Algebra Lineare

note delle lezioni di Filippo Callegaro

Ricevimento (durante il periodo di lezioni) lunedì 14.30 - 16.30, di solito presso il Dipartimento di Matematica, ufficio 401, 2° piano.

N.B. mandate una mail 24 h prima x prenotarvi.

Materiale utile:

- sito del prof. Iraci: https://sites.google.com/view/iraci/teaching
  - googlate "Alessandro Iraci math"
    - un libro gratuito
    - "Geometria e Algebra Lineare", di Bruno Martelli

https://people.dm.unipi.it/martelli/alg_lin.html

R link a note delle lezioni esercizi e altro materiale

- registro delle lezioni del corso

25/9/2023	Introduzione
28/9/2023	Numeri complessi
2/10/2023	Esercizi dal cap. 1
5/10/2023	Esercizi dal cap. 2
10/10/2023	Algoritmo di Gauss
16/10/2023	Completamento ed Estrazione di basi
19/10/2023	Coordinate
24/10/2023	Esercizi pre I° compitino
30/10/2023	Applicazioni Lineari Teorema delle dimensione
2/11/2023	Isomorfismi
9/11/2023	Matrice associata
14/11/2023	Algoritmo di Gauss per l'inversa
20/11/2023	Esercizi del capitolo 4
23/11/2023	Cambio di base
28/11/2023	Cambio base per endomorfismi
4/12/2023	Esercizi dal capitolo 3
7/12/2023	Esercizi dal capitolo 5
12/12/2023	Prodotti scalari
	Algoritmo di Gram-Schmidt
	Cambio di Base per prodotti scalari
	Prodotti hermitiani
	Matrici ortogonali
	Teorema spettrale
	Esercizi dal capitolo 8
	Esercizi dal capitolo 11

Introduzione

25/9/2023

"Def" Un insieme è una collezione di oggetti.

$$\{1,2,3\} = \{2,3,1\} = \{1,2,1,3,2,1\}$$

ripetizione "inutile"

"Def" Un insieme è un oggetto X tale che $\forall x$ "per ogni"

posso dire $x \in X$ oppure $x \notin X$.

"appartiene"

Dati X, Y insiemi posso costruirne altri

$X \cup Y := \{ z \mid z \in X \text{ oppure } z \in Y \}$ unione

$X \cap Y := \{ z \mid z \in X \text{ e } z \in Y \}$ intersezione

$X \triangle Y := \{ z \mid z \in X \cup Y \text{ e } z \notin X \cap Y \}$ diff. simmetrica

$X \setminus Y := \{ x \in X \mid x \notin Y \}$ differenza

"Def" Un sottoinsieme Y di X è un insieme Y che "sta dentro" a X

Def Un sottoinsieme Y di X è un insieme tale che

$z \in Y \implies z \in X$

"allora": l'affermazione a sinistra implica quella a destra

$\boxed{\text{scrivo } Y \subseteq X}$

Alternativamente, tale che $Y = Y \cap X$.

"Def" Una funzione $f : X \to Y$ è una cosa che mangia un elemento di X e sputa un elemento di Y.

Def Definisco la coppia ordinata $(x,y) = \{\underbrace{\{x\}}_{A}, \underbrace{\{x,y\}}_{B}\}$

x è l'unico elemento di $A \cap B$

y è l'unico elemento di $A \Delta B$

Def Una funzione $f: X \to Y$ è un sottoinsieme

$$f \subseteq \{(x,y) \mid x \in X, y \in Y\} =: X \times Y$$

prodotto cartesiano di X e Y

tale che $\forall x \in X \ \exists! \ y \in Y$ tale che $(x,y) \in f$.

"esiste" "è unico"

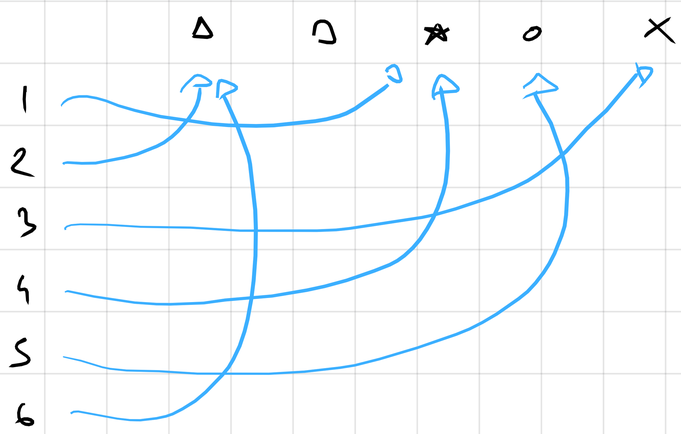
ovvero "mandamente" ho la collezione delle coppie $(x, f(x))$

Def il prodotto cartesiano $X \times Y$ è l'insieme delle coppie

$$X \times Y := \{(x,y) \mid x \in X, y \in Y\}$$

$$\{\Delta \quad \square \quad \star \quad \circ \quad \times \quad +\} = Y$$

$$X = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{bmatrix} (1,\Delta) & (1,\square) & \cdots & \\ (2,\Delta) & \cdots & \cdots & \\ - & - & \square, \star & \\ & & & \\ & & & \\ (6,\Delta) & (6,\square) & \cdots & (6,+) \end{bmatrix} = X \times Y$$

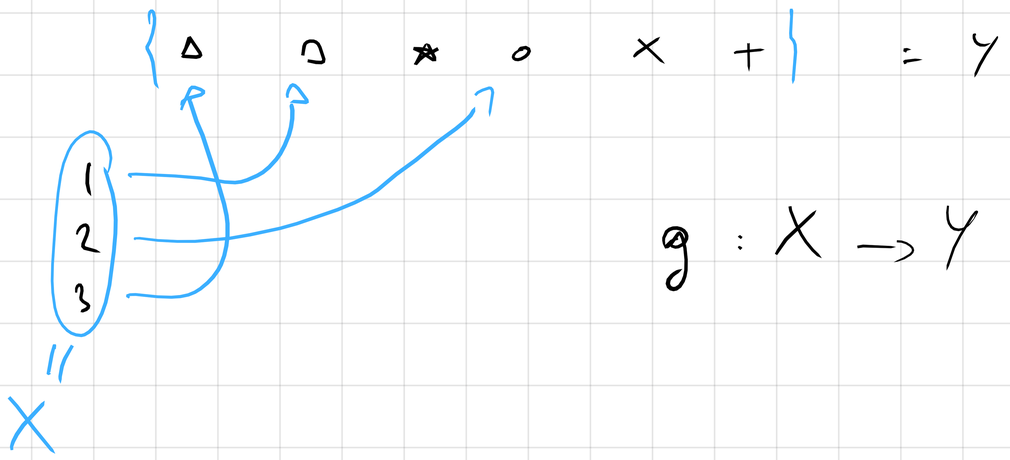


$$f = \{(1,\star), (2,\Delta), (3,\times), (4,\star), (5,\circ), (6,\Delta)\}$$

per ogni elemento di $X = \{1,2,\dots,6\}$ ho una e una sola coppia che lo contiene.

per Y ho casi: $(1,\star), (4,\star) \in f$

$(-,\square) \notin f$



$g : X \to Y$

"Def" Una funzione $f : X \to Y$ è iniettiva se su ogni elemento $y \in Y$ arriva al più una freccia.

Def Una funzione $f : X \to Y$ è iniettiva se $x \neq x' \in X \Rightarrow f(x) \neq f(x')$

Alternativamente, se $f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$

In generale $A \Rightarrow B$ è equivalente a dire

non $B \Rightarrow$ non A

Notazione

$\forall$	per ogni	$\cup$	unione
$\exists$	esiste	$\cap$	intersezione
$\exists!$	esiste un unico	$\triangle$	diff. simmetrica
$\setminus$	differenza		
$\mid$	tale che (t.c.)		

$P \Rightarrow Q$ "P implica Q", "P solo se Q"

$P \Leftarrow Q$ "P se Q"

$P \Leftrightarrow Q$ "P se e solo se Q"

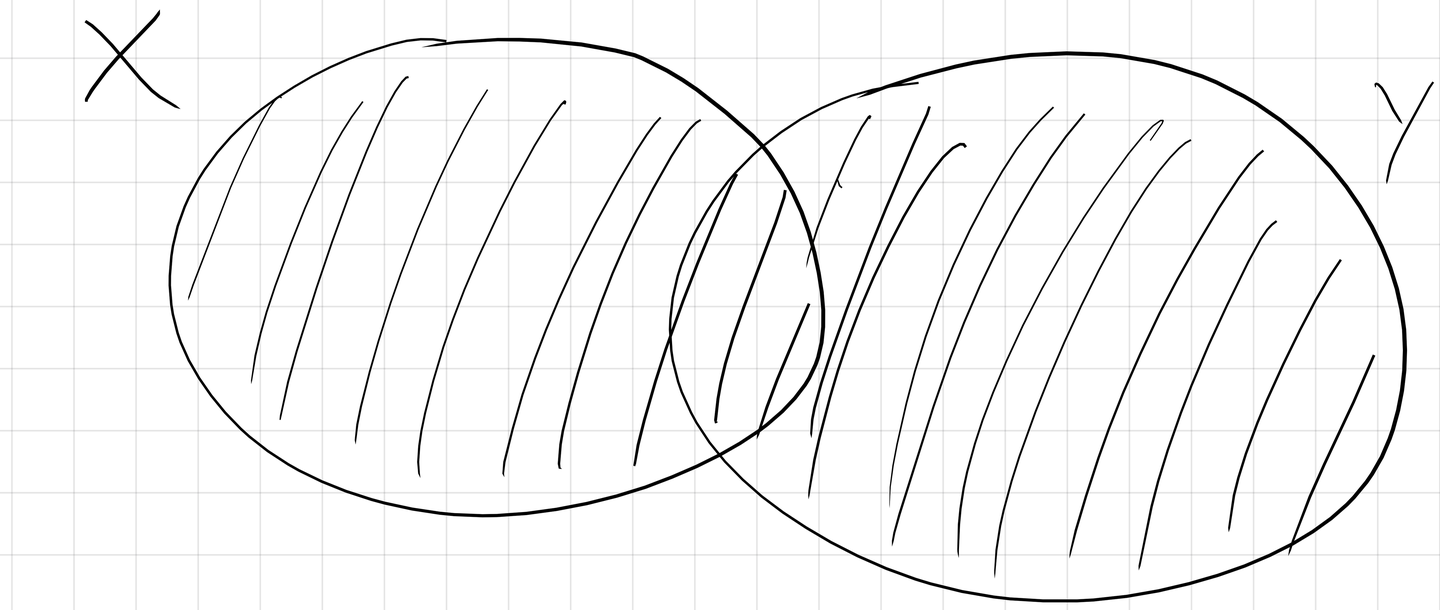
$\neg P$ "non P"

Tabelle di verità

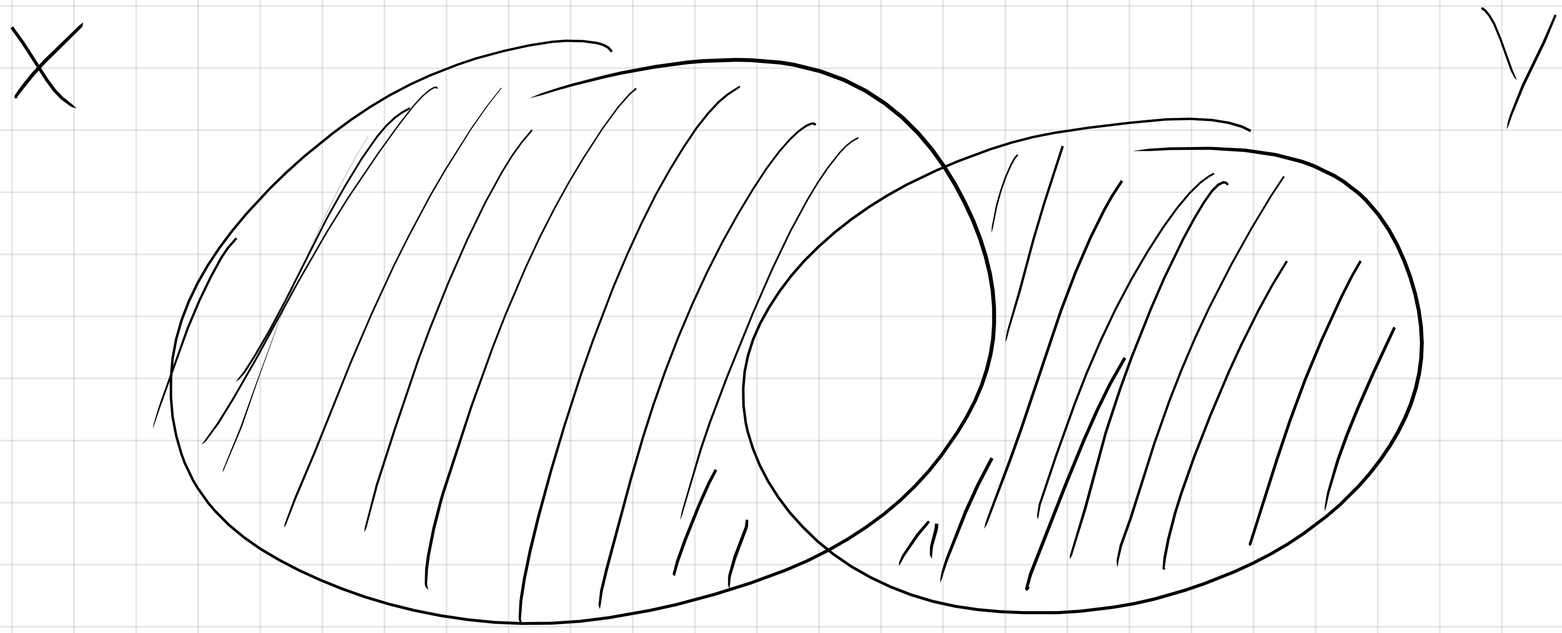
	P Q	P Q	P Q	P Q
	V V	V F	F V	F F
$P \Rightarrow Q$	V	F	V	V
$P \Leftarrow Q$	V	V	F	V
$P \Leftrightarrow Q$	V	F	F	V

Precisazione

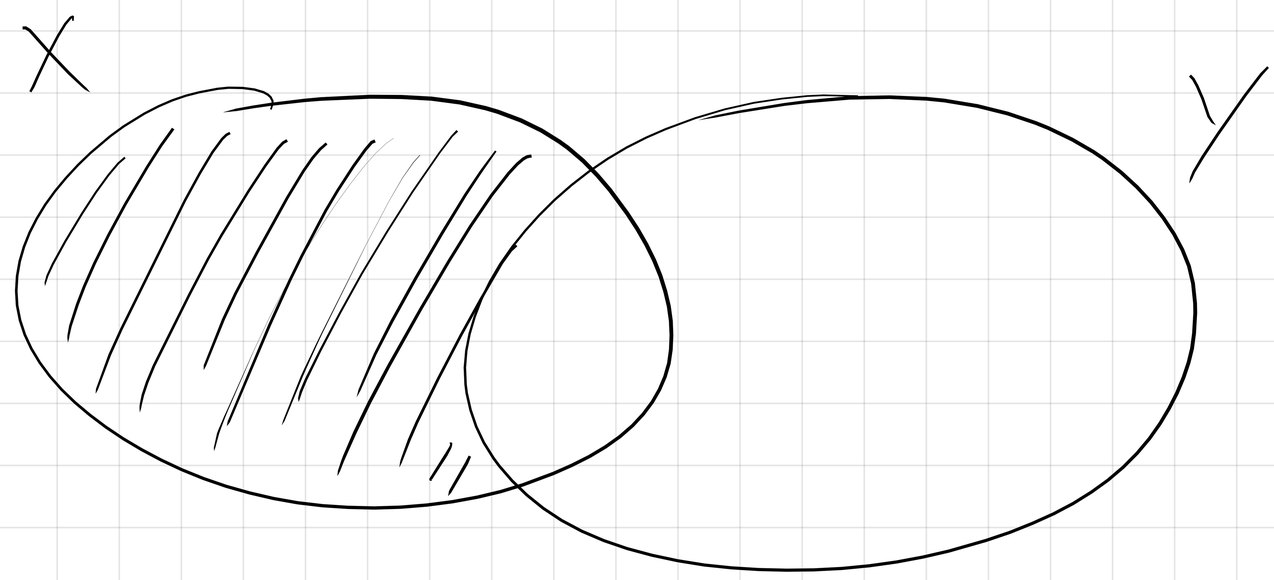
$X \cup Y$



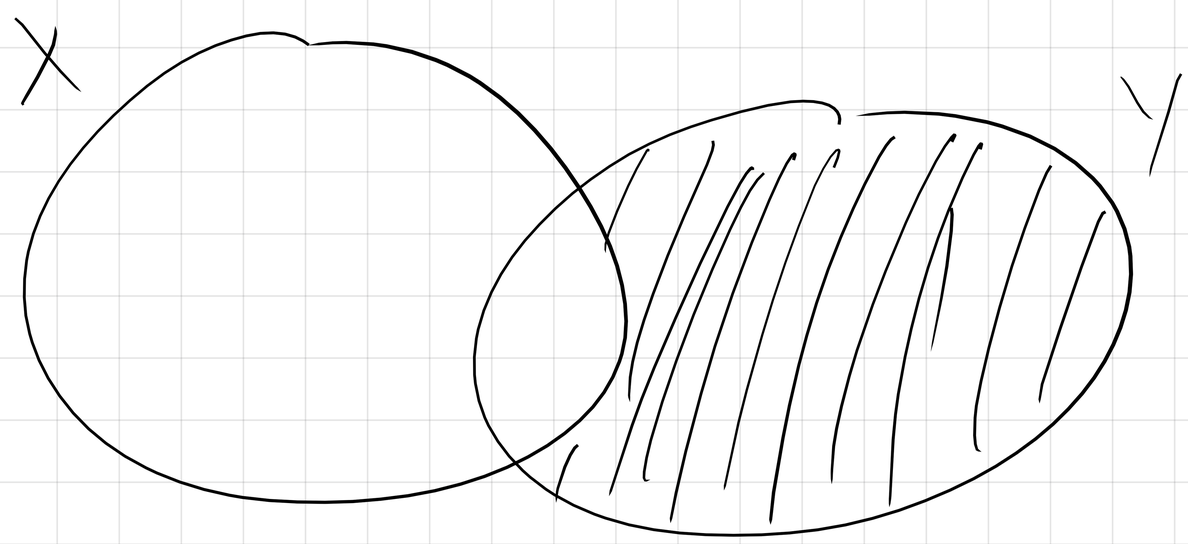
$X \triangle Y$



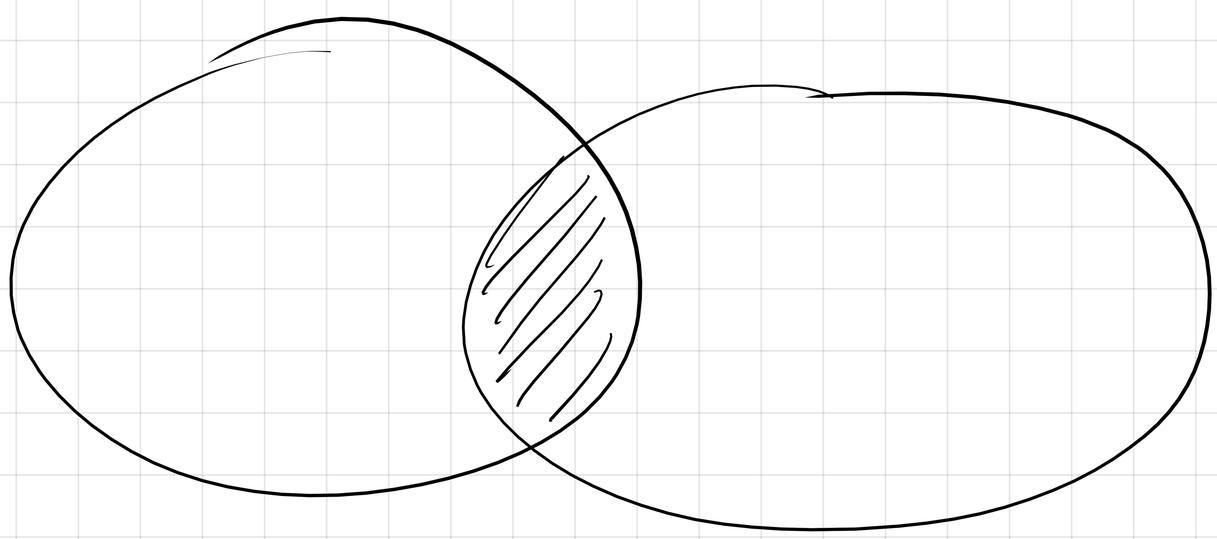
$X \setminus Y$



$Y \setminus X$



$X \cap Y$



28/9/2023

Sia X un insieme

Def: definiamo la funzione identità di X: $id_X : X \to X$ t.c. $id_X(x) = x$

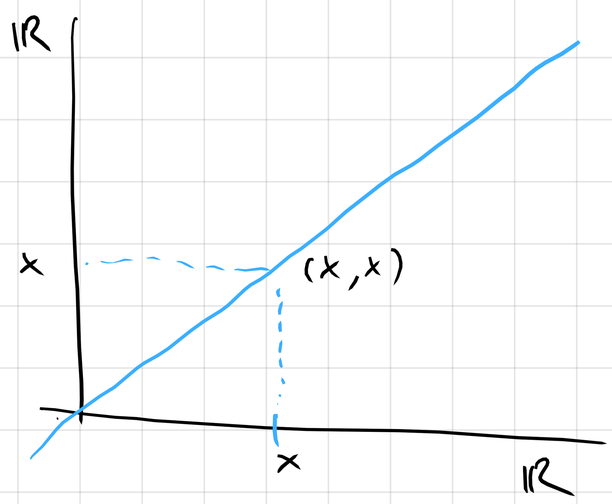
"Mangia un elemento e sputa lo stesso elemento"

$$id_X \subset X \times X$$

$$\shortparallel$$

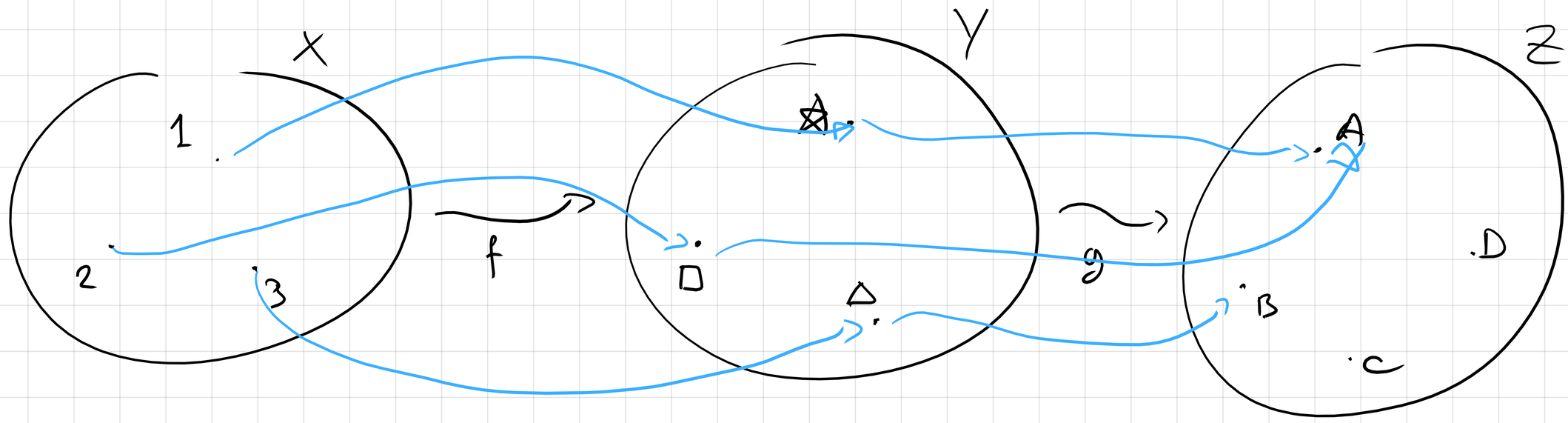
$$\{ (x, id_X(x)) \mid x \in X \} = \{ (x,x) \mid x \in X \}$$

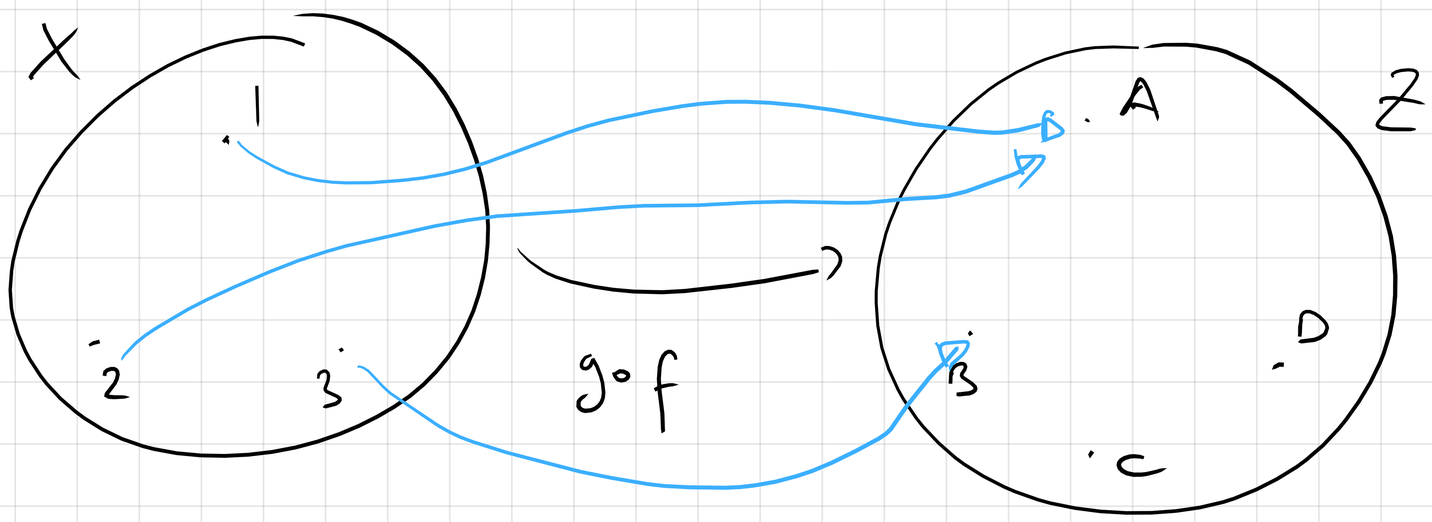
<u>es</u> : $id_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



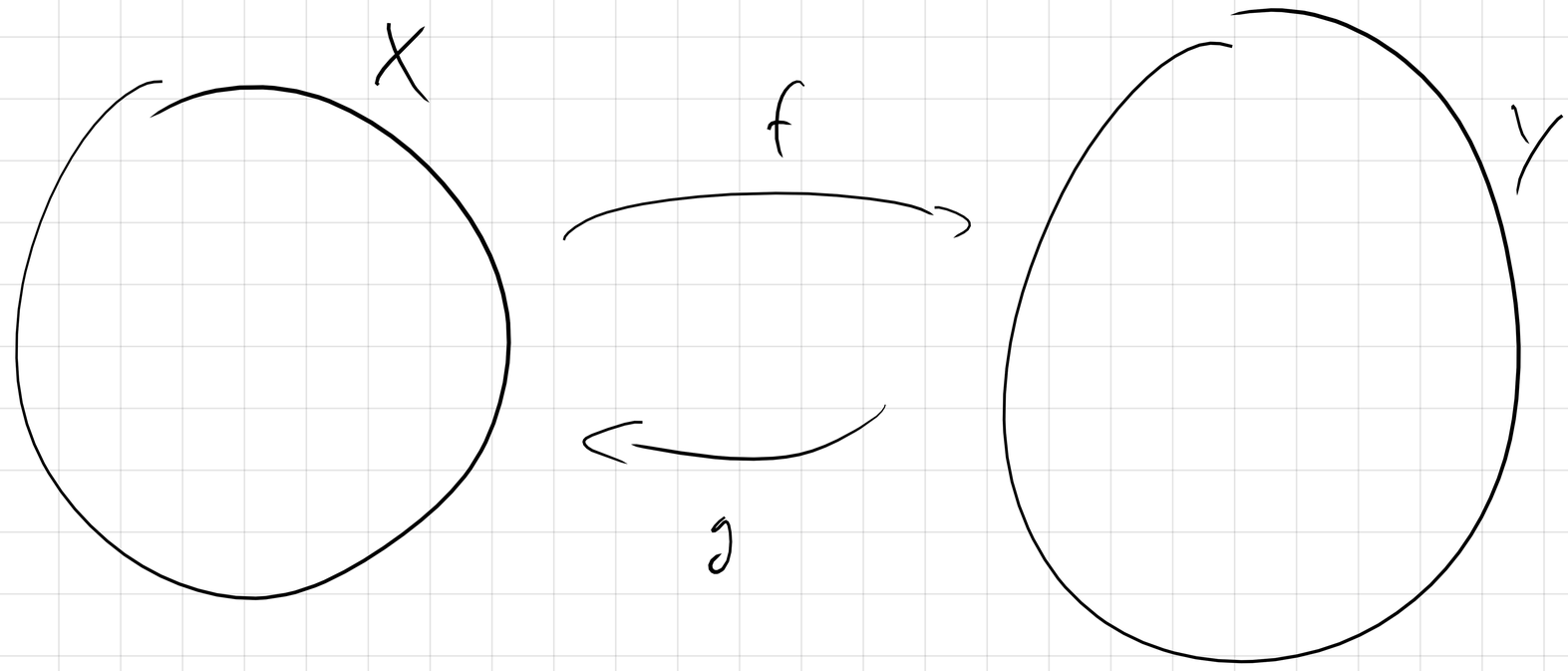
<u>oss</u> id_X è sempre iniettiva.

