Corso di laurea in Scienze biologiche molecolari

Prove scritte di Matematica e statistica

Prova scritta del 17 gennaio 2006

Esercizio 1 Data la funzione

$$f(x) = \frac{18x - 36}{1 + |18x - 36|} - 2x, \qquad x \in \mathbb{R},$$

se ne determini il segno, nonché gli eventuali asintoti, gli intervalli di monotonia, i punti di massimo e di minimo relativo e gli intervalli di convessità e concavità; se ne tracci infine un grafico approssimativo.

Esercizio 2 Data la funzione f definita nell'esercizio precedente, si calcoli l'integrale

$$\int_{-3}^{7} f(x)\, dx.$$

Esercizio 3 Da un mazzo costituito da quaranta carte, se ne estraggono, in sequenza, 20, rimettendo ogni volta la carta estratta nel mazzo.

(i) Si descriva un opportuno spazio probabilizzato dove inquadrare il problema.

(ii) Si calcoli la probabilità che escano tutte figure.

(iii) Si calcoli la probabilità che le prime otto carte estratte siano figure e le restanti siano tutte assi.

(iv) Si calcoli la probabilità che alla terza estrazione compaia un asso per la prima volta.

(v) Si calcoli la probabilità che nella prima estrazione sia uscito un re, sapendo che in ciascuna delle venti estrazioni è uscita una figura.

Risoluzione

Esercizio 1 (i) L'espressione della funzione f dipende dal segno della quantità $18x - 36$, che è positiva per $x > 2$ e negativa per $x < 2$. Si ha quindi

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{18x-36}{18x-35} - 2x & \text{se } x \geq 2, \\ \dfrac{18x-36}{37-18x} - 2x & \text{se } x \leq 2. \end{cases}$$

Risolviamo la disequazione $f(x) \geq 0$. Se $x \geq 2$ si ha

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{18x-36}{18x-35} - 2x \geq 0 \iff \\ \iff 18x - 36 - 2x(18x-35) \geq 0 \iff \\ \iff 36x^2 - 88x + 36 \leq 0 \iff \\ \iff 9x^2 - 22x + 9 \leq 0 \iff \\ \iff \frac{11-\sqrt{40}}{9} \leq x \leq \frac{11+\sqrt{40}}{9}. \end{aligned}$$

Poiché

$$\frac{11+\sqrt{40}}{9} < \frac{11+\sqrt{49}}{9} = 2,$$

si conclude che $f(x) < 0$ per ogni $x \geq 2$.
Se invece $x \leq 2$ si ha

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{18x-36}{37-18x} - 2x \geq 0 \iff \\ \iff 18x - 36 - 2x(37-18x) \geq 0 \iff \\ \iff 36x^2 - 56x - 36 \geq 0 \iff \\ \iff 9x^2 - 14x - 9 \geq 0 \iff \\ \iff x \leq \frac{7-\sqrt{130}}{9} \vee x \geq \frac{7+\sqrt{130}}{9}. \end{aligned}$$

Poiché

$$\frac{7+\sqrt{130}}{9} > \frac{7+\sqrt{121}}{9} = 2,$$

si conclude che quando $x \leq 2$ risulta $f(x) \geq 0$ per ogni $x \leq \frac{7-\sqrt{130}}{9}$. In definitiva

$$f(x) \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x \leq \frac{7-\sqrt{130}}{9}.$$

(ii) Per $x \to +\infty$ si ha

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{18x-36}{18x-35} - 2x \right) = 1 - \infty = -\infty,$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x} \cdot \frac{18x-36}{18x-35} - 2 \right) = 0 - 2 = -2,$$

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) + 2x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{18x-36}{18x-35} = 1;$$

quindi per $x \to +\infty$ vi è l'asintoto obliquo $y = -2x + 1$.
Similmente, per $x \to -\infty$ si ha

