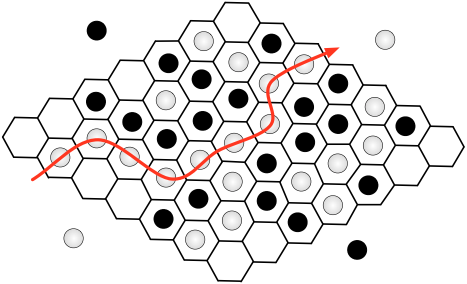
Giovanni Gaiffi
(Università di Pisa)

Settimana Matematica
Pisa, 2 febbraio 2018

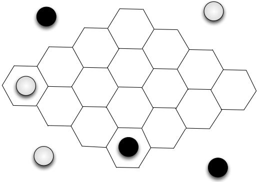
Hex: il gioco

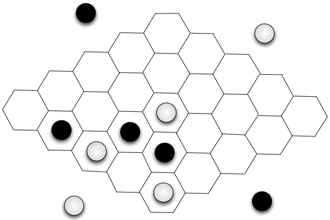
Piet Hein (1905 - 1996),   John Nash (1928-2015)



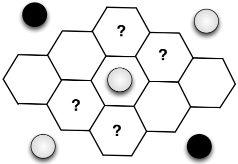


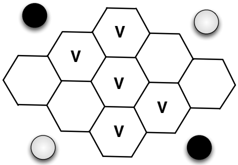
Dal giornale danese Politiken, 1942:

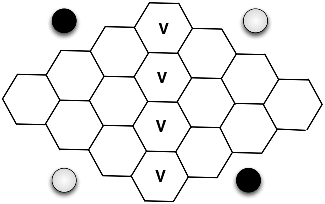


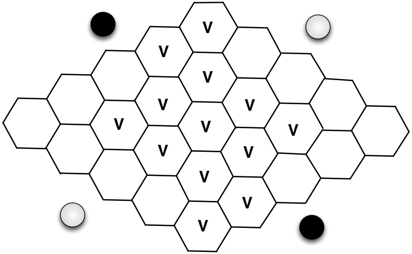


Un esempio semplice: il caso 3×3.






V
V
V
V


V
V
V
V
V
V
V
V
V
V
V
V
V

Fatti importanti:

1. Il gioco non può finire in parità;
2. il primo giocatore (il bianco) ha sempre a disposizione una strategia vincente;
3. il gioco è davvero interessante da giocare perché per scacchiere grandi non è disponibile una descrizione dettagliata della strategia vincente.
   Come per gli scacchi, ci sono programmi per computer che giocano a Hex (per esempio Hexy, medaglia d'oro alla Computer Olympiad 2000, Wolve, medaglia d'oro alla Computer Olympiad 2008, MoHex...).

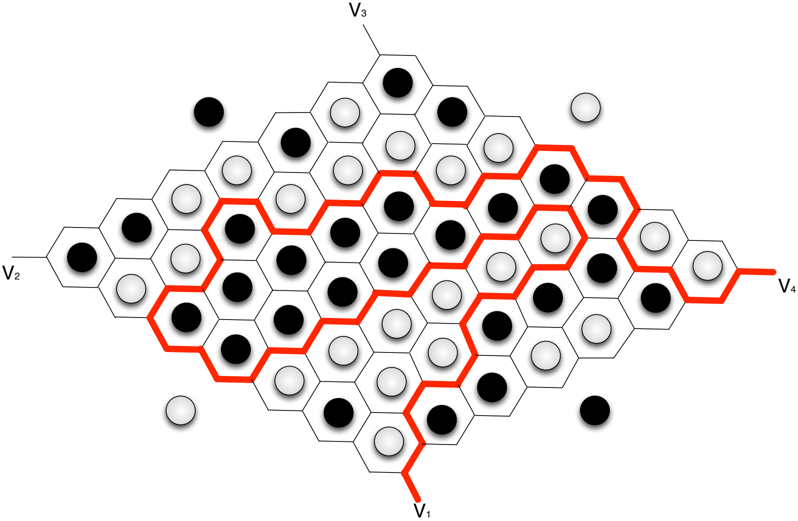
Hex: il teorema dell' impossibilità del pareggio

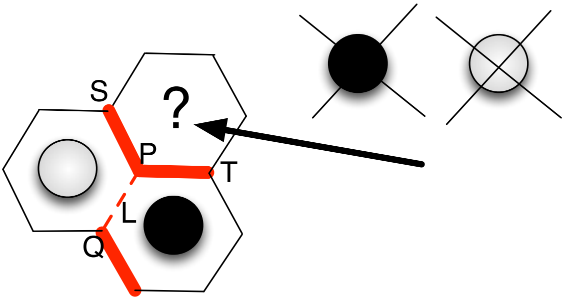
Qualche riflessione sul teorema che dice che non è possibile un finale in pareggio:

Teorema (Il teorema dell'Hex)

Consideriamo una scacchiera da Hex di formato $n \times n$.
Se tutte le caselle delle scacchiera sono riempite da pedine (bianche o nere), allora esiste o un percorso bianco che congiunge le due sponde bianche o un percorso nero che congiunge le due sponde nere.