Def Date $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ definisco la composizione $g \circ f$ come la funzione $g \circ f : X \to Z$ definita come $g \circ f(x) = g(f(x))$





oss

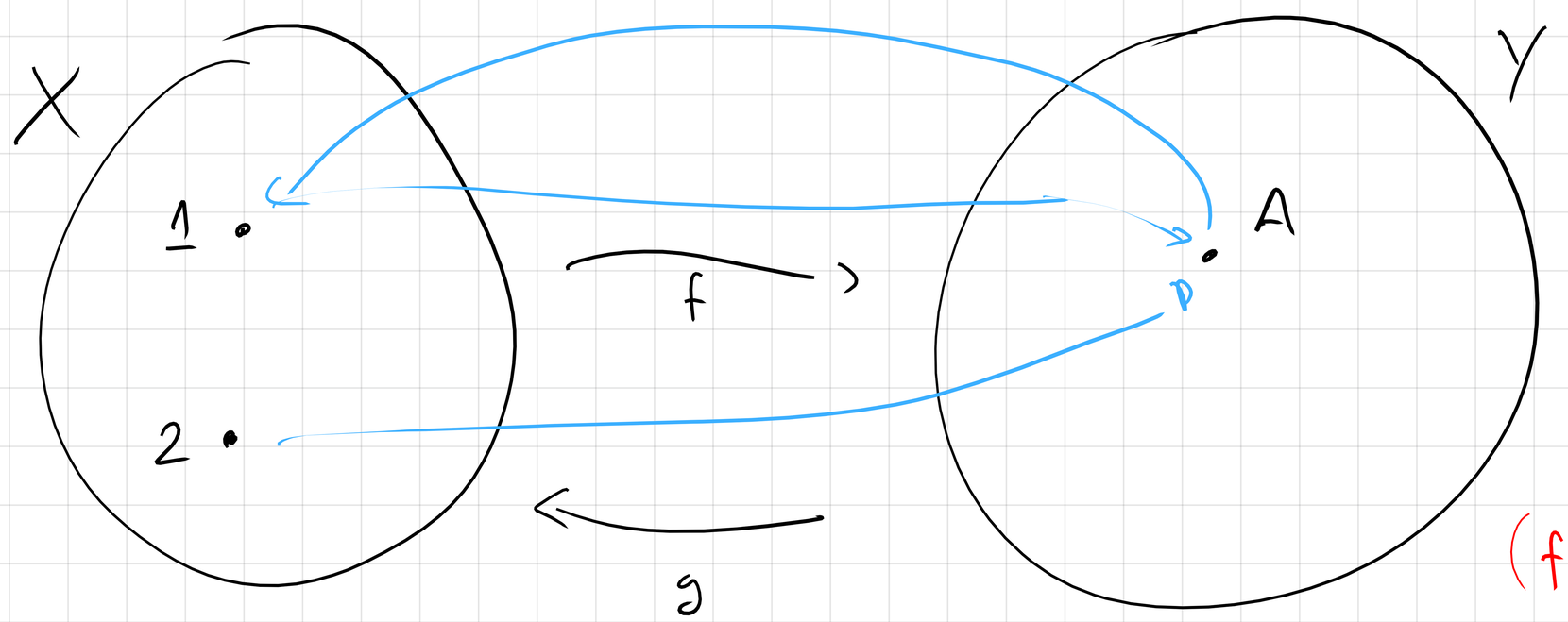


$f: X \to Y$, $g: Y \to X$

$g \circ f : X \to X$ $\qquad$ $f \circ g : Y \to Y$

Può succedere che $f \circ g = id_Y$ ma $g \circ f \neq id_X$

es



(f è suriettiva)

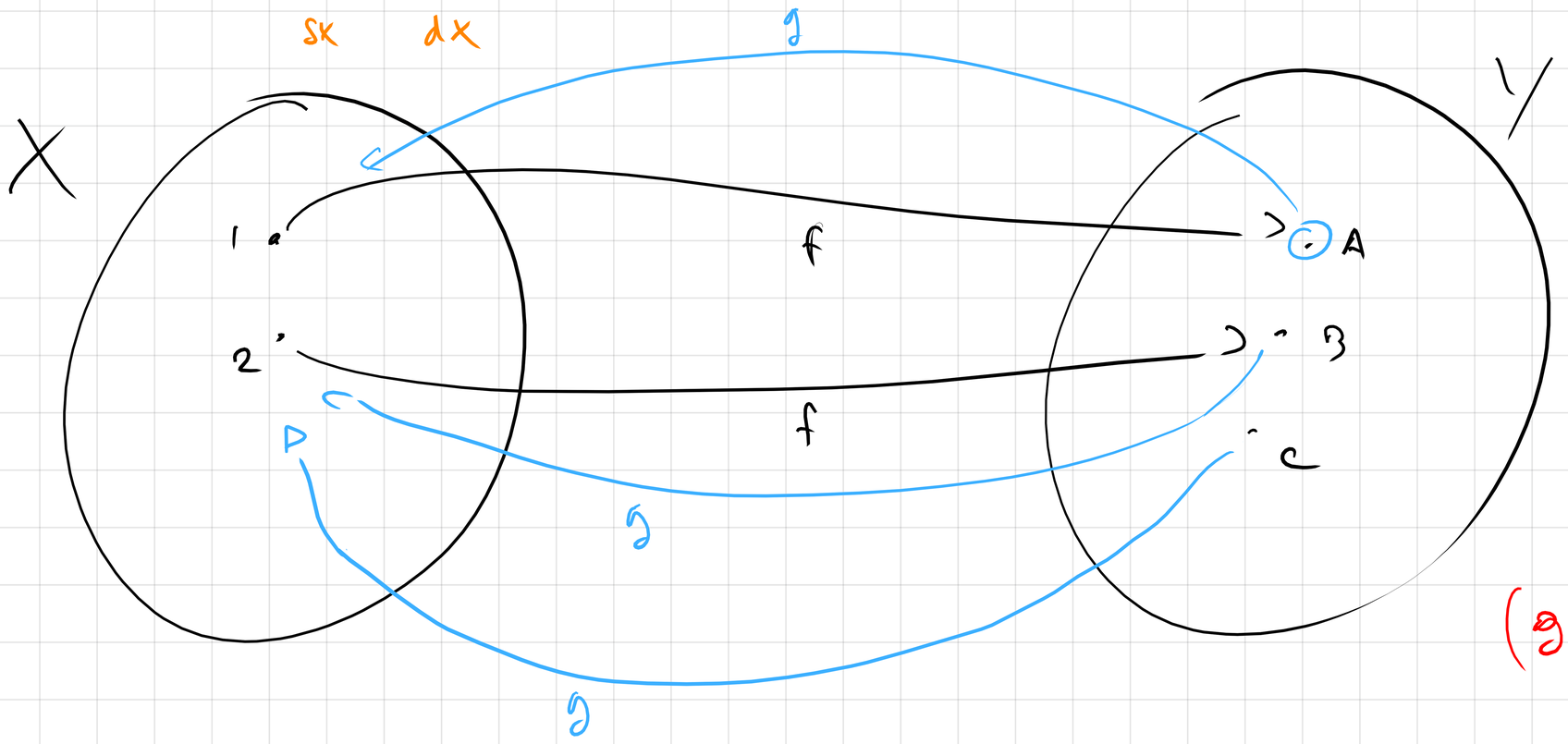
$f \circ g = id_Y$ $\qquad$ $g \circ f \neq id_X$

Teo Una funzione $\boxed{f}: X \to Y$ è iniettiva se e solo se ha un' inversa sinistra cioè esiste $g: Y \to X$ t.c.

$\boxed{g} \circ \boxed{f} : X \to X$ è id_X.

sx dx

es



(g è suriettiva)

In questo esempio g è inversa sinistra di f, cioè $g \circ f = id_X$, cioè f è l'inversa destra di g.

Def $f: X \to Y$ è **suriettiva** se $\forall y \in Y \ \exists x \in X : f(x) = y$

Teo Una funzione $f: X \to Y$ è suriettiva se e solo se ha un'**inversa destra**, cioè $\exists\, g: Y \to X$ t.c. $\underset{sx}{\boxed{f}} \circ \underset{dx}{\boxed{g}} : Y \to Y$ sia id_Y.

Def $f: X \to Y$ è **bigettiva** se $\forall y \in Y \ \exists! x \in X$ t.c. $f(x) = y$
(biettiva, biunivoca)

o, equivalentemente, f è suriettiva e iniettiva.

Teo Una funzione $f: X \to Y$ è bigettiva se e solo se ha un'inversa (destra e sinistra) cioè $\exists\, g: Y \to X$ t.c.

$$f \circ g = id_Y, \qquad g \circ f = id_X.$$

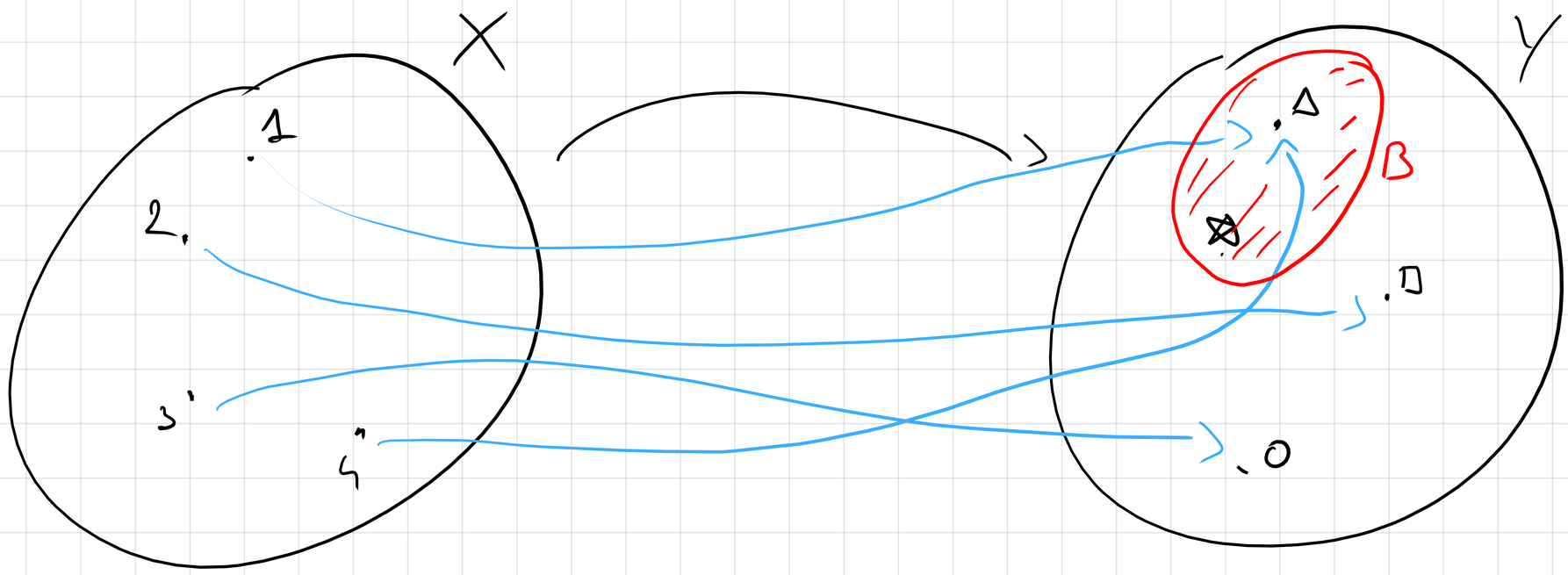
$f: X \to Y$ iniettiva $\Rightarrow \exists\, g_1 : Y \to X$ inversa sx di f

$f: X \to Y$ suriettiva $\Rightarrow \exists\, g_2 : Y \to X$ inversa dx di f

ESERCIZIO $g_1 = g_2$ (se esistono sia l'inversa dx, sia l'inversa sx di f, allora sono la stessa funzione).

Def $f: X \to Y$. Sia $B \subseteq Y$ sottoinsieme.

Chiamo **controimmagine di B** $f^{-1}(B) := \{x \in X \mid f(x) \in B\}$



$f^{-1}(B) = \{1, 4\}$ $\qquad$ $f^{-1}(A) = \{1, 4\}$

Se $y \in Y$ invece di scrivere $f^{-1}(\{y\})$ scrivo $f^{-1}(y)$

OSS Se $f: X \to Y$ è bigettiva, $\forall y \in Y$ $f^{-1}(y)$ è un insieme fatto da un solo elemento.

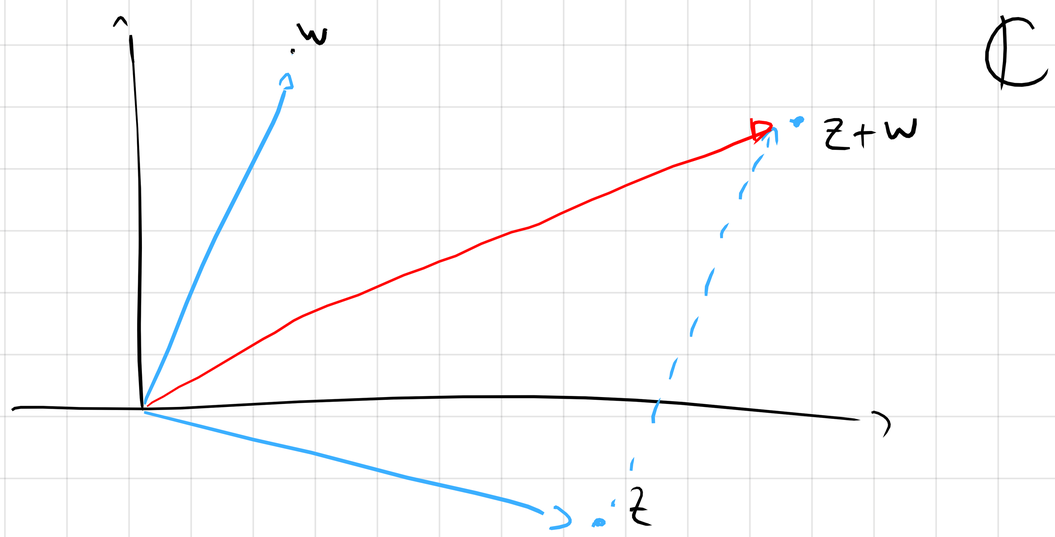
Posso scrivere $f^{-1}(y) = x$ dove x l'unico elemento di Y t.c. $f(x) = y$. Cioè f^{-1} è l'inversa (dx e sx) di f.

Numeri complessi

ESERCIZIO

Disuguaglianza triangolare $\triangle$

Siano $z, w \in \mathbb{C}$ $\qquad |z+w| \leq |z| + |w|$



$z = a + ib \qquad a, b, c, d \in \mathbb{R}$

$w = c + id$

$|z+w| \leq |z| + |w|$ equivale a $\underbrace{\sqrt{(a+c)^2 + (b+d)^2}}_{= |z+w|} \leq \underbrace{\sqrt{a^2+b^2}}_{= |z|} + \underbrace{\sqrt{c^2+d^2}}_{= |w|}$

$\Updownarrow$ eleviamo al $\square$

$(a+c)^2 + (b+d)^2 \leq a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2|z||w|$

$\cancel{a^2} + \cancel{c^2} + 2ac + \cancel{b^2} + \cancel{d^2} + 2bd \leq \cancel{a^2} + \cancel{b^2} + \cancel{c^2} + \cancel{d^2} + 2|z||w|$

$2ac + 2bd \leq 2|z||w|$

$ac + bd \leq |z||w|$

$\Uparrow$

$a^2c^2 + b^2d^2 + 2abcd \leq |z|^2|w|^2 = (a^2+b^2)(c^2+d^2)$

$\cancel{a^2c^2} + \cancel{b^2d^2} + 2abcd \leq \cancel{a^2c^2} + a^2d^2 + b^2c^2 + \cancel{b^2d^2}$

$0 \leq a^2d^2 + b^2c^2 - 2abcd$

$0 \leq (ad - bc)^2$ sempre vero

$1 \leq 3 \Rightarrow 1^2 \leq 3^2 = 9$

$-3 \leq 1 \not\Rightarrow 9 \leq 1$ NO!

Prop Sia $p(x)$ polinomio a coeff. reali. Sia $z \in \mathbb{C}$

$$p(z) = 0 \implies p(\bar{z}) = 0$$

Prop (Teorema fondamentale dell'algebra)

Sia $p(z)$ è polinomio non costante, a coeff. in $\mathbb{C}$,

$\exists\, z_0 \in \mathbb{C}$ t.c. $p(z_0) = 0$.

oss Se z_0 è radice di $p(z)$ $\implies$ $(z - z_0)$ divide $p(z)$,

di grado n

cioè

$$p(z) = q(z) \cdot (z - z_0)$$

altro polinomio, di grado $n-1$
(lo trovo dividendo $p(z)$ per $(z - z_0)$)

es $z^3 - 1 = (z^2 + z + 1)(z - 1)$

Cor Se $p(z)$ è pol. a coeff complessi di grado n, si fattorizza come

$$p(z) = a\,(z - z_0)(z - z_1) \cdots (z - z_{n-1})$$

dove $z_0, \dots, z_{n-1}$ sono le n radici di $p(z)$

(ci possono essere delle ripetizioni)

ES $z^6 - 2z^3 + 1 = (z^3 - 1)^2 =$

$$= (z-1)^2 \left(z - e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^2 \left(z - e^{i\frac{4\pi}{3}}\right)^2$$

troviamo le radici di $z^3 - 1 = 0$, cioè le radici terze di 1.

$z = \rho e^{i\alpha}$ $\qquad 1 = 1 \cdot e^{i0}$

$z^3 = \rho^3 e^{i3\alpha}$ e quindi

$\rho^3 = 1$ $\quad$ (ma $\rho \in \mathbb{R}_{\geq 0} \implies \rho = 1$)

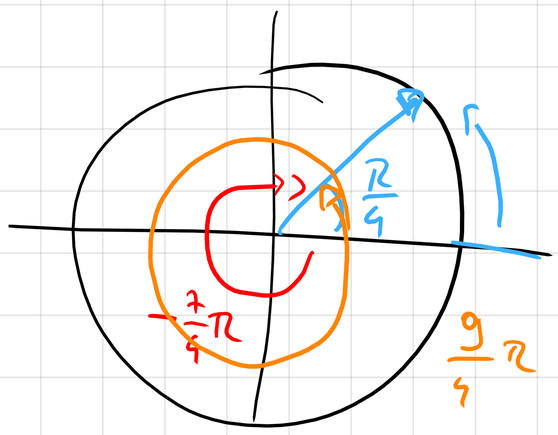
$3\alpha = 0 + 2k\pi$ $\qquad k \in \mathbb{Z}$

$\alpha_0 = 0$ $\qquad k = 0$

$\alpha_1 = \frac{2\pi}{3}$ $\qquad k = 1$

$\alpha_2 = \frac{4\pi}{3}$ $\qquad k = 2$

$\implies$ l'argomento è un "angolo", ha senso a meno di multipli di 2π.



$\alpha_4 = \frac{6}{3}\pi = 2\pi \qquad k=3$

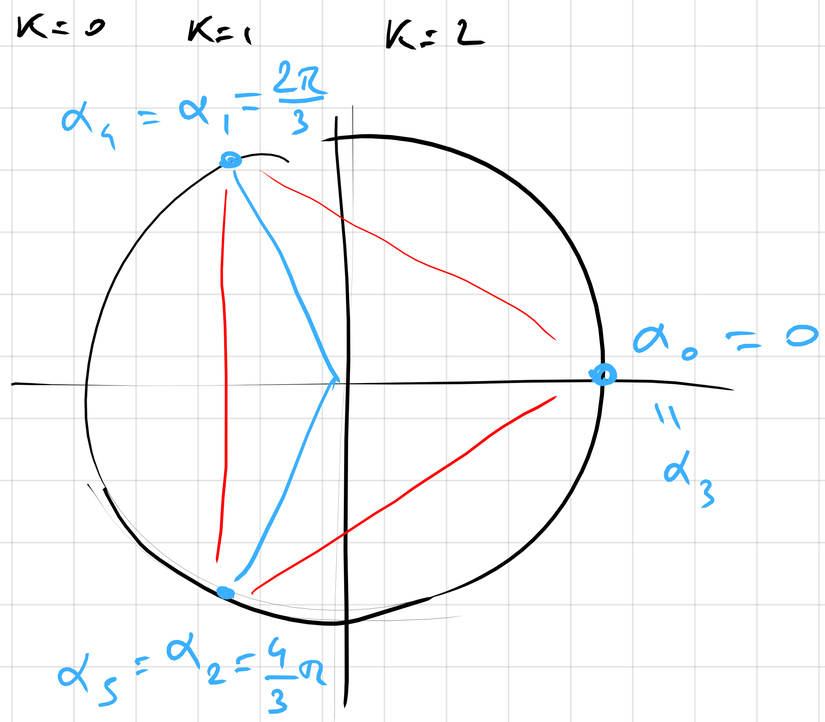
Le soluzioni per $k=0$ e $k=3$ sono la stessa

Analogamente $k=1$, $k=4$ stessa soluzione... etc...

In sostanza ho solo 4 radici n. erano distinte

3 — stesse —

$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$



Le 3 radici sono

$$z_0 = 1 \cdot e^{i0} = 1$$

$$z_1 = 1 \cdot e^{i\frac{2\pi}{3}} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z_2 = 1 \cdot e^{i\frac{4\pi}{3}} = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

<u>Corollario</u> Sia $p(x)$ un polinomio a coeff reali, non costante, si spezza come

$$\boxed{p(x) = q_1(x)\, q_2(x) \cdots q_k(x)\, (x - x_1) \cdots (x - x_h)}$$

dove $q_1(x), \dots, q_k(x)$ sono polinomi di grado 2 a coeff reali con $\Delta < 0$ e $x_1, \dots, x_h$ sono le radici reali di $p(x)$.

<u>dimostrazione</u>

Prima metto in evidenza tutte le radici reali $x_1, \dots, x_h \in \mathbb{R}$ di $p(x)$

$$p(x) = \underbrace{q(x)}_{\in \mathbb{R}[x]} (x - x_1) \cdots (x - x_h)$$

Se $z = a + ib$ è radice di $q(x)$ allora anche

$\bar{z} = a - ib$ è radice di $q(x)$

cioè posso dividere $q(x)$ per $(x-a-ib)(x-a+ib)$

$$q_1(x) = (x-a-ib)(x-a+ib) = (x-(a+ib))(x-(a-ib)) =$$
$$= x^2 - 2ax + (a+ib)(a-ib) =$$
$$= x^2 - 2ax + a^2 + b^2$$

che ha coeff reali con $\Delta < 0$. $\square$

Prop Un polinomio di grado dispari, a coeff reali ha almeno una radice reale.

Provate a svolgere gli esercizi alla fine di cap. 1 di Martelli
1.1, 1.4, 1.8, 1.10, 1.11, 1.12, 1.13, 1.14

2/10/2023

Ricevimento lunedì 14.30 – 16.30
mandate una mail 24 h prima x prenotarvi
(e fare sì che prenoti un'aula adatta)

Esercizi dal cap. 1 del Martelli

ES 1.1 $n \in \mathbb{N}$, $\sqrt{n} \notin \mathbb{Q} \iff n$ non è un quadrato

$\Rightarrow$) Se $n \in \mathbb{N}$ è un quadrato, $n = m^2$, $m \in \mathbb{N}$

$\sqrt{n} = \sqrt{m^2} = m \in \mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$.

$\Leftarrow$) Supponiamo che n non sia un quadrato.

$n = p_1^{e_1} \cdots p_k^{e_k}$ fattorizzazione in fattori primi

esponenti

primi della fattorizzazione

es $12 = 2^2 \cdot 3^1$

poiché n non è $\square$, gli esponenti $e_1, \dots, e_k$ non sono tutti pari. $\boxed{\text{Supponiamo che } e_1 \text{ sia dispari}}$

Se $\sqrt{n} = m \in \mathbb{Q}$ scrivo m come frazione ai minimi termini

$\sqrt{n} = \boxed{m = \frac{c}{d}}$ con $c, d \in \mathbb{N}$ primi tra loro, cioè senza primi in comune.

$m d = c$

$m^2 d^2 = c^2$ ma $m^2 = n$

$\boxed{n d^2} = \boxed{c^2}$ i due membri dell'uguaglianza devono avere la stessa fattorizzazione in fattori primi.

è un quadrato; tutti i primi compaiono con esponente PARI

$\rightarrow$ p_1 compare con esponente α_1 + pari

$\Rightarrow$ p_1 compare con esponente dispari, perché α_1 è dispari.

Contraddizione nata dall'aver assunto $\sqrt{n} = m \in \mathbb{Q}$

e quindi concludo $\sqrt{n} = m \notin \mathbb{Q}$.

Ho fatto vedere che se n non è un quadrato, non è possibile $\sqrt{n} \in \mathbb{Q}$ perché avrei una contraddizione, quindi $\sqrt{n} \notin \mathbb{Q}$.

ES 1.4 X insieme def $\mathcal{P}(X)$ è l'insieme di tutti i sottoinsiemi di X, compreso $\emptyset$, X.

$\mathcal{P}(X)$ è l'insieme delle parti di X.

esempio $X = \{1, 2\}$ 2 elementi

$\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$ $2^2 = 4$ elementi.

Mostriamo che se X ha n elementi, $\mathcal{P}(X)$ ha di 2^n elem.

esempio $X = \{1, 2, 3\}$ 3

$\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$ $8 = 2^3$

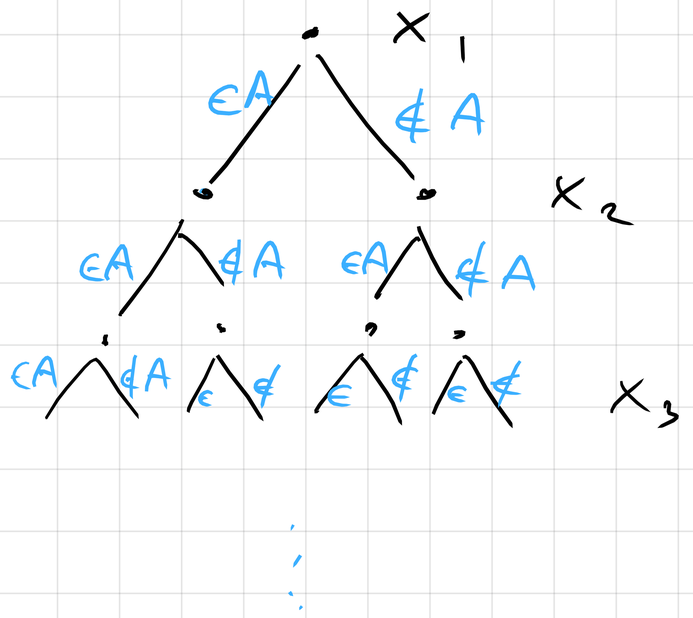
Come posso descrivere gli insiemi che appartengono a $\mathcal{P}(X)$?