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{18x-36}{37-18x} - 2x \right) = -1 + \infty = +\infty,$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{x} \cdot \frac{18x-36}{37-18x} - 2 \right) = 0 - 2 = -2,$$

$$\lim_{x\to-\infty} (f(x) + 2x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{18x-36}{37-18x} = -1;$$

quindi per $x \to -\infty$ vi è l'asintoto obliquo $y = -2x - 1$.
(iii) Per $x \geq 2$ si ha

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{18x-36}{18x-35} - 2x \right) = \frac{18}{(18x-35)^2} - 2,$$

quindi per $x \geq 2$ risulta

$$\begin{aligned} f'(x) \geq 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{18}{(18x-35)^2} \geq 2 \quad \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow \quad (18x-35)^2 \leq \frac{18}{2} = 9 \quad \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow \quad -3 \leq 18x - 35 \leq 3 \quad \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow \quad \frac{16}{9} \leq x \leq \frac{19}{9}; \end{aligned}$$

poiché$\frac{16}{9} < 2 < \frac{19}{9}$ si conclude intanto che

$$f'(x) \geq 0 \quad \text{per } 2 \leq x \leq \frac{19}{9}\,.$$

D'altro canto per $x \leq 2$ si ha

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{18x-36}{37-18x} - 2x\right) = \frac{18}{(37-18x)^2} - 2,$$

quindi per $x \leq 2$ risulta

$$\begin{aligned} f'(x) \geq 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{18}{(37-18x)^2} \geq 2 \quad \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow \quad (37-18x)^2 \leq \frac{18}{2} = 9 \quad \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow \quad -3 \leq 37-18x \leq 3 \quad \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow \quad \frac{17}{9} \leq x \leq \frac{20}{9}; \end{aligned}$$

poiché$\frac{17}{9} < 2 < \frac{20}{9}$ si conclude che

$$f'(x) \geq 0 \quad \text{per } \frac{17}{9} \leq x \leq 2.$$

In definitiva,

$$f'(x) \geq 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{17}{9} \leq x \leq \frac{19}{9}\,,$$

e quindi la funzione f è decrescente sulle semirette $]-\infty, \frac{17}{9}]$ e $[\frac{19}{9}, +\infty[$, mentre è crescente nell'intervallo $[\frac{17}{9}, \frac{19}{9}]$.

(iv) Dal calcolo precedente segue che il punto $\frac{17}{9}$ è di minimo relativo per f, con minimo relativo uguale a

$$f\left(\frac{17}{9}\right) = -\frac{2}{3} - \frac{34}{9} = -\frac{40}{9}\,,$$

mentre il punto $\frac{19}{9}$ è di massimo relativo, con massimo relativo uguale a

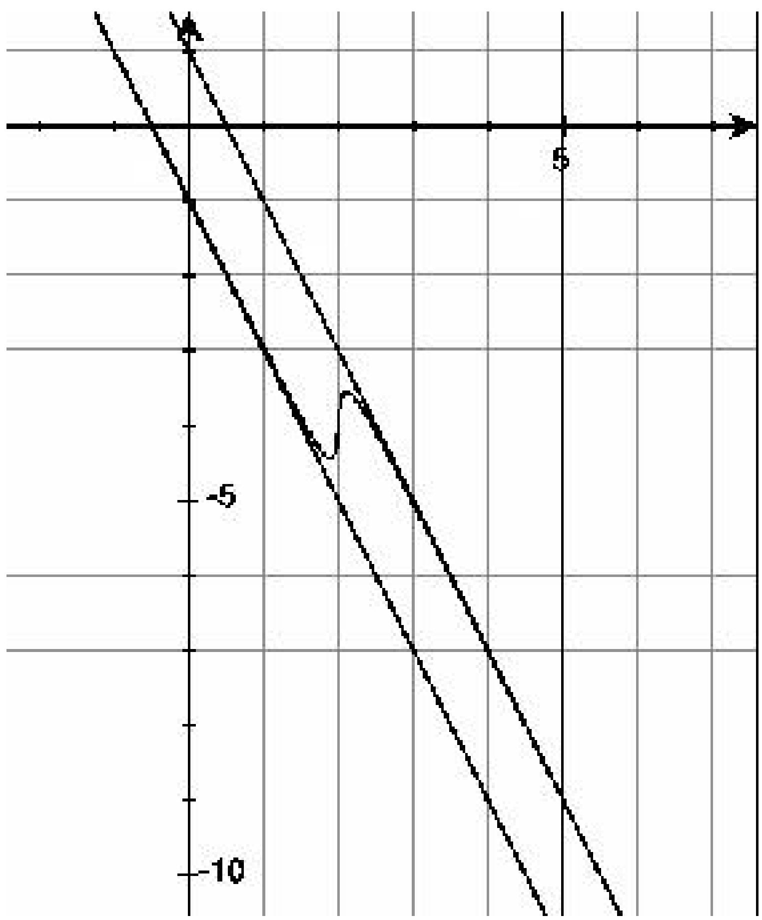
$$f\left(\frac{19}{9}\right) = \frac{2}{3} - \frac{38}{9} = -\frac{32}{9}\,.$$