Traccia della dimostrazione:





S
?
P
T
L
Q

Si può dimostrare che il teorema dell'Hex è equivalente al famoso:

Teorema (Il teorema di punto fisso di Brouwer, 1911)

Una funzione continua $f : Q \to Q$ *da un quadrato (col bordo) in sé ha un punto fisso, ossia c'è un punto* $x \in Q$ *tale che* $f(x) = x$*.*

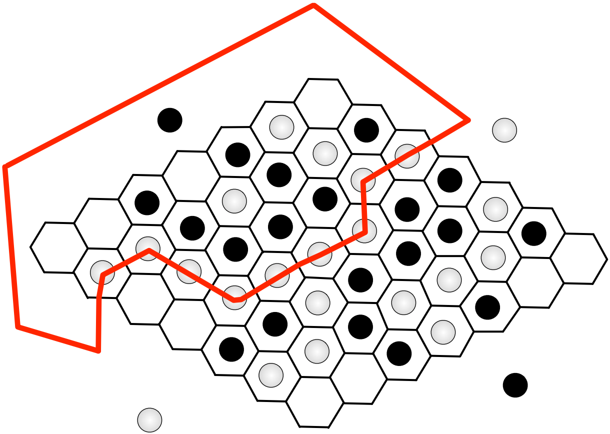
Teorema (Il teorema dell'Hex)

Consideriamo una scacchiera da Hex di formato $n \times n$.
Se tutte le caselle delle scacchiera sono riempite da pedine (bianche o nere), allora esiste o un percorso bianco che congiunge le due sponde bianche o un percorso nero che congiunge le due sponde nere ma non capitano entrambe le cose insieme.

L'affermazione ma non capitano entrambe le cose insieme è una conseguenza di un altro importante risultato topologico, il Teorema della Curva di Jordan.

Teorema (Il Teorema della Curva di Jordan, C. Jordan 1887, O. Veblen 1905.)

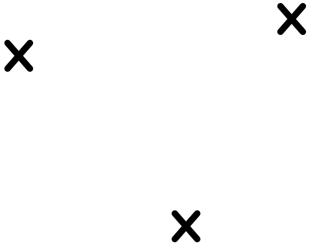
Sia C una curva continua, semplice e chiusa nel piano $\mathbb{R}^2$. Allora il suo complementare, $\mathbb{R}^2 - C$, ha esattamente due componenti connesse. Una di queste componenti è limitata (la parte interna*) e l'altra è illimitata (la* parte esterna*), e la curva C è il bordo di ogni componente. Ogni percorso che connette un punto P nella parte interna con un punto Q nella parte esterna interseca C, mentre se due punti sono entrambi nella parte interna (o entrambi nella parte esterna) esiste un percorso che li connette e che non interseca C.*

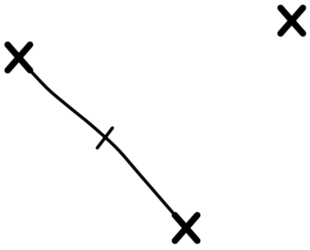


- Buone notizie per gli amanti dei giochi: anche "Misere" Hex è interessante da giocare!
  Quale giocatore ha una strategia vincente?
- Buone notizie anche sul fronte delle funzioni continue e della topologia: il teorema dell'Hex vale anche nella sua versione n-dimensionale (giocato su un ipercubo da n giocatori, ognuno con pedine di colore diverso), ed è equivalente al Teorema di Punto Fisso di Brower n-dimensionale.

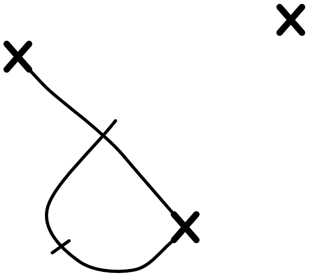
Cavoletti di Bruxelles: il gioco

John Conway (1937 -) e Mike Paterson

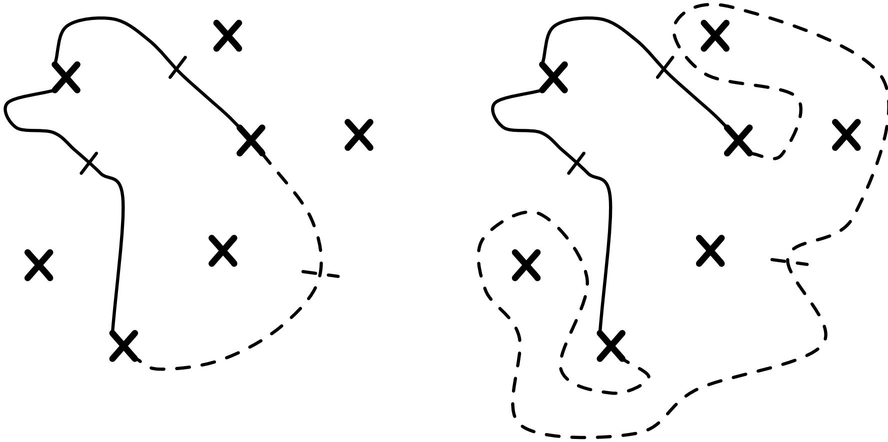




(1)