Per ogni elemento $x \in X$, posso chiedermi se appartiene o non

appartiene a $A \in \mathcal{P}(X)$.

Fisso $A \in \mathcal{P}(X)$, per ogni $x \in X$ mi chiedo: $x \in A$?

Visto che X ha n elementi ottengo una lista di n risposte, ciascuna ha 2 possibilità.



2

$4 = 2^2$

$8 = 2^3$

x_n $\quad 2^n$

Ho 2^n possibili liste di risposte, una per ciascun sottoinsieme.

ESERCIZIO 1.9 $\quad f: A \to B \quad S, T \subset A$

1) $f(S \cup T) = f(S) \cup f(T)$

2) $f(S \cap T) \underset{*}{\subset} f(S) \cap f(T)$

1) Sia $\boxed{x \in f(S \cup T)} \Rightarrow \exists\, s \in S$ tc $f(s) = x$ oppure

$\exists\, t \in t$ tc $f(t) = x$

Se $\exists s$ come sopra allora $x \in f(S) \Rightarrow x \in f(S) \cup f(T)$

Se $\exists t$ come sopra $\Rightarrow x \in f(T) \Rightarrow x \in f(S) \cup f(T)$

$\Rightarrow \boxed{x \in f(S) \cup f(T)}$

Sia $x \in f(S) \cup f(T) \Rightarrow x \in f(S)$ oppure $x \in f(T)$

$x \in f(S) \Rightarrow \exists\, s \in S$ tc $f(s) = x \Rightarrow x \in f(\underset{\underset{s}{\cup}}{S} \cup T)$

$x \in f(T) \Rightarrow \exists\, t \in T$ tc $f(t) = x \Rightarrow x \in f(S \underset{\underset{t}{\cup}}{\cup} T)$

$\Rightarrow x \in f(S \cup T)$.

2) Sia $\boxed{x \in f(S \cap T)}$ $\Rightarrow \exists\, y \in S \cap T$ tc $f(y) = x$

$y \in S \cap T \Rightarrow y \in S$ e $y \in T$

$$\left.\begin{array}{l} y \in S \Rightarrow x = f(y) \in f(S) \\ y \in T \Rightarrow x = f(y) \in f(T) \end{array}\right\} \Rightarrow x \in f(S) \cap f(T)$$

* Facciamo un esempio con $f(S \cap T) \neq f(S) \cap f(T)$

$$\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R} \qquad S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$$

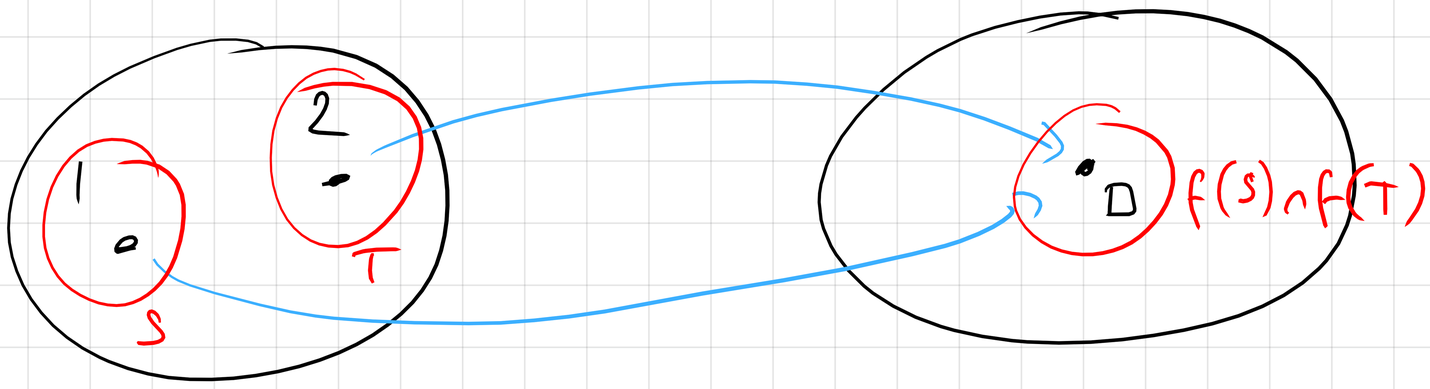
$$x \longmapsto x^2 \qquad T = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$$

$f(S) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$

$f(T) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$

$f(S) \cap f(T) = \mathbb{R}_{>0} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$

$S \cap T = \emptyset \qquad f(S \cap T) = \emptyset$



$S \cap T = \emptyset$

ESERCIZIO f iniettiva $\Rightarrow f(S \cap T) = f(S) \cap f(T)$

5/10/2023

già fatto vedere prima che vale sempre

$$f(S \cap T) \subset f(S) \cap f(T)$$

per cui ci basta mostrare che se f è iniettiva vale

$$f(S \cap T) \supset f(S) \cap f(T)$$

Sia $x \in f(S) \cap f(T)$, cioè $x \in f(S)$ e $x \in f(T)$

e quindi $\exists\, s \in S$ tc $f(s) = x$, $\exists\, t \in T$ tc $f(t) = x$

Poiché f è iniettiva $f(s) = x = f(t) \Rightarrow s = t$ e

dunque $s = t \in S \cap T$, cioè $x \in f(S \cap T)$.

ES 1.11

X insieme finito

$f : X \to X$ iniettiva $\iff$ suriettiva

OSS è fondamentale che X sia finito, altrimenti non sarebbe vero. ES $X = \mathbb{N}$ $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $f(n) = n^2$ è iniettiva, ma non suriettiva.

Se $|X| = n$

- Se f è iniettiva allora $|f(X)| = n$

  Ma $f : X \to X \Rightarrow f(X) \subset X$

  e quindi $f(X) = X \Rightarrow f$ è suriettiva.

- Viceversa se f è suriettiva, $|f(X)| = n$, ma se f non fosse iniettiva $\exists\, x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$, t.c. $f(x_1) = f(x_2)$ $\Rightarrow |f(X)| \leq n-1$, che non è possibile.

  Quindi f deve essere iniettiva.

ES 1.12

Sia $p(x)$ un polinomio $\boxed{p(x) \in \mathbb{R}[x]}$. $p'(x)$ la derivata di $p(x)$.

$$\boxed{\frac{d}{dx} x^n = n x^{n-1}}$$

. Sia a radice di $p(x)$: $p(a) = 0$.

Sia $m \geq 1$ sia la molteplicità di a radice di $p(x)$.

Cioè $p(x) = (x-a)^m q(x)$ con $q(a) \neq 0$.

Se a è radice di $p(x)$, posso dividere $p(x)$ per $x-a$ $p(x) = (x-a)\, s(x)$; se a è radice di $s(x)$, posso dividere ancora: $s(x) = (x-a)\, t(x)$ e quindi $p(x) = (x-a)^2\, t(x)$, etc...

Mostrare che a è radice di $p'(x) \iff m \geq 2$.

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left(\varphi(x) \cdot \psi(x)\right) = \varphi'(x)\psi(x) + \varphi(x)\psi'(x)} \quad \varphi(x), \psi(x) \in \mathbb{R}[x]$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Sia $m \geq 2$, quindi $p(x) = (x-a)^m q(x)$, $m \geq 2$

$$p(x) = (x-a)^2 \underbrace{(x-a)^{m-2} q(x)} = (x-a)^2 \underbrace{r(x)} \qquad r(x) = (x-a)^{m-2} q(x)$$

Calcoliamo la derivata di questo prodotto applicando ⊛

$$p'(x) = \frac{d}{dx}\left[(x-a)^2\right] r(x) + (x-a)^2 r'(x) =$$

$$= 2(x-a)\, r(x) + (x-a)^2 r'(x)$$

$$= \underline{\underline{(x-a)}}\left(2r(x) + (x-a) r'(x)\right)$$

quindi a è radice di $p'(x)$.

$\boxed{\Rightarrow}$ Mostriamo che se $m=1$ allora $p'(a) \neq 0$.

Posso pensare $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ e la fattorizzo completamente:

$$p(x) = c\,(x-a)^1 (x-a_1)^{m_1} \cdots (x-a_k)^{m_k}$$

$a, a_1, \dots, a_k \in \mathbb{C}$ sono le radici di $p(x)$

$a, a_1, \dots, a_k$ tutti diversi tra loro.

$1, m_1, \dots, m_k \in \mathbb{N}$ sono le loro molteplicità.

$$p'(x) = \underbrace{\frac{d}{dx}\left(c(x-a)\right)(x-a_1)^{m_1} \cdots (x-a_k)^{m_k}} +$$

$$+ \underbrace{c\,\underline{\underline{(x-a)}} \cdot \frac{d}{dx}\left[(x-a_1)^{m_1} \cdots (x-a_k)^{m_k}\right]}$$

$= c\,(x-a_1)^{m_1} \cdots (x-a_k)^{m_k}$ calcolato in a è $\neq 0$

$= c\,(x-a)\, q'(x)$ calcolato in a è $= 0$

$p'(a) \neq 0$

Bastava scrivere $p(x) = (x-a)\, q(x)$ $\quad q(a) \neq 0$

$$p'(x) = q(x) + (x-a)\, q'(x)$$

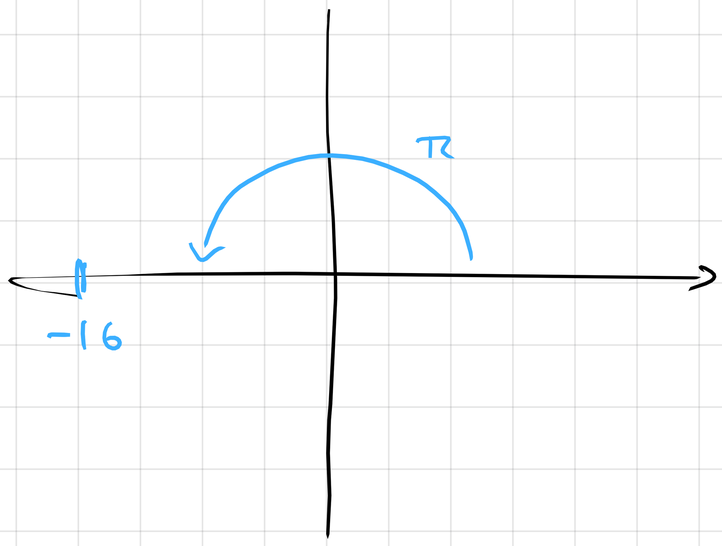
$$p'(a) = q(a) + 0 \neq 0$$

ES 1.13

Trovare tutte le radici di $\boxed{z^4 = -16}$

Scriviamo l'eq. in forma esponenziale

$z = \rho e^{i\theta}$ $\qquad -16 = 16 \cdot e^{i\pi}$



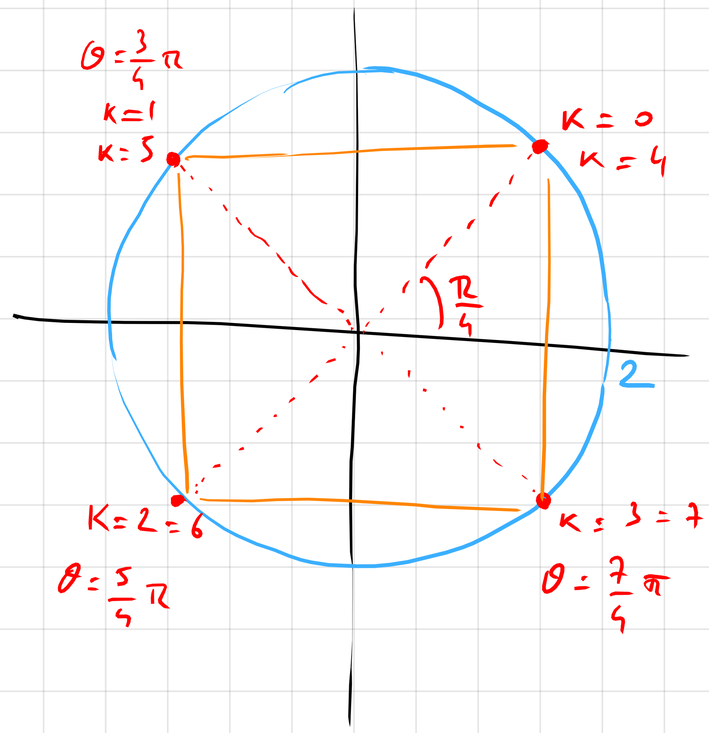
L'equazione diventa

$$(\rho e^{i\theta})^4 = 16 \cdot e^{i\pi}$$

$$\rho^4 e^{i4\theta} = 16 \cdot e^{i\pi}$$

$$\begin{cases} \rho^4 = 16 \\ 4\theta = \pi + 2k\pi \end{cases} \qquad k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} \rho = 2 \\ \theta = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \end{cases} \qquad k \in \mathbb{Z}$$



Le 4 radici trovate sono

$z_0 = 2 \cdot e^{i\frac{\pi}{4}} = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$

$z_1 = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$

$z_2 = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$

$z_3 = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$

ES 1.14 $\qquad z^4 = \bar{z}^3$ $\qquad$ Risolvere in $\mathbb{C}$.

$z = \rho e^{i\theta} \qquad \bar{z} = \rho e^{-i\theta}$

$$\boxed{\rho^4 e^{i4\theta} = \rho^3 e^{-i3\theta}}$$

$$\begin{cases} \rho^3 = \rho^4 \\ 4\theta = -3\theta + 2k\pi \end{cases} \qquad \begin{cases} \rho^3(1-\rho) = 0 \\ 7\theta = 2k\pi \end{cases} \Rightarrow \rho = 0, 1$$

$\theta = \frac{2k\pi}{7} \qquad k \in \mathbb{Z} \qquad \theta = 0, \frac{2\pi}{7}, \frac{4\pi}{7}, \frac{6\pi}{7}, \dots, \frac{12\pi}{7}$

Trovo 8 radici:

$\rho = 0 \Rightarrow z_0 = 0 \qquad \rho = 1 \quad z_1, \dots, z_7$

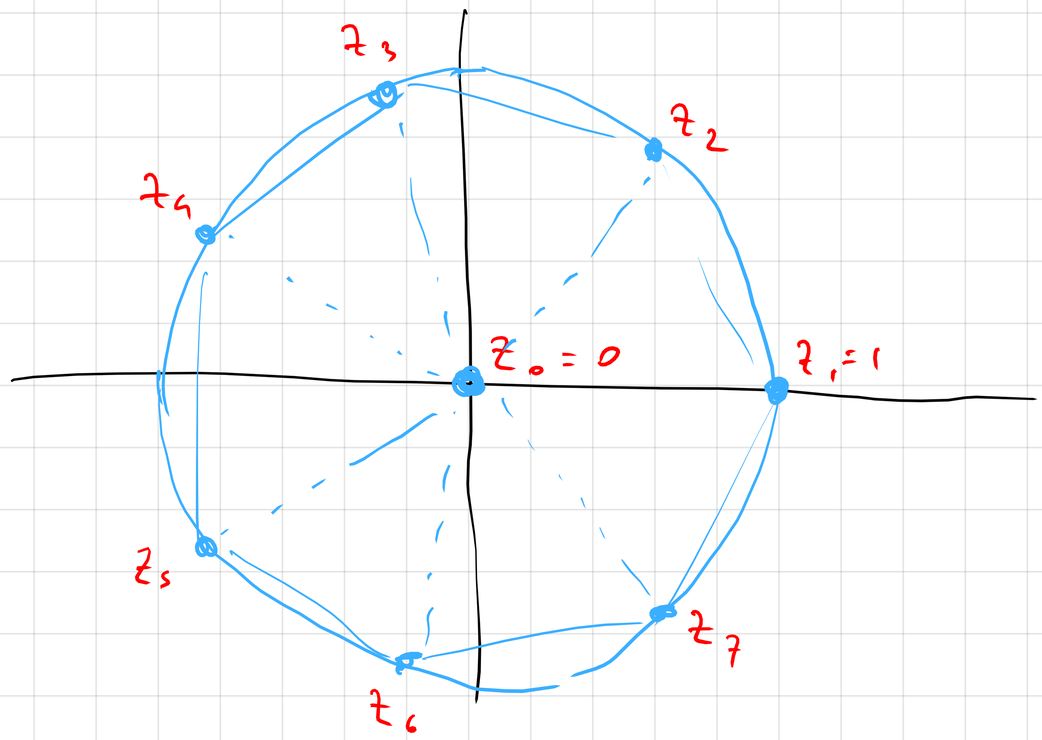
$z_1 = e^0 = 1$

$z_2 = e^{i\frac{2\pi}{7}}$

$z_3 = e^{i\frac{4\pi}{7}}$

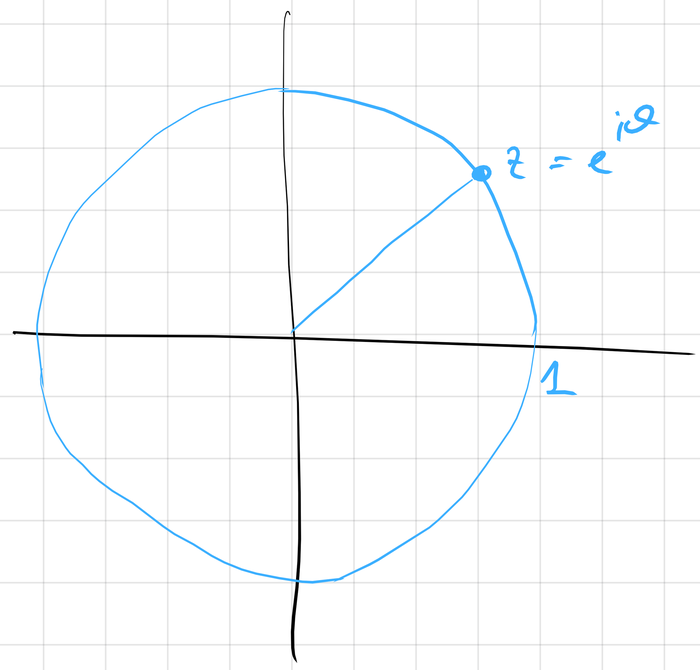
$\dots$

$z_7 = e^{i\frac{12\pi}{7}}$



ES 1.17 Consideriamo

$$S = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \}$$



Mostrare che S è un gruppo (con il prodotto di $\mathbb{C}$).

Chi è l'el. neutro?

$(G, \cdot)$ è gruppo se

1) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

2) $\exists\, e \in G : \quad a \cdot e = e \cdot a = a \qquad \forall a \in G$

3) $\forall a \in G \quad \exists\, b \in G : \quad a \cdot b = e$

Verifichiamo gli assiomi

1) $z_1 = e^{i\theta_1}, \; z_2 = e^{i\theta_2}, \; z_3 = e^{i\theta_3}$

$$\left(e^{i\theta_1} \cdot e^{i\theta_2}\right) \cdot e^{i\theta_3} = e^{i(\theta_1+\theta_2)} \cdot e^{i\theta_3} =$$

$$= e^{i(\theta_1+\theta_2)+i\theta_3} = e^{i(\theta_1+\theta_2+\theta_3)} =$$

$$= e^{i\theta_1 + i(\theta_2+\theta_3)} = e^{i\theta_1} \cdot \left(e^{i\theta_2} \cdot e^{i\theta_3}\right)$$

2) L'elemento neutro è $e^0 = 1$

$$e^0 \cdot e^{i\theta} = e^{i\theta} = e^{i\theta} \cdot e^0$$

3) L'inverso di $z = e^{i\theta}$ è $e^{-i\theta}$

Infatti $e^{i\theta} \cdot e^{-i\theta} = e^{i(\theta-\theta)} = e^0$

<u>oss</u> questo è un grp. commutativo, cioè

4) $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$ infatti $e^{i\theta_1} \cdot e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1+\theta_2)} = e^{i\theta_2} \cdot e^{i\theta_1}$

Esercizi del cap. 2 di Martelli

ES 2.1

Sia V sp vett. su $\mathbb{K}$, X insieme.

$F(X,V) = \{ f : X \to V \}$ tutte le funzioni da X a V

Mostrare che $F(X,V)$ ha una struttura di spazio vettoriale su $\mathbb{K}$.

$f_1 : X \to V$ $\qquad$ $f_2 : X \to V$

$(f_1 + f_2) : X \to V$

$+$ in $F(X,V)$ $\qquad$ $+$ in V

$(f_1 + f_2)(x) := f_1(x) + f_2(x)$ $\leftarrow$ sto definendo l'operazione di $+$ nello spazio vettoriale

$f : X \to V$, $\lambda \in \mathbb{K}$ $\qquad$ il prodotto per scalare in $F(X,V)$

$(\lambda f) : X \to V$ $\qquad$ $(\lambda \cdot f)(x) := \lambda \cdot f(x)$

è prodotto per scalare in V

sto definendo l'operazione di prodotto per scalare in $F(X,V)$

Dovrei verificare tutti gli assiomi...

- chi è lo 0? è la funzione $0 : X \to V$

  t.c. $0(x) := 0 \in V$

Verificate gli assiomi.

Provate a fare 2.2, 2.3.

10/10/2023

ES Risolvere in $\mathbb{R}^3$ $\qquad$ eq. omogenee

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ -x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

$\Big\downarrow$ $\mathrm{II}_2 \to \mathrm{I}_2 + \mathrm{II}_2$.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ -x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

la terza eq. è "ridondante" perché è un multiplo della II. la cancello

pongo $x_3 = t$ e trovo

$$\begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_2 = x_3 \\ x_3 = t \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{matrix} x_1 = t \\ x_2 = t \\ x_3 = t \end{matrix} \qquad t \in \mathbb{R}$$

cioè $$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -37 \\ -37 \\ -37 \end{pmatrix} \qquad s \in \mathbb{R}$$

cioè l'insieme delle soluzioni è $\operatorname{span}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{matrix} x_1 - x_2 = 0 \\ -x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{matrix} \right\} = \operatorname{Span}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \subset \mathbb{R}^3$$

sottospazio vettoriale

ES

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 = 0 \end{cases} \xrightarrow[\text{III} - 3\text{I}]{\text{II} - 2\text{I}} \begin{cases} x_1 = -2x_2 \\ -x_2 = 0 \\ -2x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{matrix}$$

L'insieme delle soluzioni è $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^2$

sottospazio

$(0, 0)$ $\qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\| \qquad \begin{pmatrix} 1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \\ 2x_1 + 3x_2 \\ 3x_1 + 4x_2 \end{pmatrix}$$

ES $\quad x_1 + x_2 + x_3 = 0$

$x_1 = -x_2 - x_3 \qquad$ pongo $x_2 = t \in \mathbb{R}$, $x_3 = s \in \mathbb{R}$

$x_1 = -t - s$

Cioè le soluzioni sono $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \exists\, t, s \in \mathbb{R} : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t-s \\ t \\ s \end{pmatrix} \right\}$

$$\begin{pmatrix} -t-s \\ t \\ s \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Quindi le soluzioni sono $\mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \subset \mathbb{R}^3$

sottospazio

<u>oss</u> $\mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

$$= \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$v = t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \underbrace{(t+s)}_{\text{coeff}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \underbrace{(-s)}_{\text{coeff}}\underbrace{\left[\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right]}_{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

<u>ES</u> dal Martelli:

<u>2.2</u> V, W spazi vettoriali su $\mathbb{K}$

$$V \times W = \{(v,w) \mid v \in V, w \in W\}$$

è sp. vett.

con somma $(v,w) + (v',w') := (v+v', w+w')$

somma in $V \times W$

somma in V

somma in W

e p. per scalare $\lambda \cdot (v,w) := (\lambda v, \lambda w)$ $\lambda \in \mathbb{K}$

p. per scalare in $V \times W$

p. per scalare in V

p. per scalare in W

Verifichiamo (alcuni) assiomi:

- il vettore 0 di $V \times W$ è $(0,0)$

0 di V

0 di W

$$(0,0) + (v,w) = (0+v, 0+w) = (v,w)$$

- $\lambda((v,w) + (v',w')) = \lambda(v,w) + \lambda(v',w')$

vomei

|| def di + in $V \times W$

$$\lambda(v+v', w+w')$$

|| def. p. per sc in $V \times W$

prop. di distributività in V e in W

$$(\lambda(v+v'), \lambda(w+w')) = (\lambda v + \lambda v', \lambda w + \lambda w') =$$

(somma in $V \times W$

$$= (\lambda v, \lambda w) + (\lambda v', \lambda w') =$$

$= \lambda(v,w) + \lambda(v',w')$

2.3 Dati $v_1, \dots, v_k \in V$

$\mathrm{Span}(v_1, \dots, v_k)$ è l'intersezione di tutti i sottospazi di V contenenti $v_1, \dots, v_k$.

Avete dimostrato che $\mathrm{Span}(v_1, \dots, v_k)$ è "il più piccolo sottosp di V che contiene $v_1, \dots, v_k$".

- Se W è sottosp. di V che contiene i vettori $v_1, \dots, v_k$ allora $W \supset \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_k)$

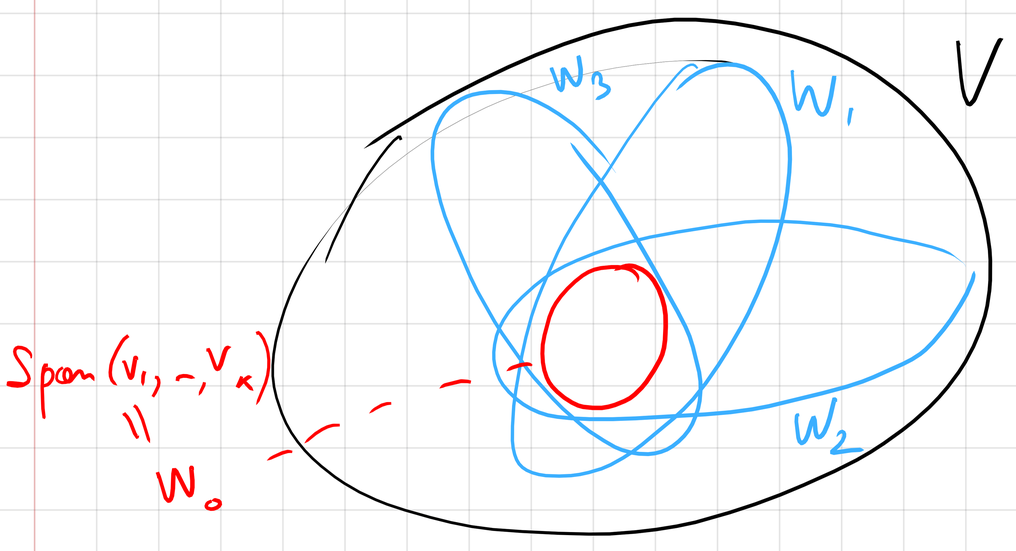
Infatti poiché W è sottosp. di V, prendo somme o moltipl. per scalari dei vettori, ottengo ancora vettori di W.

Quindi se $v \in \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_k)$

$$v = \underbrace{\underbrace{\lambda_1}_{\in W} \underbrace{v_1}_{\in W}}_{\in W} + \dots + \underbrace{\underbrace{\lambda_k}_{\in W} \underbrace{v_k}_{\in W}}_{\in W} \quad \text{per certi } \lambda_1, \dots, \lambda_k \in K$$

$v \in W$ perché è somma di elementi di W.

- Quindi $\mathrm{Span}(v_1, \dots, v_k)$ è un sottospazio di V che è contenuto in tutti i sottospazi di V che contengono $v_1, \dots, v_k$.

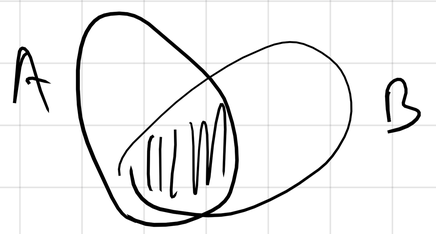


Chi è è l'intersezione di tutti i sottospazi di V contenenti $v_1, \dots, v_k$?

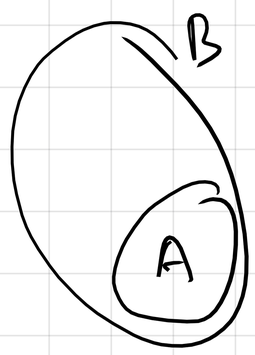
$A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_n$ = { gli elementi a che stanno in tutti i A_i }

Se tra gli insiemi che intersecano c'è un insieme "più piccolo degli altri", allora lui coincide con l'intersezione.