(v) Analizziamo la derivata seconda: si ha

$$f''(x) = \begin{cases} -\dfrac{36 \cdot 18}{(18x-35)^3} & \text{se } x \geq 2, \\ \dfrac{36 \cdot 18}{(37-18x)^3} & \text{se } x \leq 2; \end{cases}$$

dunque $f''(x) \geq 0$ se e solo se $x \leq 2$. Pertantio f è convessa sulla semiretta $]-\infty, 2]$ ed è concava sulla semiretta $[2, \infty[$. Il punto 2 è di flesso, con

$$f(2) = -4, \qquad f'(2) = 16.$$



Esercizio 2 Si ha

$$\int_{-3}^{7} f(x)\,dx = \int_{-3}^{7} \frac{18x-36}{1+|18x-36|}\,dx - \int_{-3}^{7} 2x\,dx.$$

Il secondo integrale è immediato:

$$-\int_{-3}^{7} 2x\,dx = -[x^2]_{-3}^{7} = -49 + 9 = -40.$$

Nel primo integrale conviene effettuare il cambiamento di variabile $18x - 36 = t$, con il quale, essendo $dt = 18dx$, nonché $t = 90$ per $x = 7$ e $t = -90$ per $x = -3$, si ottiene

$$\int_{-3}^{7} \frac{18x - 36}{1 + |18x - 36|}\,dx = \frac{1}{18}\int_{-90}^{90} \frac{t}{1 + |t|}\,dt :$$

ma l'ultimo integrale è nullo, trattandosi dell'integrale di una funzione g dispari ($g(-t) = -g(t)$) su un intervallo simmetrico rispetto all'origine. Dunque

$$\int_{-3}^{7} f(x)\,dx = -40.$$

Esercizio 3 (i) Possiamo scegliere come Ω l'insieme di tutte le sequenze $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_{20})$ di 20 carte scelte (con ripetizione) da un mazzo di 40. Su Ω, che è un insieme finito, consideriamo la tribù di tutte le parti di Ω, e prendiamo come probabilità P la ripartizione uniforme: poiché Ω ha 40^{20} elementi, avremo

$$P(\omega) = \left(\frac{1}{40}\right)^{20} \qquad \forall \omega \in \Omega.$$

(ii) Sia E_1 l'evento che consiste nell'estrazione di tutte figure:

$$E_1 = \{\omega \in \Omega : \omega_i \text{ è una figura per ogni } i = 1, \dots, 20\}.$$