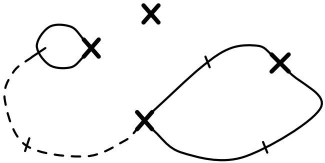


(2)

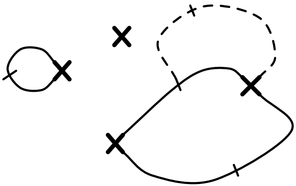


Domanda cruciale: questo gioco finisce in un numero finito di mosse?

Sia r il numero di regioni che vediamo nella figura.
Sia i il numero di “isole”, cioè componenti connesse, che vediamo nella figura.
Cosa accade a $r - i$ dopo ogni mossa?



(a)



(b)

Si può dimostrare (usando il Teorema della Curva di Jordan!) che $r - i$ aumenta di 1 dopo ogni mossa.
Allora, dopo m mosse, abbiamo

$$r - i = 1 - n + m$$

Dunque, visto che vale sempre $i \geq 1$ and $r \leq 4n$ si ricava che

$$r - i \leq 4n - 1$$

e di conseguenza

$$m \leq 4n - 1 + n - 1 = 5n - 2$$

Il gioco termina in al più $5n - 2$ mosse!

1. Cattive notizie per gli amanti dei giochi: il gioco termina in esattamente $5n - 2$ mosse!
2. Per gli amanti della topologia...

Cavoletti di Bruxelles: la topologia

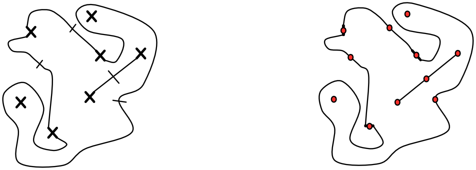
La formula

$$r - i = 1 - n + m$$

può essere riscritta come

$$r - i = 1 + s - p$$

dove s e p sono rispettivamente gli archi e i punti che vediamo nella figura.



Questo segue dalle uguaglianze $p = n + m$ e $s = 2m$.

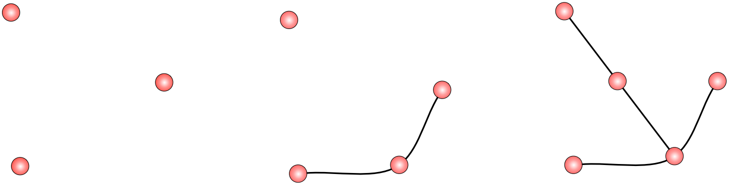
In conclusione:

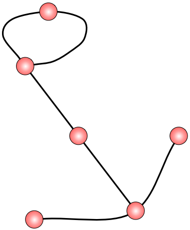
$$r - s + p = 1 + i$$

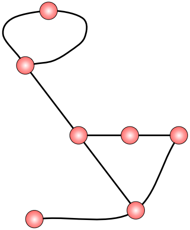
che è la formula di Eulero per i grafi planari, “nascosta” nel gioco.

Una variante di Cavoletti di Bruxelles: Germogli

Anche questo gioco è stato inventato da Conway e Paterson:







Fatti importanti:

- Questo gioco è interessante da giocare: se ci sono n pallini all'inizio, il gioco finisce in m mosse, con

$$2n \leq m \leq 3n - 1$$

- C'è una congettura: il primo giocatore ha una strategia vincente se e solo se il numero n di pallini iniziali, diviso per 6, dà resto 3,4, or 5.
- Si congettura che anche la versione "misere" del gioco dipenda dal resto della divisione di n per 6... con alcune eccezioni iniziali.

Qualche lettura

- E. Berlekamp, J. Conway, R. Guy, *Winning Ways for your Mathematical Plays*, Vol. I and II, Academic Press, (1982).
- E. Delucchi, G. Gaiffi, L. Pernazza, *Giochi e percorsi matematici*, Springer, 2012.
- D. Gale, *Topological games at Princeton, a mathematical memoir*, Games and Economic Behavior 66 (2009).
- D. Gale, *The game of Hex and the Brouwer Fixed Point Theorem*, Amer. Math. Monthly 86, (1979).
- M. Gardner, *The second Scientific American Book of Mathematical Puzzles...*, Univ. of Chicago Press, (1987).
- M. Gardner, *Enigmi e giochi matematici*, BUR (2001).