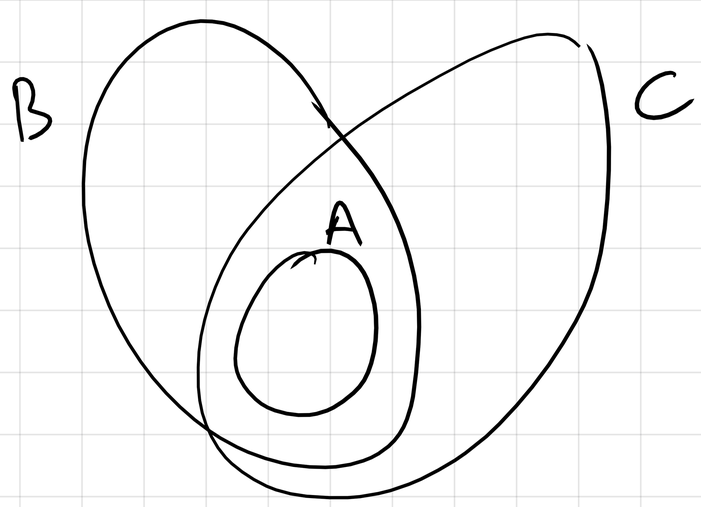
$A \cap B$



$A \cap B = A$
se lo $A \subset B$



A, B, C , $A \subset B$, $A \subset C$



$A \cap B \cap C = A$

ES V sp vett., $U, W \subset V$ sottospazi

(1) $U \cap W$ è sottospazio di V

Sottospazio: se V è sp. vett e $A \subset V$ è sottoinsieme, A è un sottospazio se:

1) $0 \in A$
2) $\forall v, w \in A \quad v + w \in A$
3) $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall v \in A \quad \lambda v \in A$

$0 \in U$ perché è ssp di V, $0 \in W$ perché W è ssp di V

$\Rightarrow 0 \in U \cap W$ (1 ✓)

$v, w \in U \cap W \Rightarrow v \in U, v \in W, w \in U, w \in W$

$v+w \in U \qquad v+w \in W \Rightarrow v+w \in U \cap W$ (2 ✓)

$v \in U \cap W, \lambda \in K \Rightarrow v \in U, v \in W$

$\lambda v \in U$ perchè U è ssp e $\lambda v \in W$ perchè W è ssp.

$\Rightarrow \lambda v \in U \cap W$.

ESEMPIO $V = \mathbb{R}^3$

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x+y+z = 0 \right\}$$

è ssp di $V = \mathbb{R}^3$ (è un piano)

$= \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x-y = 0 \right\}$$

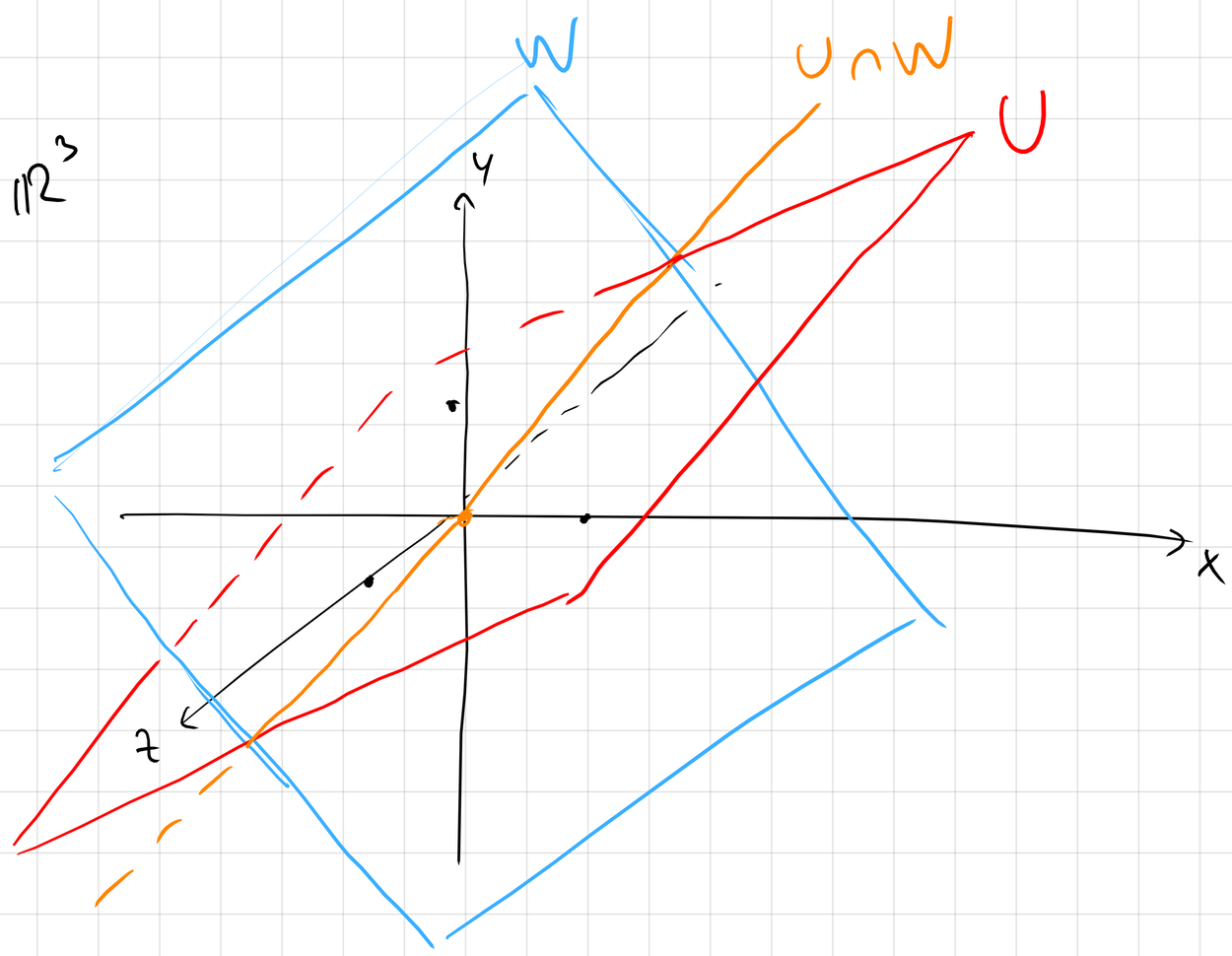
è ssp di $V = \mathbb{R}^3$ (è un piano)

$= \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$

$$U \cap W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{cases} x+y+z = 0 \\ x-y = 0 \end{cases} \right\}$$

è ssp di $V = \mathbb{R}^3$ (è una "retta")

$= \mathrm{Span}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$



ES. 2.5 (1) $U \cap W$ è l'unione di tutti i sottospazi di V contenuti sia in U che in W.

cioè

$U \cap W$ è il più grande sottospazio di V contenuto sia in U che in W.

16/10/2023

ESERCIZIO 2.6

insieme di vettori
- linearmente indipendenti;
- che generano lo spazio considerato.

Determinare una base per i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^3$

1) $U = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0 \}$

2) $W = \{ x - 2y - z = 0 \}$

3) $U \cap W$

4) $U + W$

Soluzione

1) $x + y + z = 0$ pongo $y = s$, $z = t$

$x = -s - t$

Cioè le soluzioni sono vettori $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s-t \\ s \\ t \end{pmatrix} = \underbrace{s\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$

Cioè le soluzioni sono tutti i vettori di

$$\mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = U$$

Sicuramente $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ generano U.

Sono l. i. (linearmente indipendenti)?

$s\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e cerco le soluzioni s, t

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} s(-1) + t(-1) = 0 \\ s \cdot 1 + t \cdot 0 = 0 \\ s \cdot 0 + t \cdot 1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -s - t = 0 \\ s = 0 \\ t = 0 \end{cases}$$

le soluzioni sono solo $(s,t) = (0,0)$

Quindi $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sono l. i.

Quindi $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ è una base di U.

2) $x - 2y - z = 0$

$x = 2y + z \qquad y = s,\ z = t \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

I vettori $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ generano W

vedo che i 2 vettori sono l.i.

$\Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ è base di W.

3) Base di $U \cap W$

$$U \cap W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - 2y - z = 0 \end{cases} \right\}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - 2y - z = 0 \end{cases} \xrightarrow{II - I} \begin{cases} x + y + z = 0 \\ -3y - 2z = 0 \end{cases} \qquad \text{Pongo } z = t$$

$$\begin{cases} x = -y - z = \frac{2}{3}t - t = -\frac{1}{3}t \\ y = -\frac{2}{3}z = -\frac{2}{3}t \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3\ t \\ -2/3\ t \\ t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -1/3 \\ -2/3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{cioè } U \cap W = \mathrm{Span}\begin{pmatrix} -1/3 \\ -2/3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$U \cap W = \mathrm{Span}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Un insieme fatto da un singolo vettore è l.i. se e solo se il vettore è $\neq \underline{0}$.

Quindi $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$ è base di $U \cap W$.

$\dim \mathbb{R}^3 = 3$, $\dim U = 2$, $\dim W = 2$, $\dim U \cap W = 1$

4) $U + W := \{ v \in \boxed{\mathbb{R}^3} \mid \exists\, u \in U, \exists\, w \in W,\ v = u + w \}$

lo sp. vett dove vivono U e W

$$U = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \qquad W = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$U + W = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Sicuramente $\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ generano $U+W$. Sono l.i.?

$$a\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} + d\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Voglio capire se $(a,b,c,d)=(0,0,0,0)$ è l'unica soluzione.
↳ sì ⇒ INDIPENDENTI
↳ NO ⇒ DIPENDENTI.

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} -a - b + 2c + d = 0 \\ a + c = 0 \\ b + d = 0 \end{cases} \xrightarrow{I+II+III} \begin{array}{l} 3c + 2d = 0 \\ a = -c \\ b = -d \end{array} \qquad c = -\frac{2}{3}d$$

Quindi assegnato a d un qualsiasi valore $d = K$

ottengo $c = -\frac{2}{3}K \quad a = \frac{2}{3}K \quad b = -K$

Cioè $(a,b,c,d) = \left(\frac{2}{3}K, -K, -\frac{2}{3}K, K\right) \qquad K \in \mathbb{R}$

Ho infinite soluzioni ⇒ i 4 vettori non sono l.i.

Se pongo $d = -1$

$$-\frac{2}{3}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} + \frac{2}{3}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

cioè

$$-\frac{2}{3}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} + \frac{2}{3}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

Cioè $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ è comb. lineare degli altri 3.

$$U+W = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right) = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}\right)$$

Prop Siano $v_1, \dots, v_n \in V$ t.c.

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0 \qquad \text{con} \qquad \alpha_n \neq 0$$

cioè $v_n = -\frac{\alpha_1}{\alpha_n} v_1 - \dots - \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} v_{n-1}$

Allora $\mathrm{Span}(v_1, \dots, v_n) = \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_{n-1})$

I vettori $\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$ sono l.i.?

$$a\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -a - b + 2c = 0 \\ a + c = 0 \\ b = 0 \end{cases} \xrightarrow{I+II+III} \begin{matrix} 3c = 0 \\ a = -c \\ b = 0 \end{matrix} \qquad c = 0$$

Cioè l'unica soluzione è $(a, b, c) = (0,0,0)$

Quindi $\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$ sono l.i.

Quindi $\left\{\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$ è base di $U+W$.

Dico che $U + W = \mathbb{R}^3$

<u>Prop</u> Se $\dim V = n$ e W è sottospazio di V e $\dim W = n \Rightarrow V = W$.

<u>oss</u> In generale se W è sottospazio di V allora $\dim W \leq \dim V$.

Provate a svolgere gli 2.8 → 2.13 di Martelli (2.15 → 2.17 sono più difficili).

19/10/2023

Sistemi lineari e Algoritmo di Gauss Martelli cap. 3

$x_1, \dots, x_n$ incognite

$\underline{x} = \begin{pmatrix}x_1\\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ incognita

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots a_{kn}x_n = b_k \end{cases}$$

k equazioni, n incognite

è equivalente a:

$$x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{k1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{k2} \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{kn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix} \qquad (*)$$

è equivalente a:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix}$$

prodotto righe per colonne.

$\|$

matrice $k \times n$

k: righe, n: colonne

$$A = (a_{ij})_{\substack{i=1 \dots k \\ j=1 \dots n}} \qquad \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n \qquad \underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^k$$

$$\boxed{A \cdot \underline{x} = \underline{b}}$$

Le entrate della matrice A e del vettore $\underline{b}$ sono i dati che caratterizzano il sistema lineare.

$$C = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} & b_k \end{array}\right) = (A \mid \underline{b})$$

← è matrice $k \times (n+1)$

si chiama matrice "completa" associata al sistema lineare

La matrice A si chiama matrice incompleta associata al sistema lineare.

Mosse di Gauss

(1) Scambiare tra loro due righe $R_i \longleftrightarrow R_j$

(2) Moltiplicare una riga per un $\lambda \neq 0$ $R_i \longrightarrow \lambda R_i \quad \lambda \neq 0$

(3) Aggiungere ad una riga R_i un'altra riga R_j moltiplicata per un $\lambda \neq 0$ $R_i \longrightarrow R_i + \lambda R_j \quad \lambda \neq 0, \ i \neq j$

Posso pensare queste mosse sul sistema lineare o sulla matrice completa. È equivalente.

ESEMPIO

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_1 \leftrightarrow R_3]{(1)} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_1 \to \frac{1}{2} R_1]{(2)} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_2 \to R_2 + 2R_3]{(3)} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Proposizione Le mosse di Gauss su $C = (A \mid \underline{b})$ matrice completa associata a un sistema lineare non cambiano l'insieme delle soluzioni del sistema.

Def Una matrice si dice "a scalini" se ha queste proprietà: per ogni riga il primo termine non zero (pivot) si trova strettamente più a destra del primo termine non zero della riga precedente.

ES

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$ è a scalini

pivot

$$\begin{pmatrix} 7 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ è a scalini

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 5 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$ non è a scalini, $$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$ non è a scalini

Algoritmo di Gauss

Trasformo una qualsiasi matrice C in una matrice a scalini tramite mosse di Gauss.

$C = (c_{ij})$

(1) Se $c_{11} = 0$ allora, se possibile, scambio la prima riga con un'altra riga, la più vicina con $c_{i1} \neq 0$.
Se $c_{i1} = 0 \ \forall i$ passo a (3)

(2) Per ogni riga R_i, $i \geq 2$, se $c_{i1} \neq 0$, sostituisco R_i con $R_i - \frac{c_{i1}}{c_{11}} R_1$

[In questo modo il nuovo 1° coeff. della riga i sarà $\neq 0$.]

(3) Ho ottenuto $c_{i1} = 0 \ \forall i \geq 2$, continuo ripartendo dal punto (1) lavorando sulla sottomatrice ottenuta togliendo la prima colonna e (se $c_{11} \neq 0$) la prima riga.

ESEMPIO

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -3 \\ \boxed{0} & 1 & 1 & 0 \\ \boxed{-1} & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 + R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{3} & 3 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 - 3R_2} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}}$$

è a scalini.

l'algoritmo è finito.

Dalla matrice a scalini alle soluzioni del sistema

ES.1

$$\begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \end{array}\right) \\ \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \end{array} = C = (A \mid \underline{b}) \qquad \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -3 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_3 = -2 \end{cases}$$

Dalla III° eq. ricavo $x_3 := -\frac{2}{3}$

dalla II° eq. ricavo x_2 (in funzione di x_3 che conosco)

$$x_2 := -x_3 = \frac{2}{3}$$

dalla I° eq. ricavo x_1 (in funzione di x_2, x_3 che conosco)

$$x_1 = -3 - x_2 - 2x_3 =$$

$$= -3 - \frac{2}{3} + 2 \cdot \frac{2}{3} = -\frac{7}{3}$$

ES. 2
$$\begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \\ \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \end{array}$$

no pivot

dico che x_3 è variabile libera perchè nella colonna 3 non ci sono pivot.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -3 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

pongo $\boxed{x_3 = t}$ e risolvo

dalla II eq. trovo x_2 in funzione di x_3

$$x_2 = -x_3 = -t$$

dalla I eq. trovo x_1 in funzione di x_2 (che conosco) e di x_3 (definito da un parametro)

$$x_1 = -x_2 - 2x_3 - 3 = t - 2t - 3 = -t - 3$$

ho trovato infinite soluzioni, dipendenti dal parametro t

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t-3 \\ -t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad t \in \mathbb{K}$$

ES. 3
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

c'è un pivot nella colonna dei termini noti

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -3 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ \boxed{\overset{\text{FALSA}}{0 = -2}} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ il sistema non ha NESSUNA SOLUZIONE

<u>Prop</u> Se $C = (A \mid \underline{b})$ è una matrice a scalini associata a un sistema lineare ho le seguenti possibilità:

(1) Se A e C non hanno lo stesso numero di pivot (quindi c'è un pivot nella colonna $\underline{b}$) allora il sistema non ha soluzione.

(2) Se A e C hanno lo stesso numero di pivot (cioè non c'è un pivot nella colonna $\underline{b}$) il sistema ha soluzione. Le soluzioni sono determinate da un numero di parametri pari al numero di colonne di A senza pivot.

<u>OSS</u> Se $\underline{b} = \underline{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ non ci saranno pivot nell'ultima colonna quindi il sistema ha sempre soluzione e l'insieme delle soluzioni è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}^n$ di dimensione pari a $n - \#\{\text{pivot}\}$, cioè pari al numero di parametri liberi.

<u>Teo</u> Se $\underline{v} \in \mathbb{K}^n$ è soluzione di $A\underline{x} = \underline{b}$, con A matrice $k \times n$, $\underline{x} \in \mathbb{K}^n$, $\underline{b} \in \mathbb{K}^k$, allora l'insieme delle soluzioni di

$$A\underline{x} = \underline{b}$$

è l'insieme

$$S = \{\underline{v} + \underline{w} \mid \underline{w} \text{ è qualsiasi sol. di } A\underline{x} = \underline{0}\}$$

cioè $S = \underline{v} + T$

con T il sottospazio delle sol. di $\boxed{A\underline{x} = \underline{0}}$.

sistema omogeneo

- Come stabilisco se $\underline{v} \in \mathrm{Span}(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n)$?

è vero se e solo se

$$\boxed{\underline{v}_1 x_1 + \underline{v}_2 x_2 + \dots + \underline{v}_n x_n = \underline{v}}$$ ha soluzione

<u>Es</u>

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \quad ?$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$ ha soluzione.

- Come stabilisco se $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ sono lin. indipendenti ?

$$\Updownarrow$$

$x_1 \underline{v}_1 + \dots + x_n \underline{v}_n = \underline{0}$ ha solo la soluzione $\underline{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

cioè se $A = \left(\underline{v}_1 \,\middle|\, \dots \,\middle|\, \underline{v}_n \right)$ ridotta a scalini ha

tanti pivot quante sono le colonne.

- Come stabilisco se $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \in \mathbb{K}^m$ sono base di $\mathbb{K}^m$?

$$\Updownarrow$$

il sistema $x_1 \underline{v}_1 + \dots + x_n \underline{v}_n = \underline{b}$

ha sempre un'unica soluzione, per qualsiasi $\underline{b} \in \mathbb{K}^m$

Cioè la matrice

$$A = \left(\underline{v}_1 \,\middle|\, \underline{v}_2 \,\middle|\, \dots \,\middle|\, \underline{v}_n \right)$$ a scalini ha

esattamente tanti pivot quante le colonne (n), e tanti quanti le righe (m), e dunque è necessario che $n = m$.

24/10/2023

Supponiamo che $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m$ siano generatori di $\mathbb{R}^n$

cioè $\mathbb{R}^n = \text{span}(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m)$

Posso estrarre da $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m$ una base di $\mathbb{R}^n$?

es $\underset{\underline{v}_1}{\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}}, \underset{\underline{v}_2}{\begin{pmatrix}3\\3\\6\end{pmatrix}}, \underset{\underline{v}_3}{\begin{pmatrix}2\\2\\4\end{pmatrix}}, \underset{\underline{v}_4}{\begin{pmatrix}5\\1\\6\end{pmatrix}}$ posso estrarre una base di $\mathbb{R}^3$?

$$\begin{pmatrix}2&3&2&5\\1&3&2&1\\2&6&4&6\end{pmatrix} \xrightarrow{I_2 \leftrightarrow II_2} \begin{pmatrix}1&3&2&1\\2&3&2&5\\2&6&4&6\end{pmatrix} \xrightarrow[III_2 \to III_2 - 2I_2]{II_2 \to II_2 - 2I_2} \begin{pmatrix}1&3&2&1\\0&-3&-2&3\\0&0&0&4\end{pmatrix}$$

da questo (un pivot per ogni riga) vedo che $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_4$ generano $\mathbb{R}^3$.

Infatti:

$$x_1 \underline{v}_1 + x_2 \underline{v}_2 + x_3 \underline{v}_3 + x_4 \underline{v}_4 = \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$$ ha sempre soluzione.

Cancello la terza colonna: quella senza pivot:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc}\underline{v}_1 & \underline{v}_2 & \underline{v}_4\end{array} \\ \begin{pmatrix}2&3&5\\1&3&1\\2&6&6\end{pmatrix}\end{array} \xrightarrow{I_2 \leftrightarrow II_2} \begin{pmatrix}1&3&1\\2&3&5\\2&6&6\end{pmatrix} \xrightarrow[III_2 \to III_2 - 2I_2]{II_2 \to II_2 - 2I_2} \begin{pmatrix}1&3&1\\0&-3&3\\0&0&4\end{pmatrix}$$

Ora ho un pivot per ogni riga e uno per ogni colonna: ho una base di $\mathbb{R}^3$.

Quindi i vettori associati alle colonne con pivot sono una base:

$\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_4$ sono base di $\mathbb{R}^3$.

Quindi $\underline{v}_3 \in \text{Span}(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_4)$ è dipendente da $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_4$

cioè $\exists\ a, b, c$ t.c.

$$a\underline{v}_1 + b\underline{v}_2 + c\underline{v}_4 = \underline{v}_3$$

ovvero $$a\underline{v}_1 + b\underline{v}_2 + c\underline{v}_4 - \underline{v}_3 = 0$$

OSS Le operazioni di riga non cambiano l'insieme S delle soluzioni di un sistema lineare.

OSS Dati $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m \in \mathbb{R}^n$

$$A = \left[\underline{v}_1 \,\middle|\, \underline{v}_2 \,\middle|\, \dots \,\middle|\, \underline{v}_m \right]$$

Le operazioni di riga su A in genere cambieranno l'insieme $W = \mathrm{Span}(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m)$

ES $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\qquad \underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow{\text{op. di riga}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\mathrm{Span}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \neq \mathrm{Span}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

- Con le operazioni di riga posso trovare le "coordinate di un vettore".

Def Sia $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ una base di V. Sia $\underline{v} \in V$. Le coordinate di $\underline{v}$ rispetto a $\mathcal{B}$ sono i coefficienti $\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ t.c.

$$[\underline{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$\underline{v} = x_1 \underline{v}_1 + x_2 \cdot \underline{v}_2 + \dots + x_n \cdot \underline{v}_n$$

- Posso trovare le coordinate di $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$ con operazioni di riga.

ES 2.14 di Martelli

Coordinate di $\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ①, $\underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ②, $\underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$ rispetto alla base $\mathcal{B} = \left\{ f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, f_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ di $\mathbb{R}^2$.

① $x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{II_2 \to II_2 - 2 I_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$3x_2 = -2$ $\quad \boxed{x_2 = -\frac{2}{3}}$ $\qquad x_1 - x_2 = 1$ $\quad \boxed{x_1 = \frac{1}{3}}$

$$[\underline{v}_1]_B = \begin{pmatrix} 1/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}$$ verifico: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \overset{?}{=} \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{2}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ✓

② $x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{II_2 \to II_2 - 2 I_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$x_2 = \frac{1}{3}$ $\qquad$ $x_1 = x_2 = \frac{1}{3}$

$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ✓

- Completare $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m \in \mathbb{R}^n$ a base.

Le operazioni di riga non vanno più bene, facciamo operazioni di colonne.

- Scambio tra loro due colonne.
- Prendo una colonna C_i e la moltiplico per $\lambda \neq 0$
- Al posto della i-esima colonna C_i scrivo $C_i + \lambda C_j$, con C_j j-esima colonna $j \neq i$

Fatto Dati $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m \in \mathbb{R}^n$

$$A = \left(\underline{v}_1 \,\middle|\, \underline{v}_2 \,\middle|\, \dots \,\middle|\, \underline{v}_m \right)$$

fare delle operazioni di colonne su A non cambia l'insieme $W = \mathrm{Span}(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n)$, cioè non cambia lo Span delle colonne di A.

oss se devo risolvere

⊛ $x_1 \underline{v}_1 + \dots + x_m \underline{v}_m = \underline{v}$ e scrivo

$A = \left(\underline{v}_1 \,\middle|\, \dots \,\middle|\, \underline{v}_m \right)$ $\qquad$ $(A \mid \underline{v}) = \left(\underline{v}_1 \,\middle|\, \dots \,\middle|\, \underline{v}_m \,\middle|\, \underline{v} \right)$

fare operazioni di colonne su A cambia l'insieme

S delle soluzioni di ⊛, ma non cambia il fatto che questo insieme sia o non sia vuoto.

ES. 2.9 da Martelli

Dati $\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ completare a base di $\mathbb{R}^4$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \xleftrightarrow{\text{traspongo}} A^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$a_{ij} \leftrightarrow a_{ji}$

$$A' = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & \boxed{1} & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} \underline{v}_1 & \underline{v}_2 & \underline{v}_3 & \underline{v}_4 \end{matrix} \end{array}$$

il sistema

$$x_1 \underline{v}_1 + x_2 \underline{v}_2 + x_3 \underline{v}_3 + x_4 \underline{v}_4 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

ha sempre esattamente una soluzione.

cioè $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4\}$ è base di $\mathbb{R}^4$.

Variazione 1

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{II_c \to II_c - I_c} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \\ -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{aggiungo } \underline{e}_3, \underline{e}_4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

aggiunti

La base "completata" è:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Variazione 2

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{II_c \to II_c - I_c} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{aggiungo } \underline{e}_2, \underline{e}_4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

base "completata" è

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

ESEMPI / ESERCIZI

2.8 da Martelli

Base di $W = \{ x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0 \} \subset \mathbb{R}^n$

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}}_{n \text{ colonne}}$$

$t_2, \dots, t_n$ parametri liberi

$x_2 = t_2, \quad x_3 = t_3, \dots, x_n = t_n$

$x_1 = -t_2 - t_3 - \dots - t_n$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = t_2 \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{\underline{v}_2} + t_3 \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{\underline{v}_3} + t_4 \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{\underline{v}_4} + \dots + t_n \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\underline{v}_4} = \begin{pmatrix} -t_2 - t_3 - \dots - t_n \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix}$$

Le soluzioni sono

$$\mathrm{Span}\left(\underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{\underline{v}_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{\underline{v}_3}, \dots, \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\underline{v}_n} \right)$$

Sono l.i.? Sì perché

$$\begin{pmatrix} -t_2 - t_3 - \dots - t_n \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix} = \underline{0} \iff t_2 = \dots = t_n = 0$$

- 2.12 di Martelli

Completare a base di $\mathbb{C}_3[x]$

$x + i \quad , \quad x^2 - ix$

$\mathbb{C}_3[x] \ni p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$

$a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{C}$

Una base di $\mathbb{C}_3[x]$ è $\{1, x, x^2, x^3\} = \mathcal{B}$

$p(x)$ ha coordinate rispetto a $\mathcal{B}$

$$[p(x)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^4$$

Il problema si traduce in:

Completare a base di $\mathbb{C}^4$

$$\begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Completo $\begin{bmatrix} i & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ cioè ho aggiunto $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Torno indietro in $\mathbb{C}_3[x]$

ho aggiunto

x^2, x^3

La base completata è

$\{x + i, x^2 - ix, x^2, x^3\}$

30/10/2023

AVVISI:

- Iscrizione al I° compitino di lunedì prossimo:

AA	CdS	Insegnamento	Codice	CFU	Docente	Moduli	
2022/23	INGEGNERIA BIOMEDICA (Triennale)	ALGEBRA LINEARE E ANALISI MATEMATICA II	519AA	12	ALDO PRATELLI	ALGEBRA LINEARE	ALESSANDRO IRACI
						ANALISI MATEMATICA II	ALDO PRATELLI

Tipo	Data e ora	Sede	Note	Iscritti	Vecchio ord.	Iscrizioni	
scritto (ITI)	06-11-2023 09:30	Aula B21	prima prova in itinere	130		Inizio iscrizioni: 19-10-2023 00:00 Termine iscrizioni: 02-11-2023 23:59	Iscriviti

- Simulazione di compitino: oggi a tutorato in A21 dalle 17 alle 19.
- Giovedì 2/11/2023: esercizi tipo compitino.