Si ha allora, avendosi 12 figure su 40 carte,

$$P(E_1) = \left(\frac{12}{40}\right)^{20} = \left(\frac{3}{10}\right)^{20}.$$

(iii) Sia E_2 l'evento che consiste nel pescare 8 figure nelle prime 8 estrazioni e 12 assi nelle estrazioni restanti:

$$E_2 = \{\omega \in \Omega : \omega_i \text{ è una figura se } i = 1, \dots 8,\ \omega_i \text{ è un asso se } i = 9, \dots, 20\}.$$

Si ha allora, dato che gli assi sono 4,

$$P(E_2) = \left(\frac{12}{40}\right)^{8} \cdot \left(\frac{4}{40}\right)^{12} = \left(\frac{3^8}{10^{20}}\right).$$

(iv) Sia E_3 l'evento che consiste nel non pescare un asso alle prime due estrazioni e nel pescare un asso alla terza:

$$E_3 = \{\omega \in \Omega : \omega_1, \omega_2 \text{ non sono assi, } \omega_3 \text{ è un asso}\}.$$

Si ha allora

$$P(E_3) = \left(\frac{36}{40}\right)^2 \cdot \frac{4}{40} = \frac{81}{1000}\,.$$

(v) Sia E_4 l'evento che consiste nel pescare un re alla prima estrazione

$$E_4 = \{\omega \in \Omega : \omega_1 \text{ è un re}\}.$$

Chiaramente si ha $P(E_4) = 4/40 = 1/10$. A noi interessa la probabilità condizionale $P(E_4|E_1)$; dato che

$$P(E_1|E_4) = \left(\frac{12}{40}\right)^{19}$$

(infatti, sapendo che alla prima estrazione è uscito un re, bisogna valutare la probabilità che escano figure nelle 19 estrazioni residue), dalla formula di Bayes otteniamo

$$P(E_4|E_1) = \frac{P(E_1|E_4)P(E_4)}{P(E_1)} = \frac{\left(\frac{12}{40}\right)^{19} \cdot \frac{1}{40}}{\left(\frac{3}{10}\right)^{20}} = \frac{1}{3}\,.$$

Il risultato, ovviamente, non è sorprendente; sapendo che ad ogni estrazione sono uscite figure, nella prima estrazione ci sono tre possibilità, vale a dire fante, regina e re, e solo una delle tre è favorevole.

Prova scritta del 31 gennaio 2006

Esercizio 1 Dato un triangolo equilatero T di lato a, si determini un rettangolo inscritto in T che abbia area massima, e si calcoli il valore di tale area.

Esercizio 2 Si calcoli il valore dei seguenti integrali:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2^x \sin^2 x\, dx, \qquad \int_0^\infty x e^{-2x^2}\, dx.$$

Esercizio 3 È data un'urna contenente un certo numero di palline, delle quali il 50% sono rosse, il 30% nere e il 20% bianche. Si estraggono dall'urna, in sequenza, dieci palline, rimettendole ogni volta nell'urna.

(i) Si modellizzi l'esperimento aleatorio con un opportuno spazio probabilizzato.

(ii) Si calcoli la probabilità che escano tutte palline rosse.

(iii) Si determini la probabilità che la prima pallina rossa esca alla terza estrazione.

(iv) Si calcoli la probabilità che escano dapprima tre palline rosse, poi due nere, e infine cinque palline bianche.

Risoluzione

Esercizio 1 Denotiamo con ABC il triangolo equilatero e con AH la sua altezza. Sia x la lunghezza della base CD del generico rettangolo $CDEF$ inscritto: allora AC è lungo $(a-x)/2$, mentre l'altezza CF, a causa della similitudine fra il triangolo ACF e il triangolo AHC, è pari a $\sqrt{3}(a-x)/2$. Quindi l'area del generico rettangolo inscritto è data dalla funzione

$$f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}\, x(a-x), \qquad x \in [0,a].$$

La funzione f è non negativa ed è nulla per $x = 0$ e $x = a$, allorché il rettangolo degenera in un segmento. Il massimo di f si ha quando $f'(x) = 0$: si ha

$$f'(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a - 2x = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = \frac{a}{2}\,,$$

per cui l'area massima si raggiunge per $x = a/2$; il suo valore è

$$\frac{\sqrt{3}a^2}{8}\,.$$

Si noti che l'area del massimo rettangolo inscritto è uguale alla metà dell'area del triangolo ABC.