ESERCIZI

2.17 da Martelli

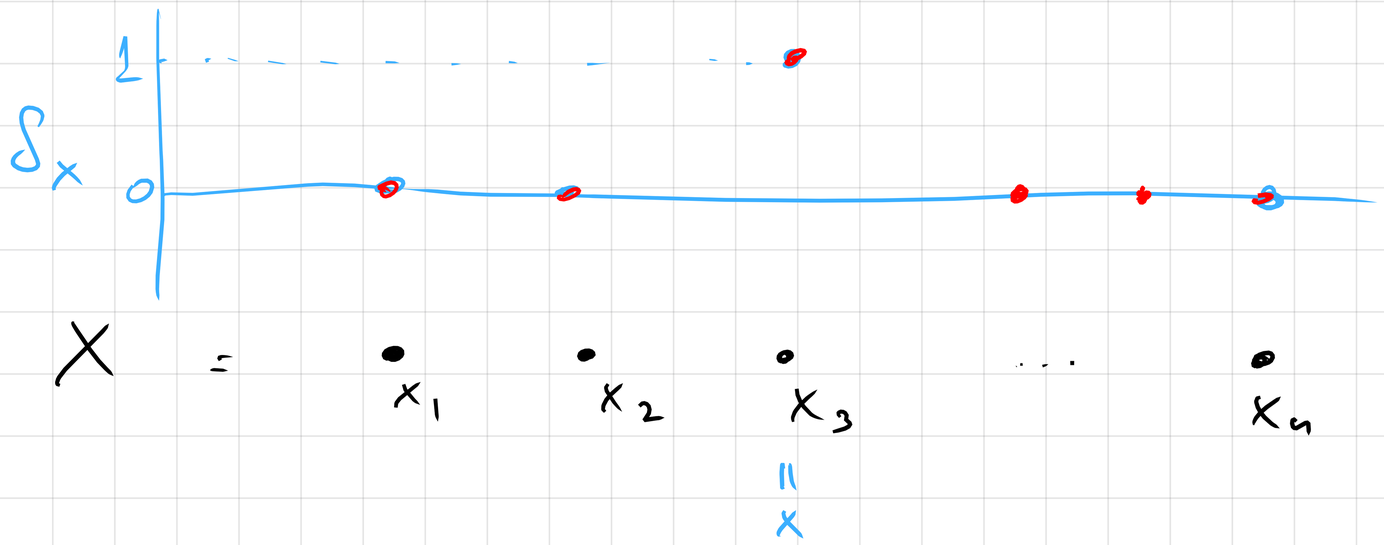
X insieme finito di n elementi.

Per ogni $x \in X$ $\quad \delta_x : X \to \mathbb{K}$

$$\delta_x(y) := \begin{cases} 1 & \text{se } y = x \\ 0 & \text{se } y \neq x \end{cases}$$

mostrare che $\{\delta_x, x \in X\}$ è base di $F(X, \mathbb{K})$

e quindi $\dim F(X, \mathbb{K}) = n$.



Le δ_x GENERANO

Sia $f : X \to \mathbb{K}$ cioè $f \in F(X; \mathbb{K})$

considero f e $\sum_{x \in X} f(x)\, \delta_x$

Dico che sono lo stesso elemento di $F(X, \mathbb{K})$

Infatti preso un qualsiasi $y \in X$

$$f(y) \overset{?}{=} \left(\sum_{x \in X} f(x)\, \delta_x \right)(y)$$

$$\left(\sum_{x\in X} f(x)\,\delta_x\right)(y) = \sum_{x\in X} f(x)\underbrace{\delta_x(y)}_{=\begin{cases}0 & \text{se } x\neq y\\ 1 & \text{se } x=y\end{cases}} = f(y)\cdot\underbrace{\delta_y(y)}_{=1} = f(y)$$

e quindi $\{\delta_x, x\in X\}$ generano $F(X,\mathbb{K})$ ✓

LINEARE INDIP.

Considero

$$\sum_{x\in X} a_x\,\delta_x = 0 \qquad a_x\in\mathbb{K}$$

cioè $\forall y\in X$ $\quad \sum_{x\in X} a_x\underbrace{\delta_x(y)}_{=\begin{cases}0 & x\neq y\\ 1 & x=y\end{cases}} = 0$

cioè $a_y\,\delta_y(y) = 0$ cioè $a_y = 0$ $\forall y\in X$

cioè tutti i coefficienti della combinazione lineare sono nulli. ✓

OSS $F(X,\mathbb{K}) \simeq \mathbb{R}^n$ se $|X| = n$

ES 5.9 (del gruppo 4)

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\\1\end{pmatrix} \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\k\end{pmatrix} \quad \underline{v}_3 = \begin{pmatrix}-1\\2\\-3\\0\\0\end{pmatrix} \quad \text{in } \mathbb{R}^5$$

per quali $k\in\mathbb{R}$ sono lin. dip.?

Cioè quando $\boxed{a\underline{v}_1 + b\underline{v}_2 + c\underline{v}_3 = \underline{0}}$ ha sol. non banali?

$$\begin{bmatrix}0&1&-1\\1&0&2\\-1&1&-3\\0&0&0\\1&k&0\end{bmatrix} \xrightarrow{I\leftrightarrow II} \begin{bmatrix}1&0&2\\0&1&-1\\-1&1&-3\\0&0&0\\1&k&0\end{bmatrix} \xrightarrow[V\to V-I]{III\to III+I} \begin{bmatrix}1&0&2\\0&1&-1\\0&1&-1\\0&0&0\\0&k&-2\end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow[V\to V-kII]{III\to III-II} \begin{bmatrix}1&0&2\\0&1&-1\\0&0&0\\0&0&0\\0&0&k-2\end{bmatrix} \xrightarrow{III\leftrightarrow V} \begin{bmatrix}1&0&2\\0&1&-1\\0&0&k-2\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix} ?$$

Se $k = 2$ la matrice ha 2 pivot ma 3 incognite $\Rightarrow$

$\exists$ sol. non banali $\Rightarrow$ $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ sono lin. dipendenti.

Se $k \neq 2$ ho 3 pivot, 3 incognite $\Rightarrow$ unica sol. $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ sono lin. indip.

Per $k=2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & k-2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \end{bmatrix}$$

libero

$$\begin{cases} a + 2c = 0 \\ b - c = 0 \end{cases}$$

cioè

$$a = -2c$$
$$b = c$$

Una generica sol. è del tipo: $\begin{pmatrix} -2c \\ c \\ c \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

quindi le sol. non banali sono i multipli di $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

e quindi per $k=2$

$$-2\underline{v}_1 + \underline{v}_2 + \underline{v}_3 = \underline{0}$$

$$\boxed{\underline{v}_1 = \frac{1}{2}\underline{v}_2 + \frac{1}{2}\underline{v}_3}$$

$$\underline{v}_2 = 2\underline{v}_1 - \underline{v}_3$$

$$\underline{v}_3 = 2\underline{v}_1 - \underline{v}_2$$

ES. 5.10 del gruppo 4

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \underline{v}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$\underline{v}_4$ è combin. lineare di $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$

$$\boxed{a\underline{v}_1 + b\underline{v}_2 + c\underline{v}_3 = \underline{v}_4}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 5 & 10 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{III} \to \text{III} - 2\text{I}]{\text{II} \to \text{II} - \text{I}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{III} \to \text{III} - \text{II}}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 8 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a + 2b - c = 1 \\ 2b + 3c = 0 \\ 4c = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 - 2b + c = 9 \\ b = -3 \\ c = 2 \end{cases}$$

$$\underline{v}_4 = 9\,\underline{v}_1 - 3\,\underline{v}_2 + 2\,\underline{v}_3$$

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \underline{v}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix}$$

VERIFICA
$$\begin{cases} 9 - 6 - 2 = 1 & \checkmark \\ 9 - 12 + 4 = 1 & \checkmark \\ \dots \end{cases}$$

ES 5.15 dal gruppo 4

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ k & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & k \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} k & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

per quali k sono l.i.?

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{21} \\ a_{22} \end{bmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & k \\ 0 & k & 1 \\ k & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & k \\ k & 0 & 1 \\ -2 & k & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{III} \to \text{III} + 2\text{I}]{\text{II} \to \text{II} - k\text{I}}$$

scambiamo A e B

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & 0 & 1-k^2 \\ 0 & k & -1+2k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{II} \leftrightarrow \text{III}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & k & -1+2k \\ 0 & 0 & 1-k^2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Se $k \neq 0$ $\quad$ $\text{III} \leftrightarrow \text{IV}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & k & -1+2k \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1-k^2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{IV} \to \text{IV} - (1-k^2)\text{III}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & k & -1+2k \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

l.i.

Se $k = 0$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{IV} \to \text{IV} + \text{II}]{\text{III} \to \text{III} + \text{II}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

l. dip.

infatti per $k = 0$ $A = 0$

In preparazione al I compitino:

Provate a svolgere i rimanenti esercizi del capitolo 2 del Martelli e gli esercizi 3.1, 3.2, 3.4, 3.6, 3.7, 3.8

2/11/2023 Esercizi per I° compitino

ESERCIZIO

- Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione la cui matrice rispetto alle basi canoniche è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

a) trovare una base di $\operatorname{Ker} f = \{ \underline{v} \in \mathbb{R}^4 \mid f(\underline{v}) = \underline{0} \}$

b) trovare una base di $\operatorname{Im} f = \{ f(\underline{v}), \underline{v} \in \mathbb{R}^4 \}$

c) calcolare la dimensione di $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f$

a) devo trovare le soluzioni di

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Mettiamo A a scala tramite op. di riga

$$A \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & -6 & -3 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{IV} \to \frac{1}{2}\text{IV}]{\text{II}_2 \to \frac{1}{2}\text{II}_2,\ \text{III}_2 \to -\frac{1}{3}\text{III}_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{Ker} f = \left\{ \text{l'insieme delle soluzioni di } \begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \right\}$$

x_3 x_4

giunti a questa forma scopriamo che I_c, II_c sono l.i., III_c, IV sono dip. da I_c e II_c. Quindi I_c e II_c sono base di $\operatorname{Im} f$.

$\dim \operatorname{Ker} f = 2$

base di $\operatorname{Ker} f$: $\left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\underline{v}_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\underline{v}_2} \right\}$

(se una soluzione generica è determinata dai parametri x_3, x_4, ho

$$x_2 = -2x_3 - x_4$$

$$x_1 = -x_2 - 3x_3 - 3x_4 = -x_3 - 2x_4$$

quindi se $x_3 = 1$, $x_4 = 0 \Rightarrow x_1 = -1$, $x_2 = -2$

se $x_3 = 0$, $x_4 = 1 \Rightarrow x_1 = -2$, $x_2 = -1$)

b)

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} =$$

$$= x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

cioè $\operatorname{Im} f = \operatorname{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

Faccio operazioni di colonna su A

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & \boxed{4} & \boxed{2} \\ 1 & -3 & -6 & -3 \\ -1 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{IV}_c \to \text{IV} - \text{II}_c]{\text{III}_c \to \text{III}_c - 2\,\text{II}_c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Base $\operatorname{Im} f = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ oppure $\left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\underline{v}_3}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\underline{v}_4} \right\}$

c) calcolare dim $\underset{2}{\mathrm{Im} f} \cap \underset{2}{\mathrm{Ker} f} = \begin{cases} 0 \\ 1 \\ 2 \end{cases}$ $\qquad \dim \mathrm{Ker} + \mathrm{Im} = \begin{cases} 2 \\ 3 \\ 4 \end{cases}$

Ho 2 strade:

① Prendo eq. Ker f
Prendo eq Im f } → metto tutto a sistema e calcolo dim. soluzioni

② Prendo base Ker f
Prendo base Im f } unisco → con riduzione per colonne ho generatori di Im f + Ker f

con Grassmann calcolo dim (Im f ∩ Ker f).

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{IV}_c \to \text{IV}_c + \text{I}_c]{\substack{\text{II}_c \to \text{II}_c - 2\text{I}_c \\ \text{III}_c \to \text{III}_c + \text{I}_c}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & -3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{IV}_c \to 3\text{IV}_c + \text{II}_c]{\text{III}_c \to \text{III}_c + \text{II}_c}$$

$\underline{v}_1 \quad \underline{v}_2 \quad \underline{v}_3 \quad \underline{v}_4$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{III}_c \leftrightarrow \text{IV}_c} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \dim(\mathrm{Im} f + \mathrm{Ker} f) = 3$

$\Rightarrow \dim(\mathrm{Im} f \cap \mathrm{Ker} f) = 2 + 2 - 3 = 1$

Possibili osservazioni utili

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{I}} \text{III}_c = \text{I}_c - \text{II}_c \quad \begin{pmatrix} -1 & -2 & \cancel{1} & 1 \\ -2 & -1 & \cancel{-1} & 1 \\ \boxed{1 \quad 0} & & \cancel{1} & \boxed{-2} \\ \boxed{0 \quad 1} & & \cancel{-1} & \boxed{1} \end{pmatrix} \longrightarrow$$

posso eliminare III_c perché c. lin. di I_c e II_c.

Vedo se IV_c è c. lin. di I_c e II_c

$\text{IV}_c = \alpha\, \text{I}_c + \beta\, \text{II}_c$?

coeff $x_3 \Rightarrow \alpha = -2$

$\beta = 1$

$$-2 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \overset{?}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \neq$$

ESERCIZIO

$$V_1 = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 11 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

a) $\boxed{\dim V_1 = ?}$

$$V_2 = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$$

b) $\boxed{\dim V_2 = ?}$

c) dire se $\boxed{V_1 \cap V_2 = \{\underline{0}\}}$ e $\boxed{V_1 + V_2 = \mathbb{R}^4}$

a) Scrivo la matrice che ha per colonne i vettori di V_1.
Riduco a scalini (per riga o per colonne), conto i pivot. # pivot = RK matrice = $\dim V_1$.

$\rightsquigarrow$ $\underline{\dim V_1 = 2}$

mi annoto chi è base di V_1.

- se avevo ridotto per righe prendo le colonne della matrice iniziale corrisp ai pivot.
- se ho ridotto per colonne prendo le colonne non nulle della matrice finale

b) idem a punto a).

$\rightsquigarrow$ $\underline{\dim V_2 = 2}$

mi annoto base V_2.

c) unisco le basi di V_1 e V_2. ottengo una matrice 4×4 (le colonne generano $V_1 + V_2$).
Voglio calcolare $\dim(V_1 + V_2)$ quindi riduco a scala la matrice (x righe o x colonne) e conto i pivot

pivot = RK matrice = $\underline{\dim(V_1 + V_2)}$.

$\hookrightarrow$ se è 4 $\Leftrightarrow V_1 + V_2 = \mathbb{R}^4$

Uso Grassmann: ottengo

$$\underbrace{\dim(V_1 \cap V_2)}_{0} = \underbrace{\dim V_1}_{2} + \underbrace{\dim V_2}_{2} - \underbrace{\dim(V_1 + V_2)}_{4}$$

se è 0 $\Leftrightarrow V_1 \cap V_2 = \{\underline{0}\}$

ESERCIZIO

$$V = \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$$

Dire se i seguenti sono sottospazi di V:

a) $W_1 = \{ p(x) \in V : p'(2) = 0 \}$ sì

$p'(2) = 0, \quad q'(2) = 0$

$(\lambda p + \gamma q)'(2) = \lambda p'(2) + \gamma q'(2) = 0$

b) $W_2 = \{ p(x) \in V : p'(0) = 2 \}$

- no perché $0 \notin V$
- no perché non è chiuso per somma.

c) $W_3 = \{ p(x) \in V : p(x+1) + p(x-1) = 2\, p(x) \}$ sì

$p(x), \; q(x) \in W_3$

$h(x) = \lambda p(x) + \mu q(x)$

$h(x+1) = \lambda p(x+1) + \mu q(x+1)$

$h(x-1) = \lambda p(x-1) + \mu q(x-1)$

$$h(x+1) + h(x-1) = \lambda \underbrace{\left(p(x+1) + p(x-1) \right)}_{= 2p(x)} + \mu \underbrace{\left(q(x+1) + q(x-1) \right)}_{= 2q(x)}$$

$$= 2\lambda p(x) + 2\mu q(x) = 2\, h(x)$$

$\Rightarrow h(x) \in W_3$

d) $W_4 = \{ p(x) \in V : \underbrace{p(0)^2 + p'(0)^2 = 0}_{\text{è equivalente a}} \}$

$p(0) = 0$

$p'(0) = 0$

Sì è sottospazio.

9/11/2023

Applicazioni Lineari Martelli 4.2.3

Teorema della dimensione

$f: V \to W$ appl. lineare. Se $\dim V = n$ finito, allora

$$\boxed{\dim \operatorname{Im} f + \dim \operatorname{Ker} f = n.}$$

ESEMPIO A matrice 2×2 $L_A : \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^2$ ($\mathbb{K}^2 = V$, $\mathbb{K}^2 = W$)

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\dim V = 2$

$$2 = \dim \operatorname{Ker} L_A + \dim \operatorname{Im} L_A$$

$$2 = \boxed{0} + 2$$

$$= 1 + 1$$

$$= \boxed{2} + 0$$

3 possibili casi.

$\dim \operatorname{Ker} L_A = 0$

$\Rightarrow \operatorname{Ker} L_A = \{\underline{0}\} \Rightarrow L_A$ è iniettiva.

$\operatorname{Ker} L_A = V$ cioè L_A manda tutto a $\underline{0}$.

$\dim \operatorname{Im} L_A = \dim W$

$\Rightarrow \operatorname{Im} L_A = W$

cioè L_A è suriettiva.

ES Nell'esempio sopra, se $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\operatorname{Im} L_A = \operatorname{Span}(A^1, A^2) = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

$\hookrightarrow$ lo Span delle colonne di A

$\Rightarrow \dim \operatorname{Im} L_A = 1$. Segue che $\dim \operatorname{Ker} L_A = 1$, infatti

$$\operatorname{Ker} L_A = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^2 \;\middle|\; \underline{A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^2 \;\middle|\; y = 0 \right\} = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

cioè $\begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

cioè $y = 0$

il fatto che $\operatorname{Im} L_A = \operatorname{Ker} L_A$ è solo una coincidenza

Corollario $f: V \to W$ lineare. Allora $\dim \operatorname{Im} f \leq \dim V$. Inoltre

(1) f è iniettiva sse $\dim \operatorname{Im} f = \dim V$

(2) f è suriettiva sse $\dim \operatorname{Im} f = \dim W$

ES $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ può essere suriettiva? NO perché

$\dim \operatorname{Im} f \leq 2 = \dim V < \dim W = 3$

ES $f: \overset{V}{\mathbb{R}^4} \longrightarrow \overset{W}{\mathbb{R}^2}$ può essere iniettiva? NO perché

$\dim \operatorname{Im} f \leq 2 \Rightarrow \dim \operatorname{Ker} f \geq 4 - 2 = 2$

e quindi f non è iniettiva.

	$\dim V$	$=$	$\dim \operatorname{Ker} f$	$+$	$\dim \operatorname{Im} f$
	4	=	4	+	0
	4	=	3	+	1
	4	=	2	+	2
NO	4	=	1	+	~~3~~
NO	4	=	0	+	~~4~~

Se $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ è base di V, $f: V \longrightarrow W$

allora $\operatorname{Im} f = \operatorname{Span}\{f(\underline{v}_1), \dots, f(\underline{v}_n)\}$

infatti se $\underline{v} = \lambda_1 \underline{v}_1 + \dots + \lambda_n \underline{v}_n$

$$f(\underline{v}) = f(\lambda_1 \underline{v}_1 + \dots + \lambda_n \underline{v}_n) = \lambda_1 f(\underline{v}_1) + \dots + \lambda_n f(\underline{v}_n)$$

Corollario Sia $f: V \longrightarrow W$ lineare, $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ è base di V.

Allora valgono:

(1) f iniettiva $\Longleftrightarrow$ $f(\underline{v}_1), \dots, f(\underline{v}_n)$ sono l. indip.

(2) f suriettiva $\Longleftrightarrow$ $f(\underline{v}_1), \dots, f(\underline{v}_n)$ generano W.

ES $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ $\qquad L_A: \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$

$\dim \operatorname{Im} L_A = \operatorname{rk} A$

- L_A iniettiva sse $\operatorname{rk} A = n$ ← cioè a scala ho 1 pivot per ogni colonna, quindi NO parametri liberi $\Rightarrow$ sol.! (se $\exists$)
- L_A suriettiva sse $\operatorname{rk} A = m$ ← cioè a scala ho un pivot per ogni riga, quindi $A\underline{x} = \underline{b}$ ha sempre sol.

Martelli 4.2.4

Avete già visto: $A \in M_{k \times m}(\mathbb{K})$, $B \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$

$L_A: \mathbb{K}^m \longrightarrow \mathbb{K}^k$ $\qquad L_B: \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$

$L_A \circ L_B: \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^k$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{K}^n \arrow[r, "L_B"] \arrow[rr, bend right, "L_{AB}"'] & \mathbb{K}^m \arrow[r, "L_A"] & \mathbb{K}^k \end{tikzcd}$$

$\underline{x} \longmapsto B\underline{x} \longmapsto A(B\underline{x})$

$L_A \circ L_B = L_{AB}$

Isomorfismi (Martelli 4.2.5)

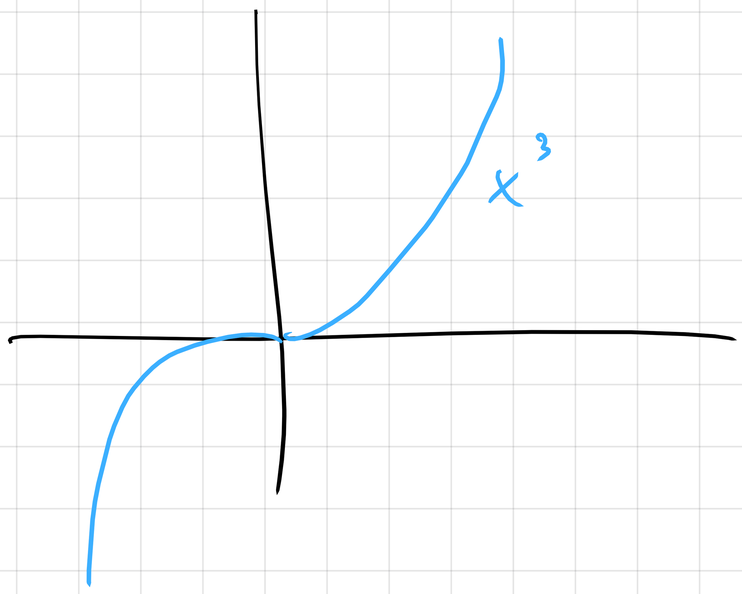
Def $f: V \to W$ lineare è **isomorfismo** se è bigettiva, cioè iniettiva e suriettiva.

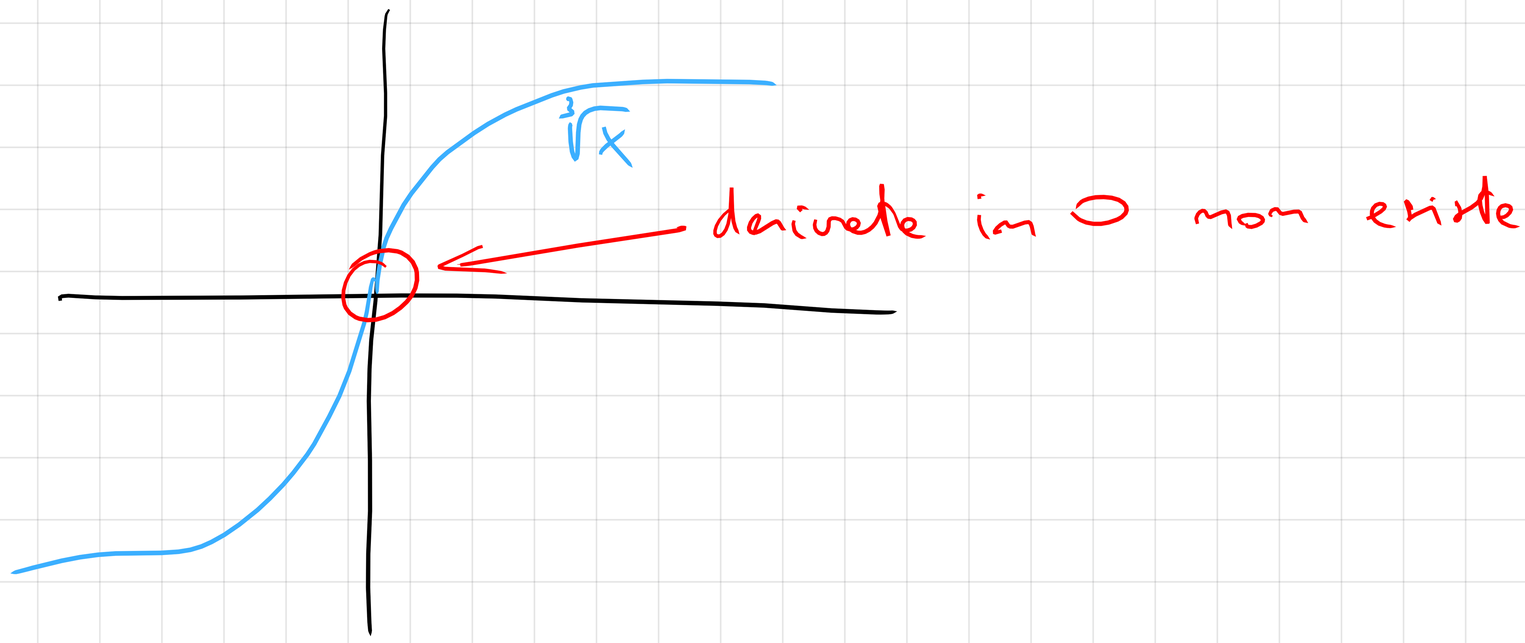
ESEMPIO (dall'Analisi)

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile bigettiva

f^{-1} è derivabile? $\quad f(x) = x^3 \quad f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$

derivabile $\qquad$ non derivabile





Data $f: V \to W$ lineare bigettiva (isomorfismo) posso considerare la funzione **inversa** $f^{-1}: W \to V$. Mi chiedo: **f^{-1} è lineare?**

Proposizione Se $f: V \to W$ lineare è bigettiva, allora l'inversa $f^{-1}: W \to V$ è anch'essa lineare.

Sia $A \in M_n(\mathbb{K})$ matrice quadrata $n \times n$ si dice **invertibile** se $\exists B \in M_n(\mathbb{K})$ t.c. $AB = B \cdot A = I_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$

B si dice l'inversa di A.

Vedremo vari modi per calcolare l'inversa di una matrice, quando esiste.

Proposizione Sia $A \in M_n(\mathbb{K})$ matrice quadrata $n \times n$, l'applicazione lineare $L_A: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ è un isomorfismo sse A è invertibile.

DIM L_A è isomorfismo sse $\exists L_B$ che la inverte, cioè

$L_A \circ L_B = L_B \circ L_A$ è l'identità di $\mathbb{K}^n$, cioè

$AB = BA = I_n$ cioè A è matrice invertibile $\square$

- Quindi se $A \in M_n(\mathbb{K})$ è invertibile e B è l'inversa di A, allora $L_A^{-1} = L_B$.

Sia V sp. vett. su $\mathbb{K}$, $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ base di V, abbiamo: $T : V \to \mathbb{K}^n$, $T(\underline{v}) := [\underline{v}]_{\mathcal{B}}$

$$V \ni \underline{v} \xmapsto{T} [\underline{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{t.c. } \underline{v} = x_1 \underline{v}_1 + \dots + x_n \underline{v}_n$$

<u>Proposizione</u>

Sia V sp. vett. su $\mathbb{K}$, $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ base di V, l'applicazione $V \xrightarrow{T} \mathbb{K}^n$, data da $T(\underline{v}) := [\underline{v}]_{\mathcal{B}}$ è un isomorfismo.

<u>OSS</u> $T^{-1} : \mathbb{K}^n \longrightarrow V$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto x_1 \underline{v}_1 + \dots + x_n \underline{v}_n$$

<u>Corollario</u> (del teo della dimensione) $f : V \to W$ lineare:

(1) Se f è suriettiva, allora $\dim V \geq \dim W$

(2) Se f è iniettiva, allora $\dim W \geq \dim V$

(3) Se f è isomorfismo, allora $\dim V = \dim W$.

<u>Attenzione</u> questi sono "se", non "se e solo se", vedi l'esempio $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

<u>Proposizione</u> Sia $f : V \to W$ lineare. Se $\dim V = \dim W$ (finite). Allora questi 3 fatti sono equivalenti:

(1) f è iniettiva, (2) f è suriettiva, (3) f è un isomorfismo.

DIM

f iniettiva $\iff \dim \operatorname{Ker} f = 0 \iff \dim \operatorname{Im} f = \dim V \iff$

$\iff \dim \operatorname{Im} f = \dim W \iff f$ è suriettiva $\square$.

OSS Per $A \in M_n(\mathbb{K})$ matrice quadrata $n \times n$ sono equivalenti

- L_A è iniettiva
- L_A è suriettiva
- L_A è isomorfismo
- A è invertibile
- $\operatorname{rk} A = n$
- $\forall \underline{b} \in \mathbb{K}^n \ \exists! \ \underline{x} \in \mathbb{K}^n : A\underline{x} = \underline{b}$

(Martelli 4.2.7)

Proposizione Se V è sp. vett. su $\mathbb{K}$ di dim. n, allora V è isomorfo a $\mathbb{K}^n$ e in generale se V, W sono sp. vett. su $\mathbb{K}$ (di dim finita) allora

$$V \text{ è isomorfo a } W \iff \dim V = \dim W.$$

ES $\mathbb{R}_n[x]$ è isomorfo a $\mathbb{R}^{n+1}$

ES $M_{m \times n}(\mathbb{C})$ è isomorfo a $\mathbb{C}^{mn}$.

Matrice associata a un'app. lineare (Martelli 4.3)

Data $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ base di V

$$V \ni \underline{v} \longmapsto [\underline{v}]_{\mathcal{B}}$$

- Sia $f : V \to W$ app. lineare tra sp. vett. su $\mathbb{K}$.

Siano $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ base di V

$\mathcal{C} = \{\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_m\}$ base di W

$$\underline{v}_1 \xmapsto{f} f(\underline{v}_1) = a_{11}\underline{w}_1 + a_{21}\underline{w}_2 + \dots + a_{m1}\underline{w}_m$$

$$\vdots$$

$$\underline{v}_n \longmapsto f(\underline{v}_n) = a_{1n}\underline{w}_1 + a_{2n}\underline{w}_2 + \dots + a_{mn}\underline{w}_m$$

Considero la matrice $A = (a_{ij}) \in M_{mn}(\mathbb{K})$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Le colonne di A sono le coordinate, rispetto a $\mathcal{C}$, dei vettori $f(\underline{v}_1), \dots, f(\underline{v}_n)$

Chiamo $A = [f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}$ ← base dello spazio di partenza ← base dello spazio di arrivo

<u>Def</u> $A = [f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}$ è la matrice associata a $f: V \to W$ rispetto alle basi $\mathcal{B}$ (in partenza) e $\mathcal{C}$ (in arrivo).

Le colonne di A sono $A^1, \dots, A^n$:

$$A^j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} = [f(\underline{v}_j)]_{\mathcal{C}}$$

<u>Prop</u> La matrice associata a $L_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, con $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$, rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{K}^n$ e $\mathbb{K}^m$ è proprio A.

- Iniziate a guardare gli esempi (4.3.2 di Martelli).

$$f: \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}^2 \qquad p(x) \mapsto f(p) = \begin{pmatrix} p(2) \\ p(-2) \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}, \quad \mathcal{C} = \{\underline{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$$

$$[f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}} = ?$$

14/11/2023

$$\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$$

$$f(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad f(x) = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad f(x^2) = \begin{pmatrix} 2^2 \\ (-2)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$[f(1)]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \qquad [f(x)] = \begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix} \qquad [f(x^2)]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix}$$

$$[f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\1 & -2 & 4\end{pmatrix}$$

- Provo a cambiare base in arrivo. $\mathcal{B}' = \left\{ \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \right\}$

$\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$

$$f(1) = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \qquad f(x) = \begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix} \qquad f(x^2) = \begin{pmatrix}2^2\\(-2)^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix}$$

$$[f(1)]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \alpha = 1 \quad \beta = 2$$

$$[f(x)]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix} = \boxed{2}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} + \boxed{0}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

$$[f(x^2)]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix}4\\8\end{pmatrix}$$

$$[f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\2 & 0 & 8\end{pmatrix} -$$

<u>ESEMPIO</u> $\quad f: \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^3 \qquad f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x-y\\2x\\y\end{pmatrix}$

$$\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \right\} \qquad \mathcal{C}' = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$$

$$[f]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}'} = \left(\left[f\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right]_{\mathcal{C}'} \middle| \left[f\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right]_{\mathcal{C}'} \right) =$$

$$= \left(\left[\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}\right]_{\mathcal{C}'} \middle| \left[\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right]_{\mathcal{C}'} \right) = \begin{pmatrix}1 & -1\\2 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} -$$

- Se cambio base in partenza $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \right\}$

$$[f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}'} = \left(\left[f\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right]_{\mathcal{C}'} \middle| \left[f\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right]_{\mathcal{C}'} \right) =$$

$$= \begin{pmatrix}0 & 2\\2 & 2\\1 & -1\end{pmatrix}$$

• se prendo $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \right\}$ in partenza e

$\mathcal{B}' = \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$ in arrivo

$$[f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'} = \left(\left[f\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right]_{\mathcal{B}'} \middle| \left[f\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right]_{\mathcal{B}'} \right) = \left(\left[\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}\right]_{\mathcal{B}'} \middle| \left[\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}\right]_{\mathcal{B}'} \right)$$

$$\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \overset{\text{(calcoli)}}{\rightsquigarrow} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \frac{3}{2}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix} = \delta\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \varepsilon\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + \varphi\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \overset{\text{(calcoli)}}{\rightsquigarrow} = \frac{5}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow [f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1/2 & 5/2 \\ 3/2 & -1/2 \\ -1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

<u>Proposizione</u> $v \in V$, $f: V \to W$, $\mathcal{B}$ base di V, $\mathcal{C}$ base di W

$$(*) \quad [f(v)]_{\mathcal{C}} = [f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}} \cdot [v]_{\mathcal{B}}$$

matrice

prodotto righe per colonne

vettore

e se lo scrivere i vettori di V nella base $\mathcal{B}$

se conosco questa matrice

posso calcolare f in qualsiasi vettore (rispetto a $\mathcal{C}$)

<u>OSS</u> questo già succedeva quando consideravamo

$A \in M_{m \times n}(K)$ $\qquad L_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$

se $v \in \mathbb{R}^n$ $\qquad \boxed{L_A v = A \cdot v}$ è la formula $(*)$ con $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ basi canoniche.

<u>ESEMPIO</u> Torniamo all'esempio di $[f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.

Se voglio calcolare $f(ax^2+bx+c)$ posso usare la def. di f:

$$\boxed{p(x) \mapsto f(p) = \begin{pmatrix} p(2) \\ p(-2) \end{pmatrix}}$$

$$f(ax^2+bx+c) = \begin{pmatrix} 4a + 2b + c \\ 4a - 2b + c \end{pmatrix}$$

= (stesso risultato)

$$[ax^2+bx+c]_B = \begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix}$$

$$[f(ax^2+bx+c)]_C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4a+2b+c \\ 4a-2b+c \end{pmatrix}$$

RICORDIAMO

$$L_{(A\cdot B)} = L_A \circ L_B$$

Proposizione $f: V \to W$, $g: W \to Z$

B base di V, C base di W, D base di Z

$$[g\circ f]_D^B = [g]_D^C \cdot [f]_C^B$$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[rr, bend left, "g\circ f"] & W \arrow[r, bend left, "g"] & Z \end{tikzcd}$$

Proposizione $id: V \to V$ $\quad B$ base di V $\quad B = \{\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n\}$

$id(\underline{v}) = \underline{v}$

$$[id]_B^B = I_n$$

$$= \left([id(\underline{b}_1)]_B \,\middle|\, [id(\underline{b}_2)]_B \,\middle|\, \dots \,\middle|\, [id(\underline{b}_n)]_B \right) =$$

$$= \left([\underline{b}_1]_B \,\middle|\, [\underline{b}_2]_B \,\middle|\, \dots \,\middle|\, [\underline{b}_n]_B \right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} = I_n .$$

Prop Data $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, dati V, $\dim V = n$, W, $\dim W = m$

Date B base di V e C base di W. $\exists!\ f: V \to W$

tale che

$$[f]_C^B = A$$

Prop Sia $f: V \to W$ isomorfismo lineare (iniettivo e suriettivo)

Date B base di V e C base di W, f ha un'inversa

$f^{-1}: W \to V$

e $[f^{-1}]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}$ è la matrice tale che

$$[f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}} \cdot [f^{-1}]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}} = I_n$$

Cioè diciamo che se $A = [f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}$, $B = [f^{-1}]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}$

B è la matrice inversa di A: cioè $AB = I_n = B \cdot A$

Infatti:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[rr, bend right, "f^{-1} \circ f = id_V"'] & W \arrow[r, bend left, "f^{-1}"] & V \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, bend left, "f^{-1}"] \arrow[rr, bend right, "f \circ f^{-1} = id_W"'] & V \arrow[r, bend left, "f"] & W \end{tikzcd}$$

e quindi $[f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}} \cdot [f^{-1}]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}} = [id_W]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}} = I_n$

$$[f^{-1}]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}} \cdot [f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}} = [id_V]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} = I_n$$

(supponiamo $\dim V = n$, e poiché f è isomorfismo $\dim(V) = \dim(W)$) _

Come si fa ad invertire una matrice?

Stiamo parlando di matrici quadrate $A \in M_n(\mathbb{K})$

Cerco (se esiste) $B \in M_n(\mathbb{K})$ tc

$$\boxed{AB = I_n = B \cdot A}$$

OSS → se vale questa relazione

$L_A \cdot L_B = id_{\mathbb{K}^n} = L_B \circ L_A$ ⇒ L_A è iniettiva e suriettiva

⇒ $rk\, A = n$ e questo, per la formula della dimensione, garantisce che $L_A : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n$ è isomorfismo

$$n = \underbrace{\dim \operatorname{Ker} A}_{=0} + \underbrace{\dim \operatorname{Im} A}_{= rk\, A = \dim \mathbb{K}^n}$$

Algoritmo di Gauss per l'inversa (3.4.7 di Martelli)

Sia A $n \times n$ di rango n

Prendo una matrice $n \times (2n)$ fatta così

$$C = \left(A \;\middle|\; I_n \right)$$

applico l'algoritmo di Gauss (inizialmente per mettere a scala C) con operazioni di riga

$$\rightsquigarrow C' = \left(\underbrace{\begin{matrix} * & * & * & * \\ & * & & \\ & & * & \\ & & & * \\ & & & * \\ & & & * \\ & & & * \\ 0 & & & * \end{matrix}}_{n \times n} \;\middle|\; \underbrace{B'}_{n \times n} \right)$$

continuo ad applicare mosse di riga fino a ottenere

$$C'' = \left(I_n \;\middle|\; B \right)$$

Risultato $B = A^{-1}$, cioè $B \cdot A = A \cdot B = I_n$.

<u>ESEMPIO</u> $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$C = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{I_2 \leftrightarrow II_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{II_2 \to II_2 - 2I_2} \underbrace{\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{array}\right)}_{C'}$$

$$\xrightarrow{II_2 \to -II_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \boxed{1} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{I_2 \to I_2 - II_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Verifichiamo calcolando $A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ✓

Supponiamo di voler risolvere $A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$. $\quad A\in M_{2\times 2}(K)$

Mi basta risolvendo per $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ e per $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

Se $A\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ (suppongo di aver risolto con $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ e chiamo $\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}$ la soluzione)

e $A\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ (suppongo di aver risolto con $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ e chiamo $\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}$ la soluzione)

Per risolvere $A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

$$A\Big(\underbrace{a\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}}_{=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}}\Big)=a\,A\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}+b\,A\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}=$$

$$=a\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$$

Proviamo: $A=\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}$ Risolvo $A\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

(uso i calcoli di ▨ senza la IV col.)

$$\left(\begin{array}{cc|c}2&1&1\\1&1&0\end{array}\right)\rightsquigarrow$$

$$\left(\begin{array}{cc|c}2&1&1\\1&1&0\end{array}\right)\xrightarrow{I_2\leftrightarrow II_2}\left(\begin{array}{cc|c}1&1&0\\2&1&1\end{array}\right)\xrightarrow{II_2\to II_2-2I_2}\left(\begin{array}{cc|c}1&1&0\\0&-1&1\end{array}\right)\rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow\left(\begin{array}{cc|c}1&\boxed{1}&0\\0&1&-1\end{array}\right)\xrightarrow{I_2\to I_2-II_2}\left(\begin{array}{cc|c}1&0&1=x\\0&1&-1=y\end{array}\right)$$

$$\begin{cases}x+y=0\\-y=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1\\y=-1\end{cases}$$

$$\begin{cases}x+0=1\\0+y=-1\end{cases}\qquad\begin{cases}x=1\\y=-1\end{cases}$$

Gli stessi conti di ▨ senza la III col. risolvono

$$A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x=-1\\y=2\end{cases}$$

Quindi se scrivo $B=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&2\end{pmatrix}$ ho: $\begin{cases}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\xrightarrow{L_B}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\\[2mm]\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\xrightarrow{L_B}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}\end{cases}$

e inoltre ho appena scoperto che per $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

si ha: $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_A} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_A} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

cioè L_A e L_B sono l'una l'<u>inversa</u> dell'altra.

$$\Rightarrow B = A^{-1}.$$

20/11/2023

Esercizi da Martelli cap. 4

Es. 4.2

$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ lineare, data da

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - y + z \\ x + y + z \\ y - z \end{pmatrix}$$

Scegliere una base $\mathcal{B}$ del piano $U = \{x + y - z = 0\}$ e scrivere la matrice associata a $f|_U : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ rispetto a $\mathcal{B}$ (per U) e base canonica (per $\mathbb{R}^3$).

<u>Soluzione</u> Se ci avessero chiesto la matrice associata ad f rispetto alla base canonica $\mathcal{E}$ di $\mathbb{R}^3$ avremmo avuto:

$$[f]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

questa NON era la matrice richiesta.

$f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$U = \{x + y - z = 0\}$ $\qquad z = x + y$

$\underline{v} \in U \iff \underline{v} \begin{pmatrix} x \\ y \\ x+y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

una possibile scelta di $\mathcal{B}$

$$\Rightarrow \mathcal{B} = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\underline{v}_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\underline{v}_2} \right\}$$

Potevo scegliere una base diversa per U. Per esempio:

$B' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} \right\}$ sono 2, sono indip, stanno in U (che ha $\dim = 2$) $\Rightarrow$ sono base di U.

$$[f]^{B}_{C} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = [f(\underline{v}_1)]_C \qquad [f(\underline{v}_2)]_C = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

<u>ES</u> 4.3 $\quad f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ data da $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+y \\ x-y \\ 3x+2y \end{pmatrix}$

a) Determinare $\operatorname{Ker} f$, $\operatorname{Im} f$.

b) $B = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\underline{v}_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\underline{v}_2} \right\}$ $\qquad B' = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\underline{w}_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\underline{w}_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\underline{w}_3} \right\}$

$[f]^{B}_{B'}$

<u>Soluzione</u> a) calcolo $[f]^{e_2}_{e_3} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = M$

mettendo a scala M per righe o per colonne si vede

$\operatorname{rk} M = 2 \Rightarrow \dim \operatorname{Im} f = 2 \Rightarrow \dim \operatorname{Ker} f = 2 - 2 = 0$

formula della dimensione

$\Rightarrow \operatorname{Ker} f = \{\underline{0}\}$

$\operatorname{Im} f = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$

Se devo descrivere $\operatorname{Im} f$ tramite equazioni:

$$\operatorname{rk} \begin{pmatrix} 2 & 1 & x \\ 1 & -1 & y \\ 3 & 2 & z \end{pmatrix} = 2 \rightsquigarrow \text{metto a scala per righe:}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & x \\ 1 & -1 & y \\ 3 & 2 & z \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{III}_2 \to 2\text{III}_2 - 3\text{I}]{\text{II}_2 \to 2\text{II}_2 - \text{I}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & x \\ 0 & -3 & 2y - x \\ 0 & 1 & 2z - 3x \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & x \\ 0 & 1 & 2z - 3x \\ 0 & -3 & 2y - x \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\xrightarrow{\text{III}_2 \to \text{III}_2 + 3\text{II}_2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & x \\ 0 & 1 & 2z - 3x \\ 0 & 0 & 2y - 10x + 6z \end{pmatrix}$$

$$\boxed{-5x + y + 3z = 0}$$

equazione di $\operatorname{Im} f$.

b) $f(\underline{v}_1) = f\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = a_{11}\underline{w}_1 + a_{21}\underline{w}_2 + a_{31}\underline{w}_3 =$

$$= 1 \cdot \underline{w}_1 + 1 \cdot \underline{w}_2 + 0 \cdot \underline{w}_3 = 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$f(\underline{v}_2) = f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = a_{12}\underline{w}_1 + a_{22}\underline{w}_2 + a_{32}\underline{w}_3 =$$

$$= -1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

65

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 8 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

a_{12} a_{22} a_{32}

$a_{12} = -1 \qquad a_{22} = 1 \qquad a_{32} = 4$

$$[f]^{B}_{B'} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2 \arrow[r, "f"] & \mathbb{R}^3 \\ e_2 & e_3 \\ B & B' \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2_{e_2} \arrow[r, "f", "{[f]^{e_2}_{e_3}}"'] & \mathbb{R}^3_{e_3} \arrow[d, "{[id]^{e_3}_{B'}}"', "id"] \\ \mathbb{R}^2_{B} \arrow[u, "id", "{[id]^{B}_{e_2}}"'] \arrow[r, "f", "{[f]^{B}_{B'}}"'] & \mathbb{R}^3_{B'} \end{tikzcd}$$

■ Cambio di base

■ (*) $$[f]^{B}_{B'} = [id]^{e_3}_{B'} \, [f]^{e_2}_{e_3} \, [id]^{B}_{e_2}$$

$$[id]^{B}_{C_2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = [\underline{v}_1]_{C_2} \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = [\underline{v}_2]_{C_2}$$

$$[id]^{C_3}_{B'} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right]_{B'} \qquad \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right]_{B'} \qquad \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right]_{B'}$$

$$\frac{1}{2}(\underline{w}_1 + \underline{w}_2 + \underline{w}_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(\underline{w}_1 + \underline{w}_2 + \underline{w}_3) - \underline{w}_2$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(\underline{w}_1 + \underline{w}_2 + \underline{w}_3) - \underline{w}_3$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(\underline{w}_1 + \underline{w}_2 + \underline{w}_3) - \underline{w}_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad (*)$$

Provate 4.4 $\longrightarrow$ 4.7 dal Martelli

23/11/2023

4.4. $B = \{ \overbrace{1 + x + x^2}^{q_1}, \overbrace{x}^{q_2}, \overbrace{1 - x^2}^{q_3} \}$

$B' = \{ \underbrace{1 - x}_{p_1}, \underbrace{x - x^2}_{p_2}, \underbrace{1}_{p_3} \}$

basi di $\mathbb{R}_2[x]$

$$[id]^{B'}_{B} = M$$

$$M' = [p_1]_B \qquad 1 - x = \alpha_1(1 + x + x^2) + \alpha_2 x + \alpha_3(1 - x^2)$$

$$\begin{cases} 1 = \alpha_1 + \alpha_3 & (\text{grado } 0) \\ -1 = \alpha_1 + \alpha_2 & (\text{grado } 1) \\ 0 = \alpha_1 - \alpha_3 & (\text{grado } 2) \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \alpha_1 = \alpha_3 = \frac{1}{2} \\ \alpha_2 = -\frac{3}{2} \\ \alpha_1 = \alpha_3 \end{array}$$

$$[P_1]_B = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -3/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

$[P_2]_B$

$$x - x^2 = \beta_1 (1 + x + x^2) + \beta_2 x + \beta_3 (1 - x^2)$$

$$0 = \beta_1 + \beta_3 \qquad \beta_1 = -\beta_3$$

$$1 = \beta_1 + \beta_2 \qquad \beta_2 = \frac{3}{2}$$

$$-1 = \beta_1 - \beta_3 \qquad \beta_1 = -\frac{1}{2} \qquad \beta_3 = \frac{1}{2}$$

$$[P_2]_B = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 3/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

$[P_3]_B$

$$1 = \gamma_1 (1 + x + x^2) + \gamma_2 x + \gamma_3 (1 - x^2)$$

$$1 = \gamma_1 + \gamma_3 \qquad \gamma_1 = \frac{1}{2} = \gamma_3$$

$$0 = \gamma_1 + \gamma_2 \qquad \gamma_2 = -\gamma_3 = -\frac{1}{2}$$

$$0 = \gamma_1 - \gamma_3 \quad \Rightarrow \quad \gamma_1 = \gamma_3$$

$$[P_3]_B = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

$$[id]^{B'}_{B} = M = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -3/2 & 3/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- se cercassi M^{-1} come la calcolo?

1) potrei calcolare M^{-1} col metodo di Gauss

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1/2 & -1/2 & 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ -3/2 & 3/2 & -1/2 & 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & M^{-1} \\ 0 & 0 & 1 & \end{array}\right]$$

2) cerco una matrice N tc $M \cdot N = I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\underbrace{[id]^{B'}_{B}}_{M} \underbrace{[id]^{B}_{B'}}_{M^{-1}} = [id]^{B}_{B} = I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

cioè $M^{-1} = [id]^{B}_{B'}$

- **Calcoliamo** $M^{-1} = [id]_{B'}^{B}$ (usiamo (2))

$B = \{1+x+x^2,\ x,\ 1-x^2\}$

$B' = \{1-x,\ x-x^2,\ 1\}$

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$1+x+x^2 = \alpha_1(1-x) + \alpha_2(x-x^2) + \alpha_3 \cdot 1$$

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_3 = 1 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 = 1 \\ -\alpha_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_3 = 3 \\ \alpha_1 = -2 \\ \alpha_2 = -1 \end{cases}$$

$$x = \beta_1(1-x) + \beta_2(x-x^2) + \beta_3 \cdot 1$$

$$\begin{cases} 0 = \beta_1 + \beta_3 \\ 1 = -\beta_1 + \beta_2 \\ 0 = -\beta_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \beta_3 = 1 \\ \beta_1 = -1 \\ \beta_2 = 0 \end{cases}$$

$$1-x^2 = \gamma_1(1-x) + \gamma_2(x-x^2) + \gamma_3 \cdot 1$$

$$\begin{cases} 1 = \gamma_1 + \gamma_3 \\ 0 = -\gamma_1 + \gamma_2 \\ -1 = -\gamma_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \gamma_3 = 0 \\ \gamma_1 = 1 \\ \gamma_2 = 1 \end{cases}$$

- **Controlliamo** se il calcolo è corretto:

$$M \cdot M^{-1} = I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \checkmark$$

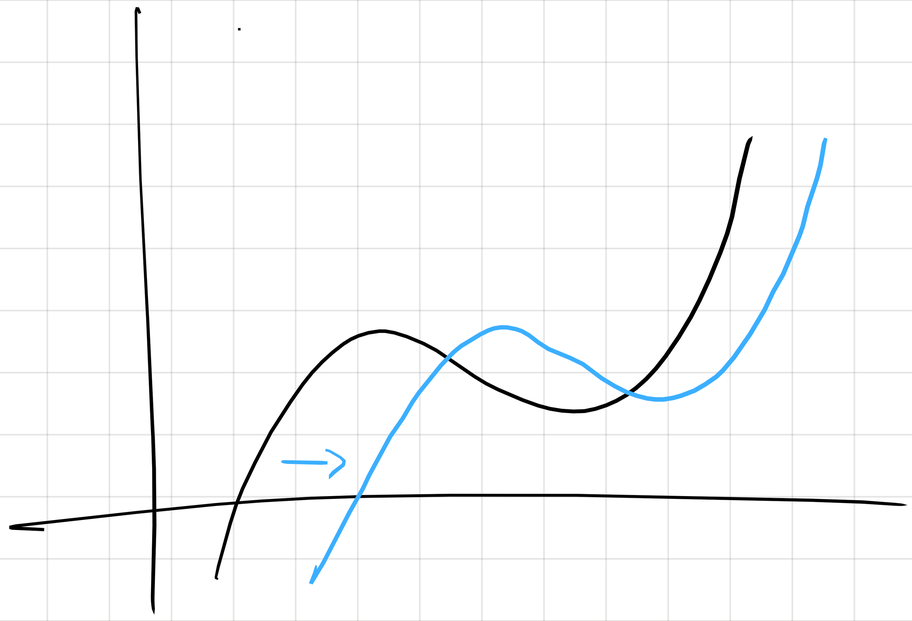
- $V = \mathbb{R}_2[x] \xrightarrow{f} \mathbb{R}_2[x]$

$p(x) \xmapsto{f} p(x-1)$

es: $1 \longmapsto 1$

$x \longmapsto x-1$

$x^2 \longmapsto (x-1)^2$



- $[f]_B^B = ?$ $\qquad [f]_B^B = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & -1/2 \\ -2 & 3/2 & 5/2 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} = A$

$B = \{1+x+x^2,\ x,\ 1-x^2\}$

$1+x+x^2 \longmapsto 1+(x-1)+(x-1)^2 = 1-x+x^2 =$

$= 1(1+x+x^2) - 2(x) + 0(1-x^2)$

$x \longmapsto x-1 =$

$= -\frac{1}{2}(1+x+x^2) + \frac{3}{2}(x) - \frac{1}{2}(1-x^2)$

$-1 = \alpha_1 + \alpha_3 \qquad \alpha_1 = -\frac{1}{2} = \alpha_3$

$1 = \alpha_1 + \alpha_2 \qquad \alpha_2 = \frac{3}{2}$

$0 = \alpha_1 - \alpha_3 \qquad \alpha_1 = \alpha_3$

$1-x^2 \longmapsto 1-(x-1)^2 = -x^2+2x =$

$= -\frac{1}{2}(1+x+x^2) + \frac{5}{2}(x) + \frac{1}{2}(1-x^2)$

$0 = \alpha_1 + \alpha_3 \qquad \alpha_3 = -\alpha_1$

$2 = \alpha_1 + \alpha_2 \qquad \alpha_2 = \frac{5}{2}$

$-1 = \alpha_1 - \alpha_3 \qquad \alpha_1 = -\frac{1}{2}$

- $[f]_{B'}^{B'} = ?$ posso ripetere lo stesso procedimento, con B' al posto di B, oppure faccio il cambio di base:

$$[f]_{B'}^{B'} = [id]_{B'}^{B}\,[f]_{B}^{B}\,[id]_{B}^{B'}$$

Cambio base per endomorfismi

$$= M^{-1} \quad A \quad M$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1/2 & -1/2 \\ -2 & 3/2 & 5/2 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \dots$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}_2[x]_{B'} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "id"] & \mathbb{R}_2[x]_{B'} \arrow[d, "id"] \\
\mathbb{R}_2[x]_{B} \arrow[r, "f"] & \mathbb{R}_2[x]_{B}
\end{tikzcd}$$

M, M^{-1}, A

ESEMPIO $1+x = p(x) \in \mathbb{R}_2[x]$ $\qquad f(p(x)) = ?$

$f(p(x)) = p(x-1) = \boxed{x}$

(MODO 1: uso la def. dell'applicazione)

oppure posso calcolare $f(p(x))$ così:

(MODO 2: uso la matrice di f rispetto a $\mathcal{B}$)

$$[p(x)]_{\mathcal{B}} = [1+x]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

$\mathcal{B} = \{1+x+x^2,\ x,\ 1-x^2\}$

$1 = \alpha_1 + \alpha_3 \qquad \alpha_1 = \frac{1}{2} = \alpha_3$

$1 = \alpha_1 + \alpha_2 \qquad \alpha_2 = \frac{1}{2}$

$0 = \alpha_1 - \alpha_3 \qquad \alpha_1 = \alpha_3$

$$[f(p(x))]_{\mathcal{B}} = [f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}\ [p(x)]_{\mathcal{B}} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & -1/2 \\ -2 & 3/2 & 5/2 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow f(p(x)) = 0\,(1+x+x^2) + 1\,x + 0\,(1-x) = \boxed{x}$$

oppure (MODO 3: uso la matrice di f rispetto a $\mathcal{B}'$)

$\mathcal{B}' = \{1-x,\ x-x^2,\ 1\}$

$$[p(x)]_{\mathcal{B}'} = [1+x]_{\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$1+x = -1\,(1-x) + 0\,(x-x^2) + 2\,(1)$

$$[f(p(x))]_{\mathcal{B}'} = [id]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}\ [f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}\ [id]^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}\ [p(x)]_{\mathcal{B}'}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & -1/2 \\ -2 & 3/2 & 5/2 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \underbrace{\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}} =$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1/2 & -1/2 \\ -2 & 3/2 & 5/2 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}} =$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$f(p(x)) = -1\,(1-x) + 0\,(x-x^2) + 1\,(1) = \boxed{x}$$

4.5 $f: V \to W$ lineare

- $U \subset V$ sottospazio $\Rightarrow f(U)$ sottospazio di W

$\underline{0} \in U \qquad f(\underline{0}) = \underline{0} \qquad \Rightarrow \underline{0} \in f(U)$

$\underline{v}, \underline{v}' \in U \qquad f(\underline{v}), f(\underline{v}') \in U \qquad f(\underline{v}) + f(\underline{v}') = f(\underline{v} + \underline{v}') \in f(U)$

perché $\underline{v} + \underline{v}' \in U$

$\underline{v} \in U \Rightarrow \lambda \underline{v} \in U \qquad f(\underline{v}) \in f(U) \Rightarrow \lambda f(\underline{v}) = f(\lambda \underline{v}) \in f(U)$

• $Z \subset W$ sottosp. $f^{-1}(Z)$ è sottosp. di V

<u>Def</u> $f^{-1}(Z) := \{ \underline{v} \in V \mid f(\underline{v}) \in Z \}$

$f(\underline{0}) = \underline{0} \in Z \Rightarrow \underline{0} \in f^{-1}(Z)$

$\underline{v}, \underline{v}' \in f^{-1}(Z) \Rightarrow f(\underline{v}) \in Z,\ f(\underline{v}') \in Z \Rightarrow f(\underline{v}) + f(\underline{v}') \in Z$

$\Rightarrow f(\underline{v} + \underline{v}') \in Z \Rightarrow \underline{v} + \underline{v}' \in f^{-1}(Z)$

$\underline{v} \in f^{-1}(Z) \Rightarrow f(\underline{v}) \in Z \Rightarrow \lambda f(\underline{v}) \in Z \Rightarrow f(\lambda \underline{v}) \in Z$

$\Rightarrow \lambda \underline{v} \in f^{-1}(Z)$.

• se f è isomorfismo $\Rightarrow \dim f(U) = \dim U$

per ogni $U \subset V$ sottospazio.

f isomorfismo $\Leftrightarrow$ f è <u>su</u> e $\operatorname{Ker} f = \{\underline{0}\}$

e quindi se $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k \in V$ sono l. i. $\Rightarrow$

$f(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k)$ sono l. i.

altrimenti avrei $\alpha_1 \underline{v}_1 + \dots + \alpha_k \underline{v}_k \xmapsto{f} \underline{0}$ con

α_i non tutti nulli $\Rightarrow$

$\underline{v} = \alpha_1 \underline{v}_1 + \dots + \alpha_k \underline{v}_k \neq \underline{0}$ e $\underline{v} \in \operatorname{Ker} f$.

Quindi se $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$ è base di $U \Rightarrow$

$f(\underline{v}_1), \dots, f(\underline{v}_k)$ sono vettori l. i. che generano

$f(U)$ e quindi sono base di $f(U)$

e dunque $\dim U = k = \dim f(U)$.

4.6 $T : \underbrace{\mathbb{R}_n[x]}_{\dim n+1} \longrightarrow \underbrace{\mathbb{R}_n[x]}_{\dim n+1}$ $\quad T(p) = (x+1)\, \overbrace{p'(x)}^{\text{derivata di } p}$

$[T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} = ?$ $\quad \mathcal{C} = \{1, x, x^2, \dots, x^n\}$

$1 \longmapsto 0$

$x \longmapsto x+1$

$x^2 \longmapsto 2x(x+1) = 2x^2 + 2x$

$x^k \longmapsto k x^{k-1}(x+1) = k x^k + k x^{k-1}$

$$[T]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ | & 1 & 2 & 0 & \cdots & | \\ | & 0 & 2 & 3 & \cdots & | \\ | & | & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ | & | & | & 0 & \cdots & n \\ 0 & 0 & 0 & ! & \cdots & n \end{bmatrix}$$

è una matrice triangolare: sotto la diagonale è tutta 0.

$\operatorname{Ker} T = ?$

$\operatorname{Im} T = ?$

$\operatorname{Ker} T = \operatorname{Span}(1)$

$\dim \operatorname{Ker} T = 1$

$\dim \operatorname{Im} T = (n+1) - 1 = n$

$$\operatorname{Im} T = \operatorname{Span}\left(1+x,\ 2x(1+x),\ 3x^2(1+x), \dots,\ n x^{n-1}(1+x)\right) =$$

$$= \operatorname{Span}\left(1+x,\ x(1+x),\ x^2(1+x), \dots,\ x^{n-1}(1+x)\right)$$

tutti i polinomi sono multipli di $(1+x)$, cioè

$p(-1) = 0$ per ogni $p(x) \in \operatorname{Im} T$

Quindi $\operatorname{Im} T = \{ p(x) \in \mathbb{R}_n[x] \mid p(-1) = 0 \}$

Potevo vederlo così:

$$k \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ | & 1 & 2 & 0 & \cdots & | \\ | & 0 & 2 & 3 & \cdots & | \\ | & | & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ | & | & | & 0 & \cdots & n \\ 0 & 0 & 0 & ! & \cdots & n \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ | & 1 & 2 & 0 & \cdots & | & \vdots \\ | & 0 & 2 & 3 & \cdots & | & \vdots \\ | & | & 0 & 3 & \cdots & 0 & \\ | & | & | & 0 & \cdots & n & \\ 0 & 0 & 0 & ! & \cdots & n & a_n \end{bmatrix}$$

se mettete a scala trovate che $k = n$ se e solo se $a_0, \dots, a_n$ soddisfano

$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots + (-1)^n a_n = 0$$

cioè, se $p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$ ho la condizione $p(-1) = 0$

- calcolare la traccia di T

<u>Def</u> Per una matrice quadrata A, la traccia $\operatorname{tr} A$ è la somma degli elementi sulla diagonale. es. $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

$$\operatorname{tr} A = a_{11} + a_{22} + a_{33}$$

per $f: V \to V$ $\quad \operatorname{tr}(f) = \operatorname{tr}\left([f]_B^B\right)$

per una qualsiasi base B (la stessa in partenza e arrivo)

Fatto: $\boxed{\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(M^{-1}AM)}$

così come

$$\boxed{\det(A) = \det(M^{-1}AM)}$$

Nel nostro caso $\operatorname{tr} T =$

$$= \operatorname{tr}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ | & 1 & 2 & 0 & \cdots & | \\ | & 0 & 2 & 3 & \cdots & | \\ | & | & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ | & | & | & 0 & \cdots & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & n \end{bmatrix} = 0 + 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

- $\det T = ?$ $\qquad \det T = 0$

- Provate a svolgere l'esercizio 4.7,
- provate a vedere l'esempio 4.4.2,
- provate a svolgere gli esercizi 3.3, 3.5.

28/11/2023

4.7 $\qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad L_A : \underset{\dim = 4}{M_2(\mathbb{R})} \to \underset{\dim = 4}{M_2(\mathbb{R})}$

$L_A(X) := AX$

1) $\operatorname{Ker} L_A = ?$ $\qquad \operatorname{Im} L_A = ?$

per trovare il nucleo $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ e poniamo $AX = 0$

cioè
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a + 2c & b + 2d \\ 3a + 4c & 3b + 4d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

cioè
$$\begin{cases} a + 2c = 0 \\ b + 2d = 0 \\ 3a + 4c = 0 \\ 3b + 4d = 0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} \text{III} - \text{I} \\ \text{IV} - \text{II} \\ \\ \\ \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 2a + 2c = 0 \to a + c = 0 \\ 2b + 2d = 0 \to b + d = 0 \\ c = 0 \\ d = 0 \end{matrix}$$

quindi l'unica soluzione è $a=0, b=0, c=0, d=0$

cioè $\operatorname{Ker} L_A = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ $\quad \dim \operatorname{Ker} L_A = 0$

Formula della dim:

spazio di partenza

$$\underset{4}{\dim M_2(\mathbb{R})} = \underset{0}{\dim \operatorname{Ker} L_A} + \underset{4}{\dim \operatorname{Im} L_A}$$

$$\underset{\dim\ 4}{\operatorname{Im} L_A} \subset \underset{4}{M_2(\mathbb{R})} \Rightarrow \operatorname{Im} L_A = M_2(\mathbb{R})$$

cioè L_A è iniettiva e suriettiva.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ha rk 2 $\Rightarrow$ è invertibile

$\exists B : BA = I_2 \in M_2(\mathbb{R})$

a scala per righe $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

1) (METODO ALTERNATIVO)

$L_B : X \longmapsto BX$

$L_B \circ L_A : X \xmapsto{L_A} AX \xmapsto{L_B} BAX = IX = X$

$\Rightarrow L_B \circ L_A = Id_{M_2(\mathbb{R})}$

e analogamente

$L_A \circ L_B = Id_{M_2(\mathbb{R})}$

$\Rightarrow L_A$ è invertibile $\Rightarrow \dim \operatorname{Ker} L_A = 0$ e $\dim \operatorname{Im} L_A = 4$

2) Matrice associata a L_A risp. a base canonica di $M_2(\mathbb{R})$

$B = \left\{ \underset{\underline{v}_1}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}, \underset{\underline{v}_2}{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}, \underset{\underline{v}_3}{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}, \underset{\underline{v}_4}{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \right\}$ $\quad$ dim 4

cerco una matrice 4×4

$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \xmapsto{L_A} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \underline{v}_1 + 0\, \underline{v}_2 + 3\, \underline{v}_3 + 0 \cdot \underline{v}_4$

$\underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \xmapsto{L_A} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = 0 \cdot \underline{v}_1 + 1\, \underline{v}_2 + 0\, \underline{v}_3 + 3 \cdot \underline{v}_4$

$$\underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \xmapsto{L_A} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot \underline{v}_1 + 0\, \underline{v}_2 + 4\, \underline{v}_3 + 0 \cdot \underline{v}_4$$

$$\underline{v}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xmapsto{L_A} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = 0 \cdot \underline{v}_1 + 2\, \underline{v}_2 + 0\, \underline{v}_3 + 4 \cdot \underline{v}_4$$

$$[L_A]^B_B = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & \boxed{2} & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & \boxed{2} \\ \boxed{3} & 0 & \boxed{4} & 0 \\ 0 & \boxed{3} & 0 & \boxed{4} \end{pmatrix}$$

coeff di A

coeff. di A

3) $\det L_A = ?$

Scambio II e III riga

$$\det L_A = \det [L_A]^B_B = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A & O \\ O & A \end{pmatrix} = \det A \cdot \det A =$$

Scambio II e III colonna

$$\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}$$

$$= (4-6)^2 = 4$$

Fatto generale Se $X \in M_{m+n}(\mathbb{K})$ è "diagonale a blocchi"

$$X = \left(\begin{array}{c|c} A & O \\ \hline O & B \end{array}\right) \begin{matrix} m \\ n \end{matrix}$$

con $A \in M_m(\mathbb{K})$, $B \in M_n(\mathbb{K})$

matrice $m \times n$ tutta 0

matrice $n \times m$ tutta 0

$$\det X = \det A \cdot \det B$$

4) Sia $A \in M_2(\mathbb{R})$ generica.

$L_A : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$

L_A è isomorfismo $\iff$ A è invertibile

$\det L_A = (\det A)^2$

Se $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$[L_A]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{pmatrix} \qquad \det L_A = \det \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & c & d \end{pmatrix} = (\det A)^2$$

e quindi se $\det A \neq 0 \Rightarrow \det L_A \neq 0 \Rightarrow rk\, L_A = 4$

$\Rightarrow L_A$ è iniettiva e suriettiva $\Rightarrow L_A$ è invertibile

se $\det A = 0 \Rightarrow \det L_A = 0 \Rightarrow rk\, L_A < 4$

$\Rightarrow L_A$ non è iniettiva né suriettiva $\Rightarrow L_A$ non è invertibile.

Esempio di CAMBIO di BASE

Sia r l'applicazione lineare $r : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$r\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ -y \end{pmatrix}$$

$[r]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}} = ?$ $\qquad \mathcal{E} = \left\{ \underset{\underline{e}_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{\underline{e}_2}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \right\}$

$$\underline{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \xmapsto{r} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2$$

$$\underline{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \xmapsto{r} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 1\, e_1 + (-1) \cdot e_2$$

$$[r]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Considero un'altra base: $\mathcal{B} = \left\{ \underset{\underline{v}_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{\underline{v}_2}{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}} \right\}$

$$[r]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} = \underbrace{[Id]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}}_{M^{-1}} [r]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}} \underbrace{[Id]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}}_{M}$$

Calcolo M

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \xmapsto{Id} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \underline{e}_1 + 0\, \underline{e}_2$$

$$\underline{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \xmapsto{Id} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = -1 \cdot \underline{e}_1 + 2\, \underline{e}_2$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Calcolo M^{-1} invertendo M:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 \end{array}\right)$$

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \quad \text{e quindi}$$

$$[r]^B_B = \underbrace{[Id]^e_B}_{M^{-1}} [r]^e_e \underbrace{[Id]^B_e}_{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

<u>verifichiamo</u>

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \xmapsto{r} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \underline{v}_1 + 0 \, \underline{v}_2$$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 0 \, \underline{v}_1 - 1 \cdot \underline{v}_2$$

cercare questi coeff era un altro modo per calcolare $[r]^B_B$

$$[r]^e_e = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \det([r]^e_e) = 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 1 = -1$$

$$\|$$

$$[r]^B_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \det([r]^B_B) = 1 \cdot (-1) = -1$$

ESERCIZI da Martelli cap. 3

3.3 Calcolare il det. delle seguenti matrici.

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 5 & 5 \\ 4 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} I \to I - V \\ II \to II - V \\ III \to III - V \\ IV \to IV - V \end{array} \quad \det \begin{pmatrix} -4 & -3 & -2 & -1 & 0 \\ -3 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

$I_c \to I_c - V_c$

$\dots$

$IV_c \to IV_c - V_c$

$$\rightsquigarrow \det \left(\begin{array}{cccc|c} -4 & -3 & -2 & -1 & 0 \\ -3 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

è a blocchi 4×4 e 1×1

scambio $I_c \leftrightarrow IV_c$

$II_c \leftrightarrow III_c$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -2 & -3 & -4 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right) \rightsquigarrow \det = (-1)^2 (-1)^4 \cdot 5 = 5$$

ho fatto 2 scambi

<u>Fatto generale</u> se $A = \begin{pmatrix} a_{11} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}$ è triangolare superiore $n \times n$

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdots a_{nn}$$

analogamente se B: $\begin{pmatrix} b_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & b_{nn} \end{pmatrix}$

$$\det B = b_{11} \cdots b_{nn}$$

- $$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 9 & 1 & 0 \\ 11^{12} & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

sviluppo rispetto a ultima riga

i termini corrisp. non danno contributo

$$= (-1)^7 \cdot 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 9 & 1 & 0 \\ 9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 + \dots + 0 =$$

sviluppo risp. a IV riga

$$= -2 \cdot (-1)^{4+1} \cdot 9 \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 9 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

sviluppo rispetto alla II riga

$$= 2 \cdot 9 \cdot (-1)^{2+1} \cdot 4 \cdot \det \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 9 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -2 \cdot 9 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \underbrace{\det \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{-6}$$

$$= 2 \cdot 9 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6$$

Metodo alternativo:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 9 & 1 & 0 \\ 11^{12} & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$I_c \longleftrightarrow VI_c$

$II_c \longleftrightarrow V_c$

$III_c \longleftrightarrow IV_c$

$$= (-1)^3 \det \begin{pmatrix} 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 9 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 11^{12} \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} =$$

Scambio $\mathrm{II}_2 \longleftrightarrow \mathrm{III}_2$

$\mathrm{IV}_2 \longleftrightarrow \mathrm{V}_2$

$$= (-1)^2 (-1)^3 \det \begin{pmatrix} 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 9 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 11^{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= (-1)^{2+3+1} \det \begin{pmatrix} 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 9 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 11^{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 6 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 2$$

- $$\det \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & \sqrt{3} & 4 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\mathrm{V}_2 - \mathrm{IV}_2]{\mathrm{I}_2 - \mathrm{IV}_2} \det \begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & \sqrt{3}-1 & 4 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} =$$

Laplace risp IV_c

$$= 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 5 & \sqrt{3}-1 & 4 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\mathrm{IV}_2 - 2\mathrm{III}_2]{\mathrm{I}_2 - 2\mathrm{III}_2} = \det \begin{pmatrix} -5 & -2\sqrt{3} & -5 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 5 & \sqrt{3}-1 & 4 & 1 \\ -8 & -2\sqrt{3} & -8 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= 1 \cdot \det \begin{pmatrix} -5 & -2\sqrt{3} & -5 \\ 2 & 1 & 2 \\ -8 & -2\sqrt{3} & -8 \end{pmatrix} = 0$$

$=$

4/12/2023

De Martelli 3.5. Calcolo inversa:

$$\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & -1 & -5 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & -1 \end{pmatrix} \qquad \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & i & 1 & 0 \\ -i & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{II} \to \mathrm{II} + i\,\mathrm{I}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & i & 1 & 0 \\ 0 & -2 & i & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{II} \to \mathrm{II}/-2}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & i & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -i/2 & -1/2 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{I} \to \mathrm{I} - i\,\mathrm{II}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/2 & i/2 \\ 0 & 1 & -i/2 & -1/2 \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & i/2 \\ -i/2 & -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & i/2 \\ -i/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -5 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

B^{-1} :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -1 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{III} \to \text{III} - \frac{2}{3}\text{I}]{\text{II} \to \text{II} - \text{I}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -1 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{4}{3} & \frac{13}{3} & -\frac{2}{3} & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -1 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 13 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1/3 & -5/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -13/4 & 1/2 & 0 & -3/4 \\ 0 & 0 & 1 & -1/6 & 1/6 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$\text{I} \to \text{I} + \frac{1}{3}\text{II}$
$\text{II} \to \text{II} + \frac{13}{4}\text{III}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\frac{33}{12} & 1/2 & 0 & -1/4 \\ 0 & 1 & 0 & -1/24 & 13/24 & -3/4 \\ 0 & 0 & 1 & -1/6 & 1/6 & 0 \end{array}\right)$$

$\text{I} \to \text{I} + \frac{33}{12}\text{III}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/24 & 11/24 & -1/4 \\ 0 & 1 & 0 & -1/24 & 13/24 & -3/4 \\ 0 & 0 & 1 & -1/6 & 1/6 & 0 \end{array}\right)$$

Esercizi da Martelli, cap. 5

5.1 Quali matrici sono diagonalizzabili su $\mathbb{R}$?

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 6 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix} \to \det A = \cancel{-18} - 12 - 12 + 9 + \cancel{18} + 16 = 1$$

$$p_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & 1 \\ 6 & -3-\lambda & 4 \\ 3 & -2 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (-\lambda) \cdot \det \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = -\lambda \cdot (-1)$$

$$\to (-\lambda) \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = -\lambda \cdot 3$$

$$= -\lambda^3 + \lambda^2 (3 + 2 - 3) - \lambda (-1 + 0 + 3) + 1$$

$$= -\lambda^3 + 2\lambda^2 - 2\lambda + 1$$

$$p_A(1) = -1 + 2 - 2 + 1 = 0$$

$$= (\lambda - 1)\left[(-\lambda^2 - \lambda - 1) + 2\lambda\right]$$

$$\lambda^3 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda + 1)$$

$$2(\lambda^2 - \lambda) = 2\lambda(\lambda - 1)$$

$$= -(\lambda - 1)(\lambda^2 - \lambda + 1)$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

$$= -(\lambda-1)\left(\lambda - \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(\lambda - \frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)$$

$\longrightarrow$ ho 3 autovalori : 1, $\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$, $\frac{1-i\sqrt{3}}{2}$ distinti

$\notin \mathbb{R}$ $\notin \mathbb{R}$

Alcuni autovalori non sono reali $\Rightarrow$ la matrice non si diagonalizza su $\mathbb{R}$.

Tuttavia abbiamo 3 autovalori complessi distinti, tutti di molteplicità algebrica 1, per ciascuno posso trovare almeno un autovettore $\Rightarrow$ ho 3 autovettori lin. indip.

$\Rightarrow$ ho base di autovettori su $\mathbb{C}$.

Li trovo in $\mathrm{Ker}(A - \lambda I)$

$\lambda = 1, \frac{1+i\sqrt{3}}{2}, \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$

7/12/2023

Prodotti scalari: v. Martelli 7.1 - 7.2

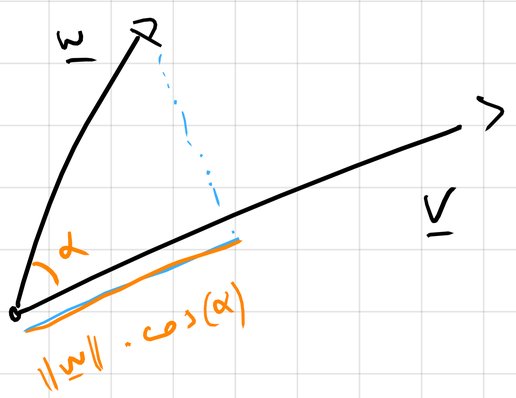
es $\mathbb{R}^3$ spazio euclideo

$\underline{v} = (x, y, z)$ $\underline{w} = (x', y', z')$

$\|\underline{v}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\|\underline{w}\| = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$

$\langle \underline{v}, \underline{w} \rangle = x \cdot x' + y \cdot y' + z \cdot z' = \|\underline{v}\| \cdot \|\underline{w}\| \cdot \cos(\hat{\alpha})$

con α angolo tra $\underline{v}$ e $\underline{w}$



$\|\underline{v}\| = \sqrt{\langle \underline{v}; \underline{v} \rangle}$ lunghezza di $\underline{v}$

Def Sia V sp vett. su $\mathbb{R}$, un prodotto scalare su V è un'applicazione

$$V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\underbrace{(\underline{v}, \underline{w})}_{\text{coppia di vettori}} \longmapsto \overbrace{\langle \underline{v}, \underline{w} \rangle}^{\text{prodotto scalare}}$$

che soddisfa queste proprietà:

(1) $\langle \underline{v} + \underline{v}', \underline{w} \rangle = \langle \underline{v}, \underline{w} \rangle + \langle \underline{v}', \underline{w} \rangle$

(2) $\langle \lambda \underline{v}, \underline{w} \rangle = \lambda \langle \underline{v}, \underline{w} \rangle$

linearità a sx

(3) $\langle \underline{v}, \underline{w} + \underline{w}' \rangle = \langle \underline{v}, \underline{w} \rangle + \langle \underline{v}, \underline{w}' \rangle$

(4) $\langle \underline{v}, \lambda \underline{w} \rangle = \lambda \langle \underline{v}, \underline{w} \rangle$

linearità a dx

bilineare

(5) $\langle \underline{v}, \underline{w} \rangle = \langle \underline{w}, \underline{v} \rangle$

simmetrico

Def Un prodotto scalare su V è

- degenere se $\exists\, \underline{v} \neq \underline{0}$ t.c. $\langle \underline{v}, \underline{w} \rangle = 0 \quad \forall\, \underline{w} \in V$
- non degenere se $\forall\, \underline{v} \neq 0 \quad \exists\, \underline{w} \in V$ t.c. $\langle \underline{v}, \underline{w} \rangle \neq 0$
- definito positivo $\forall\, \underline{v} \in V, \underline{v} \neq 0 \quad \langle \underline{v}, \underline{v} \rangle > 0$.

Prop Se un prodotto scalare è definito positivo, allora è non degenere.

Def il prodotto scalare euclideo su $\mathbb{R}^n$ è definito da

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \underline{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

trasposto di $\underline{x}$, $\underline{x}$ è vettore colonna, per cui ${}^t\underline{x}$ è vettore riga.

$$\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = {}^t\underline{x} \cdot \underline{y}$$

Es $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \qquad (1 \;\; 3) \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot (-2) + 3 \cdot 1 = 1$.

Prop Il prodotto scalare euclideo su $\mathbb{R}^n$ è definito positivo (e quindi è non degenere).

Def $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ è simmetrica se ${}^tA = A$

cioè $A = (a_{ij})_{\substack{i=1\dots n\\ j=1\dots n}}$ $\quad a_{ij} = a_{ji}$

Es $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \\ 3 & 5 & -4 \end{pmatrix}$ è simmetrica

Data una matrice simmetrica $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, possiamo usarla per definire un prodotto scalare su $\mathbb{R}^n$, e viceversa, dato un prodotto scalare su $\mathbb{R}^n$, gli possiamo associare una matrice simmetrica:

Prop Sia A matrice simmetrica in $M_{n\times n}(\mathbb{R})$, A definisce un prodotto scalare su $\mathbb{R}^n$ tramite:

$$g_A(\underline{x}, \underline{y}) = {}^t\underline{x} \cdot A \cdot \underline{y} \qquad (*)$$

cioè, se $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n\\ j=1,\dots,n}}$

$$g_A(\underline{x}, \underline{y}) = \sum_{\substack{i=1\\ j=1}}^{n} x_i A_{ij} y_j$$

ESEMPIO Se $A = I_n = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$

$g_A(\underline{x}, \underline{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_j$ è il p. scalare euclideo.

ESEMPIO $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad g_A(\underline{x}, \underline{y}) = (x_1 \ \ x_2)\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} =$

$= 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2$

Viceversa se $g : V \times V \to \mathbb{R}$ è prodotto scalare e $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ è base di V, posso definire la

Def matrice associata a g rispetto alla base $\mathcal{B}$:

$A = [g]_{\mathcal{B}}$ è $A = (a_{ij})$ $\quad a_{ij} = g(\underline{v}_i, \underline{v}_j)$

ES se g è p. scalare euclideo su $\mathbb{R}^2$

$$\mathcal{C} = \left\{ \underline{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \underline{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$[g]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} g(\underline{e}_1, \underline{e}_1) & g(\underline{e}_1, \underline{e}_2) \\ g(\underline{e}_2, \underline{e}_1) & g(\underline{e}_2, \underline{e}_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ES se g è p. scalare euclideo su $\mathbb{R}^2$

$$\mathcal{B} = \left\{ \underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

La matrice associata a g rispetto a $\mathcal{B}$ è

$$A = [g]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} g(\underline{v}_1, \underline{v}_1) & g(\underline{v}_1, \underline{v}_2) \\ g(\underline{v}_2, \underline{v}_1) & g(\underline{v}_2, \underline{v}_2) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

OSS Se A è matrice simmetrica $n \times n$, $g_A(\cdot,\cdot) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è il prodotto scalare associato, usando $\circledast$ la matrice associata a g_A rispetto alla base canonica $\mathcal{C}$ di $\mathbb{R}^n$ è A

$$[g_A]_{\mathcal{C}} = A$$

Def Sia V sp. vett. con p. scalare; due vettori $\underline{v}, \underline{w} \in V$ si dicono **ortogonali** se

$$\langle \underline{v}, \underline{w} \rangle = 0$$

Def Sia V sp. vett. con p. scalare, sia $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ base di V. La **base** $\mathcal{B}$ si dice **ortogonale** se

$$\langle \underline{v}_i, \underline{v}_j \rangle = 0 \qquad \forall\, i \neq j.$$

Prop Se g è p. scalare su V, $\mathcal{B}$ base di V, allora

$\mathcal{B}$ è base ortogonale $\iff$ $[g]_{\mathcal{B}}$ è diagonale.

Def Se V è sp. vett. con un p. scalare definito positivo, una base $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ si dice **ortonormale** se

$$\langle \underline{v}_i, \underline{v}_j \rangle = 0 \qquad \forall\, i \neq j$$
$$\langle \underline{v}_i, \underline{v}_i \rangle = 1 \qquad \forall\, i$$

ES P. scalare euclideo su $\mathbb{R}^2$, con base canonica:

$\left\{ \underline{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ è base ortonormale

ES P. scalare euclideo su $\mathbb{R}^2$ con base

$\mathcal{B} = \left\{ \underline{v}_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}, \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \right\}$ è ortonormale

$$\langle \underline{v}_1, \underline{v}_1 \rangle = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$
$$\langle \underline{v}_2, \underline{v}_2 \rangle = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$
$$\langle \underline{v}_1, \underline{v}_2 \rangle = 0$$

Teo Se V sp. vettoriale con p. scalare, esiste sempre una base ortogonale di V. (v. Martelli, Teorema 7.4.5)

Algoritmo di Gram-Schmidt

v. Martelli 8.1.7

$\langle \underline{v}, \underline{v} \rangle > 0 \quad \forall\, \underline{v} \neq \underline{0}$

Sia V sp. vett. su $\mathbb{R}$, con p. scalare def. positivo,

Sia $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ una base di V.

Voglio ottenere una base ortonormale, partendo da $\mathcal{B}$.

- $\underline{v}_1 \rightsquigarrow \underline{v}_1' := \dfrac{\underline{v}_1}{\sqrt{\langle \underline{v}_1, \underline{v}_1 \rangle}} \implies \langle \underline{v}_1', \underline{v}_1' \rangle = \left\langle \dfrac{\underline{v}_1}{\|v_1\|}, \dfrac{\underline{v}_1}{\|v_1\|} \right\rangle = \dfrac{\langle \underline{v}_1, \underline{v}_1 \rangle}{\|v_1\|^2} = 1$

$\|\underline{v}\| = \sqrt{\langle \underline{v}, \underline{v} \rangle}$

- $\underline{v}_2 \rightsquigarrow \underline{v}_2 - \langle \underline{v}_1', \underline{v}_2 \rangle \underline{v}_1' \rightsquigarrow \dfrac{\underline{v}_2 - \langle \underline{v}_1', \underline{v}_2 \rangle \underline{v}_1'}{\| \underline{v}_2 - \langle \underline{v}_1', \underline{v}_2 \rangle \underline{v}_1' \|} =: v_2'$

$$\langle \underline{v}_2', \underline{v}_2' \rangle = 1$$

$$\langle \underline{v}_2', \underline{v}_1' \rangle = \frac{1}{\| \underline{v}_2 - \langle \underline{v}_1', \underline{v}_2 \rangle \underline{v}_1' \|} \cdot \langle \underline{v}_2 - \langle \underline{v}_1', \underline{v}_2 \rangle \underline{v}_1', \underline{v}_1' \rangle =$$

$$= \quad (\,|\,) \quad \cdot \Big(\langle \underline{v}_2, \underline{v}_1' \rangle - \underbrace{\langle \underline{v}_1', \underline{v}_2 \rangle}_{\langle \underline{v}_2, \underline{v}_1' \rangle} \cdot \overbrace{\langle \underline{v}_1', \underline{v}_1' \rangle}^{1} \Big)$$

$$\langle \underline{v}_2, \underline{v}_1' \rangle - \langle \underline{v}_1', \underline{v}_2 \rangle = 0$$

- $\underline{v}_i \rightsquigarrow \overbrace{\underline{v}_i - \sum_{j<i} \langle \underline{v}_i, \underline{v}_j' \rangle \underline{v}_j'}^{\tilde{\underline{v}}_i} \rightsquigarrow \underline{v}_i' := \dfrac{\tilde{\underline{v}}_i}{\| \tilde{\underline{v}}_i \|}$

ESEMPIO

$$\underset{\underline{v}_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}, \underset{\underline{v}_2}{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}}, \underset{\underline{v}_3}{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}} \quad \text{in } \mathbb{R}^3 \quad \text{con p. scalare euclideo}$$

Voglio ottenere una base ortonormale

Passo 1

$$\underline{v}_1 \longrightarrow \frac{\underline{v}_1}{\| \underline{v}_1 \|} \qquad \| \underline{v}_1 \| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$$

$$\underline{v}_1' = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \qquad \| \underline{v}_1' \| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}} = 1$$

Passo 2

$$\underline{v}_2 \longrightarrow \underline{v}_2 - \langle \underline{v}_1', \underline{v}_2 \rangle \cdot \underline{v}_1'$$

$$\shortparallel$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - 2\sqrt{3} \cdot \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}^{\tilde{\underline{v}}_2}$$

$$\| \tilde{\underline{v}}_2 \| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\underline{v}_2' = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Passo 3

$$\underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \underline{v}_3 - \overset{4/\sqrt{3}}{\overset{\shortparallel}{\langle \underline{v}_1', \underline{v}_3 \rangle}} \underline{v}_1' - \overset{2\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+0+2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=0}{\overset{\shortparallel}{\langle \underline{v}_2', \underline{v}_3 \rangle}} \underline{v}_2' =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - 4/\sqrt{3} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ -4/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} = \tilde{\underline{v}}_3$$

$$\|\tilde{\underline{v}}_3\| = \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{16}{9} + \frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{24}{9}} = \frac{2}{3}\sqrt{6}$$

$$\underline{v}_3' = \frac{\tilde{\underline{v}}_3}{\|\tilde{\underline{v}}_3\|} = \frac{3}{2\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2/3 \\ -4/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

La base ortogonale ottenuta è

$$\mathcal{B} = \left\{ \underset{\underline{v}_1'}{\begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}}, \underset{\underline{v}_2'}{\begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}}, \underset{\underline{v}_3'}{\begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}} \right\}$$

Controllo : $\langle \underline{v}_i', \underline{v}_i' \rangle = 1$

$\langle \underline{v}_i', \underline{v}_j' \rangle = 0 \qquad i \neq j$

Cambio base per p. scalari

v. Martelli 7.2.2

Se $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ e $\mathcal{B}' = \{\underline{v}_1', \dots, \underline{v}_n'\}$

$M = [id]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$,

Sia A matrice associata a p. scalare g rispetto a $\mathcal{B}$

A' " " " " g " " $\mathcal{B}'$

Prop $\boxed{A' = {}^tM A M}$

ESEMPIO P. scalare euclideo su $\mathbb{R}^2$

$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ $\qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Cambio base con base canonica $\mathcal{C}$: $M = [id]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = A = {}^tM\, I_2\, M = \underbrace{{}^t[id]^B_C}_{} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \underbrace{[id]^B_C}_{} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

matrice rispetto a B

matrice rispetto a base canonica $\mathcal{C}$

Prodotti hermitiani

v. Martelli 11.1

Def Sia V sp. vett. su $\mathbb{C}$, un p. hermitiano su V è

$$V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$(\underline{v}, \underline{w}) \longmapsto \langle \underline{v}, \underline{w} \rangle$$

tc. che soddisfa queste proprietà:

(1) $\langle \underline{v} + \underline{v}', \underline{w} \rangle = \langle \underline{v}, \underline{w} \rangle + \langle \underline{v}', \underline{w} \rangle$

(2) $\langle \lambda \underline{v}, \underline{w} \rangle = \bar{\lambda} \langle \underline{v}, \underline{w} \rangle$

(3) $\langle \underline{v}, \underline{w} + \underline{w}' \rangle = \langle \underline{v}, \underline{w} \rangle + \langle \underline{v}, \underline{w}' \rangle$

(4) $\langle \underline{v}, \lambda \underline{w} \rangle = \lambda \langle \underline{v}, \underline{w} \rangle$

(5) $\langle \underline{v}, \underline{w} \rangle = \overline{\langle \underline{w}, \underline{v} \rangle}$

Es p. Hermitiano standard su $\mathbb{C}^n$

$$\underline{v}, \underline{w} \in \mathbb{C}^n \qquad \langle \underline{v}, \underline{w} \rangle = \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i y_i$$

Def $M \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ è hermitiana se

$$M = {}^t\bar{M} \qquad \text{(trasposta coniugata)}$$

cioè $M = (m_{ij})$ $\qquad m_{ij} = \bar{m}_{ji}$

Data M hermitiana, la associo un p. hermitiano su $\mathbb{C}^n$:

$$g_M(\underline{v}, \underline{w}) = {}^t\bar{\underline{v}}\, M\, \underline{w}$$

$$= (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)\, M \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Def Viceversa se g è p. hermitiano su V sp. vett. su $\mathbb{C}$ e B è base di V

$[g]_B = A \qquad A = (a_{ij}) \qquad a_{ij} = g(\underline{v}_i, \underline{v}_j)$

Matrici ortogonali

v. Martelli 7.5.4

Oss Se B base di $\mathbb{R}^n$ ortonormale rispetto al p. scalare euclideo, $B = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$,

A matrice con colonne i vettori di B

$$ {}^tA\,A = (m_{ij}) \quad \text{con} \quad m_{ij} = \langle \underline{v}_i, \underline{v}_j \rangle = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & \text{altrim.} \end{cases} $$

cioè $\quad {}^tA\,A = I \qquad$ cioè $\quad A^{-1} = {}^tA$

Def In questo caso A si dice matrice ortogonale

Def Se $A^{-1} = {}^t\bar{A}$ $\quad A$ si dice unitaria.

e le colonne di A sono una base ortonormale per il p. hermitiano standard su $\mathbb{C}^n$.

Teo (spettrale) Sia $S \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ simmetrica, esiste A ortogonale tc

$$ {}^tA\,S\,A = D \quad \text{diagonale} $$

Versione complessa. Sia $S \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ hermitiana, esiste A unitaria tc

$$ {}^t\bar{A}\,S\,A = D \quad \text{diagonale reale, cioè} $$

$$ D \in M_{n,n}(\mathbb{R}) $$

12/12/2023

ESERCIZI da Martelli cap. 8.

8.2 Considero i vettori di $\mathbb{R}^3$

$$ \underset{\underline{v}_1}{\underset{\shortparallel}{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}}, \quad \underset{\underline{v}_2}{\underset{\shortparallel}{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}}, \quad \underset{\underline{v}_3}{\underset{\shortparallel}{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}} $$

① Verificare se sono base e ortogonalizzarle con Gram-Schmidt.

Il procedimento di Gram-Schmidt mantiene il rango dell'insieme di vettori: se $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$ è base $\Rightarrow$ G-S produce una base. Se parto da un insieme dipendente, resta dipendente.

$\underline{v}_1, \underline{v}_2$ sono indipendenti quindi se $\underline{v}_3$ è indipendente da $\underline{v}_1$ e $\underline{v}_2$, allora $\underline{v}_3'$ sarà indipendente da $\underline{v}_1'$, $\underline{v}_2'$, altrimenti troverò $\underline{v}_3' = \underline{0}$.

- Verifico che sono base

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow rk = 3$$

- Applico G.S:

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \underline{v}_1' = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \tilde{\underline{v}}_2 = \underline{v}_2 - \langle \underline{v}_2, \underline{v}_1' \rangle \underline{v}_1' = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\cancel{\sqrt{2}}} \cdot \cancel{2} \cdot \frac{1}{\cancel{\sqrt{2}}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \underline{v}_2' = \frac{\tilde{\underline{v}}_2}{\|\tilde{\underline{v}}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$\underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \tilde{\underline{v}}_3 = \underline{v}_3 - \langle \underline{v}_3, \underline{v}_1' \rangle \underline{v}_1' - \langle \underline{v}_3, \underline{v}_2' \rangle \underline{v}_2' =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \overbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\langle \underline{v}_3, \underline{v}_1' \rangle} \cdot \overbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}^{\underline{v}_1'} - \overbrace{0}^{\langle \underline{v}_3, \underline{v}_2' \rangle} \cdot \overbrace{\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}^{\underline{v}_2'} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot (0 \cdot 1 - 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1) = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot (0 - 1 + 1) = 0$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

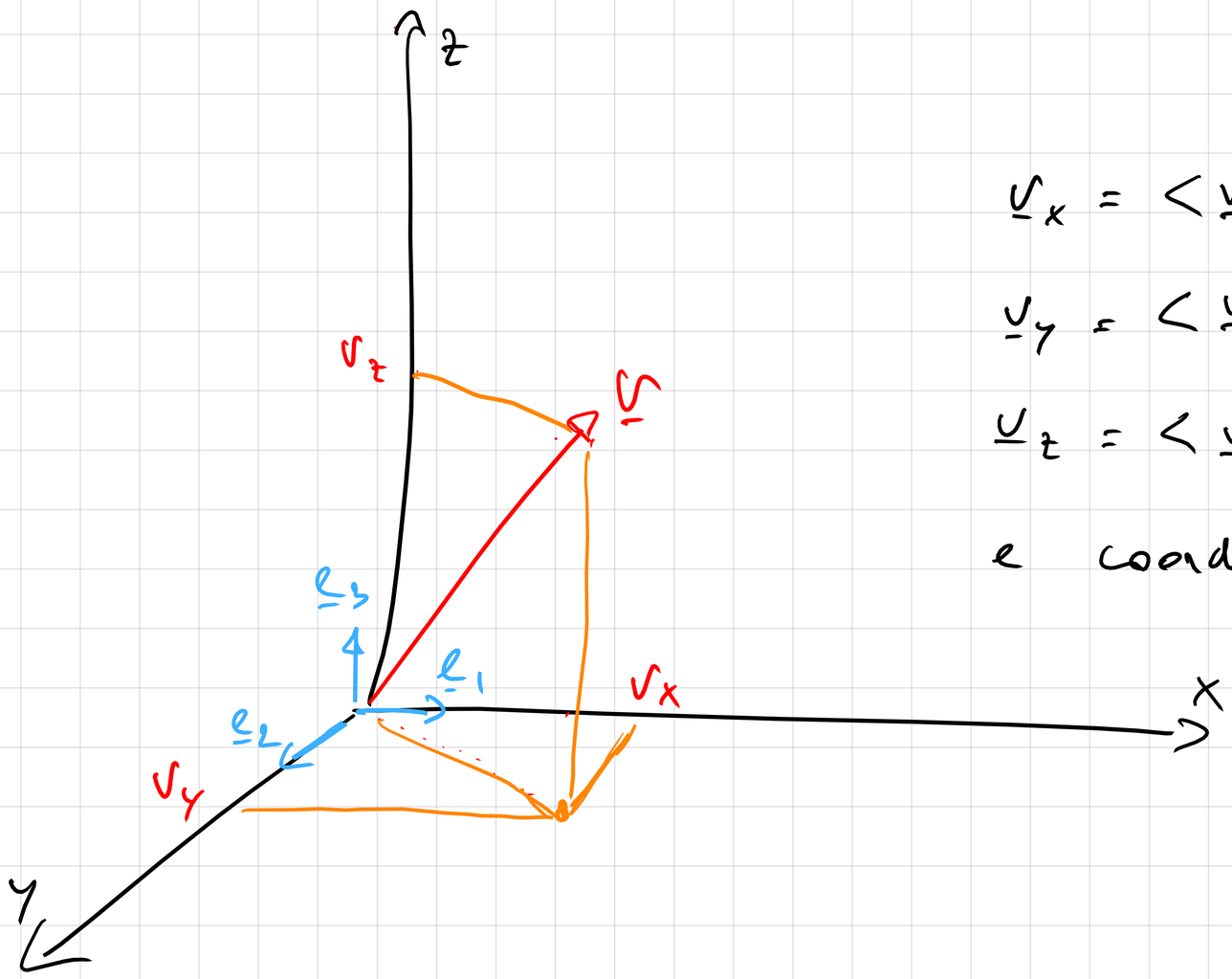
$$\underline{v}_3' = \frac{\tilde{\underline{v}}_3}{\|\tilde{\underline{v}}_3\|} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 1}} \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ho ottenuto la base ortonormale di $\mathbb{R}^3$:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}, \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \mathcal{B}$$

base ortogonale
$\langle \underline{v}_i, \underline{v}_j \rangle = 0$ se $i \neq j$
+
tutti i vettori di norma 1,
cioè $\langle \underline{v}_i, \underline{v}_i \rangle = 1 \ \forall i$

② Calcolare le coordinate del vettore $\underline{v} = 2e_1 - 5e_2 + e_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$ rispetto alla base ortogonale $\mathcal{B}$



coord. risp. a $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$

$\underline{v}_x = \langle \underline{v}, \underline{e}_1 \rangle \underline{e}_1 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} \langle \underline{v}, \underline{e}_1 \rangle \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\underline{v}_y = \langle \underline{v}, \underline{e}_2 \rangle \underline{e}_2 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 \\ \langle \underline{v}, \underline{e}_2 \rangle \\ 0 \end{pmatrix}$

$\underline{v}_z = \langle \underline{v}, \underline{e}_3 \rangle \underline{e}_3 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \langle \underline{v}, \underline{e}_3 \rangle \end{pmatrix}$

e coordinate di $\underline{v}$ rispetto a $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$ sono $\begin{pmatrix} \langle \underline{v}, \underline{e}_1 \rangle \\ \langle \underline{v}, \underline{e}_2 \rangle \\ \langle \underline{v}, \underline{e}_3 \rangle \end{pmatrix}$

Chi sono le coordinate di $\underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$ rispetto a $\mathcal{B}$?

Sono $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ con

$$a_1 = \langle \underline{v}, \underline{v}_1' \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{7}{\sqrt{2}}$$

$$a_2 = \langle \underline{v}, \underline{v}_2' \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} (2 - 5 + 1) = \frac{-2}{\sqrt{3}}$$

$$a_3 = \langle \underline{v}, \underline{v}_3' \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}, \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \left(-1 + \frac{5}{2} + 1\right) =$$

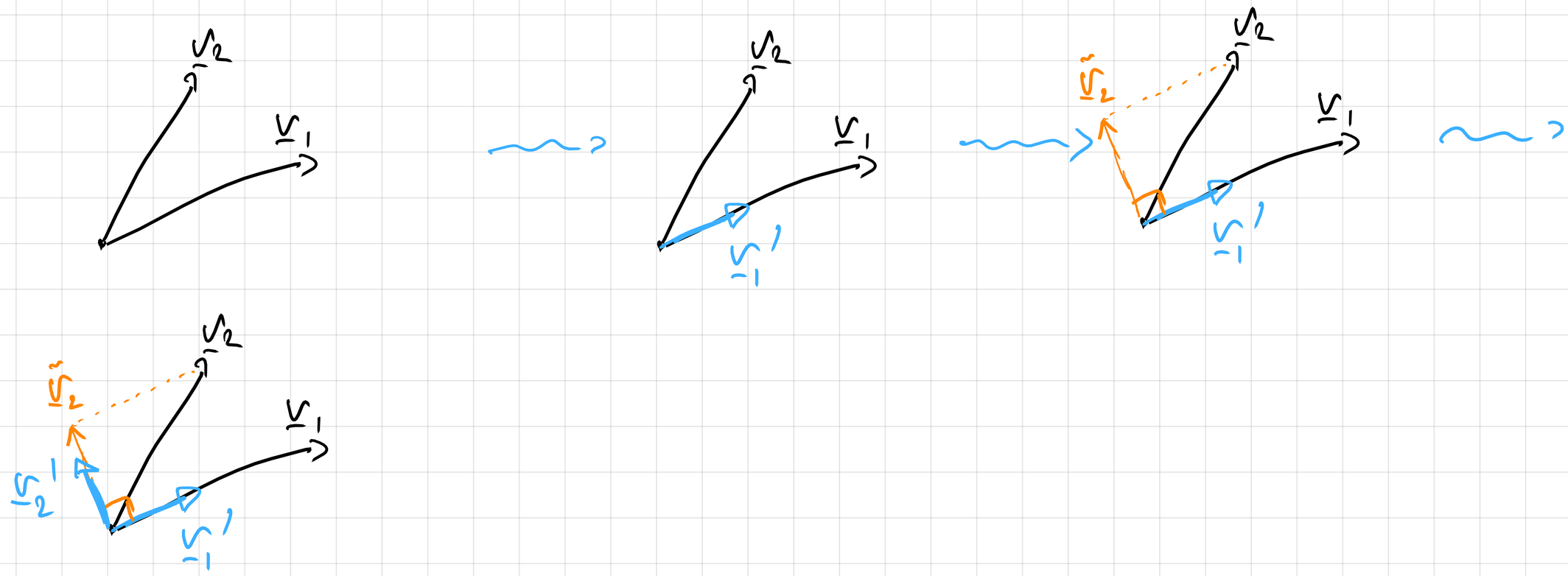
$$= \frac{5}{\sqrt{6}}.$$

Questo procedimento NON va bene se $\mathcal{B}$ non è ortogonale.
Se $\mathcal{B}$ è base qualsiasi risolvo

$$\boxed{\underline{v} = a_1 \underline{v}_1 + a_2 \underline{v}_2 + a_3 \underline{v}_3}$$

e trovo a_1, a_2, a_3.

• Cose fa G.S ?



<u>ES</u> 8.5 $\quad W \subset \mathbb{R}^4 \quad W = \{ w - x + y + z = 0 \}$

trovare una base ortonormale di W.

① passo : trovare una base qualsiasi di W :

risolvo l'eq. $w - x + y + z = 0$

soluzioni sono $\mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} x \\ y \\ z \\ w \end{matrix} \right)$

$$\underset{\underline{v}_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}, \underset{\underline{v}_2}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}, \underset{\underline{v}_3}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}$$ sono base di W

② ortogonalizzo con G.S la base trovata

$$\underline{v}_1' = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{v}_2' = \frac{1}{\sqrt{\ }} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \\ -1/2 \end{pmatrix} \quad \underline{v}_3' = \dots$$

<u>8.6</u> $\quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

trovare una base ortogonale per il p. scalare associato ad A.

• chi è il p. scalare associato ad A ?

$$g_A\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} =$$

$$= 2x_1x_2 + x_1y_2 + y_1x_2 + y_1y_2$$

<u>OSS</u> il p. scalare g_A è definito positivo :

$$g_A\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right) = 2x^2+2xy+y^2 = x^2+(x+y)^2$$

quindi $g_A(\underline{v},\underline{v}) = 0 \iff \underline{v} = \underline{0}$

e altrimenti $g_A(\underline{v},\underline{v}) > 0$

cioè $g_A(\cdot\,,\cdot)$ è un p. scalare <u>definito positivo</u>.

$\Rightarrow$ Posso cercare una base ortogonale usando G.S :

(se g_A non era definito positivo non avrei potuto)

Parto da $\underline{e}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $\underline{e}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, base canonica di $\mathbb{R}^2$

$$\underline{v}_1 = \underline{e}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \qquad \underline{v}_1' := \frac{\underline{v}_1}{\sqrt{g_A(\underline{v}_1,\underline{v}_1)}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

$$\underline{v}_2 = \underline{e}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \qquad \tilde{\underline{v}}_2 = \underline{v}_2 - g_A(\underline{v}_2,\underline{v}_1')\cdot\underline{v}_1' =$$

$$= \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}}\,1\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1/2\\1\end{pmatrix}$$

$$\underline{v}_2' = \frac{\tilde{\underline{v}}_2}{\sqrt{g_A(\tilde{\underline{v}}_2,\tilde{\underline{v}}_2)}} = \frac{\begin{pmatrix}-1/2\\1\end{pmatrix}}{\sqrt{\frac{1}{2}-1+1}} = \sqrt{2}\cdot\begin{pmatrix}-1/2\\1\end{pmatrix}$$

- Verifichiamo che $\underline{v}_1', \underline{v}_2'$ è base ortonormale per $g_A(\cdot\,,\cdot)$

$$\overset{\underline{v}_1'}{\begin{pmatrix}1/\sqrt{2} & 0\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}2 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}\overset{\underline{v}_1'}{\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}} = 1 \qquad ✓$$

$$\overset{\underline{v}_1'}{\begin{pmatrix}1/\sqrt{2} & 0\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}2 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}\overset{\underline{v}_2'}{\begin{pmatrix}-1/\sqrt{2}\\\sqrt{2}\end{pmatrix}} = \begin{pmatrix}\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1/\sqrt{2}\\\sqrt{2}\end{pmatrix} = 0 \qquad ✓$$

$$\overset{\underline{v}_2'}{\begin{pmatrix}-1/\sqrt{2} & \sqrt{2}\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}2 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}\overset{\underline{v}_2'}{\begin{pmatrix}-1/\sqrt{2}\\\sqrt{2}\end{pmatrix}} = 1 - 2\cdot 1 + 2 = 1 \qquad ✓$$

$\mathcal{C} = \{\underline{e}_1, \underline{e}_2\}$

$\mathcal{B} = \{\underline{v}_1', \underline{v}_2'\}$

$$M_{\mathcal{C}}(g_A) = A$$

$$M_{\mathcal{B}}(g_A) = D = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$$

$$M_B(g_A) = {}^T\left(M_C^B(id)\right) M_C(g_A)\, M_C^B(id)$$

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} = {}^T\begin{pmatrix}1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2}\\ 0 & \sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2}\\ 0 & \sqrt{2}\end{pmatrix}$$

rispetto al p. scalare standard.

Esercizi Da Martelli Capitolo 11

11.1 Verificare che $\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}$ ha una base ortonormale di autovettori, mentre $\begin{pmatrix}1&1\\0&2\end{pmatrix}$ non ce l'ha.

$$A = \begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix} \qquad p_A(\lambda) = \det(A-\lambda I) =$$

$$= \det\begin{pmatrix}2-\lambda & 1\\ 1 & 1-\lambda\end{pmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 1$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-4}}{2} = \frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$$

autospazio $V_{A_1} = \operatorname{Ker}(A - \lambda_1 I)$

$$= \operatorname{Ker}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2} & 1\\ 1 & -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\end{pmatrix} = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\ -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\end{pmatrix}\right)$$

verifico $\left(1 \;\; -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\cdot\begin{pmatrix}1\\ -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\end{pmatrix} =$

$$= 1 + \frac{1}{4} - \frac{5}{4} = 0 \quad ✓$$

$$V_{\lambda_2} = \operatorname{Ker}(A - \lambda_2 I)$$

$$= \operatorname{Ker}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2} & 1\\ 1 & -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\end{pmatrix} = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\ -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\end{pmatrix}\right)$$

<u>OSS</u> gli autovettori $\underline{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\ -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\end{pmatrix}$, $\underline{v}_2 = \begin{pmatrix}1\\ -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\end{pmatrix}$

sono ortogonali : $\langle \underline{v}_1, \underline{v}_2\rangle = 1 + \left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\right) = 1 + \frac{1}{4} - \frac{5}{4} = 0$

quindi A si diagonalizza rispetto a base ortogonale

$$\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1\\ -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2} & -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\end{pmatrix}^{-1} A \begin{pmatrix}1 & 1\\ -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2} & -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\end{pmatrix}$$

Posso ortonormalizzare la base

$$\begin{cases} \underline{v}_1' = \dfrac{\underline{v}_1}{\|\underline{v}_1\|} = \dfrac{\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}}{\sqrt{1+\frac{1}{5}+\frac{5}{5}+\frac{\sqrt{5}}{2}}} \\[2ex] \underline{v}_2' = \dfrac{\underline{v}_2}{\|\underline{v}_2\|} = \dfrac{\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}}{\sqrt{1+\frac{1}{5}+\frac{5}{5}-\frac{\sqrt{5}}{2}}} \end{cases}$$

base ortonormale (perchè ho normalizzato base ortogonale)

$\hookrightarrow$ la matrice di cambio base corrispondente $M = \left([v_1']_e \mid [v_2']_e \right)$ è una matrice ortogonale $\left(M^{-1} = {}^{T}M \right)$

$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

calcolo gli autovalori

$$p_B(\lambda) = \det(B - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)(2-\lambda)$$

$\Rightarrow$ autovalori $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$

Autospazi: $V_{\lambda_1} = \operatorname{Ker}(B - \lambda_1 I) = \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \operatorname{Span} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$V_{\lambda_2} = \operatorname{Ker}(B - \lambda_2 I) = \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{Span} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

chiaramente se $\underline{v}_1 = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \lambda \neq 0$

$\underline{v}_2 = \lambda' \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \lambda' \neq 0$

$B = \{ \underline{v}_1, \underline{v}_2 \}$ è base, che diagonalizza B, ma non è ortogonale (rispetto al p. scalare standard) perchè $\langle \underline{v}_1, \underline{v}_2 \rangle \neq 0$.

$$\langle \underline{v}_1, \underline{v}_2 \rangle = \lambda \lambda' \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \lambda \cdot \lambda' \cdot 1 .$$