Esercizio 2 Calcoliamo il primo integrale. Integrando per parti si ha:

$$\begin{aligned}
\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2^x \sin^2 x\, dx &= \left[\frac{2^x}{\ln 2}\sin^2 x\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2^x}{\ln 2}\cdot 2\sin x\cos x\, dx = \\
&= \left[\frac{2^x}{\ln 2}\sin^2 x\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2^x}{\ln 2}\sin 2x\, dx = \\
&= \left[\frac{2^x}{\ln 2}\sin^2 x - \frac{2^x}{(\ln 2)^2}\sin 2x\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2^x}{(\ln 2)^2}\cdot 2\cos 2x\, dx = \\
&= \left[\frac{2^x}{\ln 2}\sin^2 x - \frac{2^x}{(\ln 2)^2}\sin 2x\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2^x}{(\ln 2)^2}\cdot 2(1-2\sin^2 x)\, dx = \\
&= \left[\frac{2^x}{\ln 2}\sin^2 x - \frac{2^x}{(\ln 2)^2}\sin 2x + \frac{2^x\cdot 2}{(\ln 2)^3}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{4}{(\ln 2)^2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2^x\sin^2 x\, dx.
\end{aligned}$$

Riportando a primo membro l'ultimo integrale, si trova

$$\left(1+\frac{4}{(\ln 2)^2}\right)\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2^x \sin^2 x\, dx = \left[\frac{2^x}{\ln 2}\sin^2 x - \frac{2^x}{(\ln 2)^2}\sin 2x + \frac{2^x\cdot 2}{(\ln 2)^3}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}},$$

ovvero

$$\begin{aligned}
\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2^x \sin^2 x\, dx &= \frac{1}{\left(1+\frac{4}{(\ln 2)^2}\right)}\left[\frac{2^x}{\ln 2}\sin^2 x - \frac{2^x}{(\ln 2)^2}\sin 2x + \frac{2^x\cdot 2}{(\ln 2)^3}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \\
&= \frac{1}{\left(1+\frac{4}{(\ln 2)^2}\right)}\left(2^{\frac{\pi}{2}} - 2^{-\frac{\pi}{2}}\right)\left(\frac{1}{\ln 2}+\frac{2}{(\ln 2)^3}\right) = \\
&= \frac{\left(2^{\frac{\pi}{2}} - 2^{-\frac{\pi}{2}}\right)}{\ln 2}\,\frac{2+(\ln 2)^2}{4+(\ln 2)^2}.
\end{aligned}$$

Calcoliamo il secondo integrale. Con il cambiamento di variabile $x^2 = t$, si ha $dt = 2x\, dx$ e gli estremi di integrazione non cambiano. Quindi

$$\int_0^\infty xe^{-2x^2}\, dx = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-2t}\, dt = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}e^{-2t}\right]_0^\infty = \frac{1}{4}\left[-\lim_{t\to+\infty} e^{-2t}+1\right] = \frac{1}{4}.$$

Esercizio 3 (i) Si fissa un generico spazio probabilizzato finito $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ e su di esso si definiscono dieci variabili aleatorie $X_1, \ldots, X_{10}$ a valori nell'insieme

$\{1,2,3\}$, indipendenti fra loro, aventi tutte la legge μ seguente:

$$\mu\{X_i=1\}=\frac{50}{100}=\frac{1}{2}\,,\quad \mu\{X_i=2\}=\frac{30}{100}=\frac{3}{10}\,,\quad \mu\{X_i=3\}=\frac{20}{100}=\frac{1}{5}\,.$$

La variabile X_i rappresenta l'esito della i-esima estrazione, e i valori 1, 2, 3 denotano rispettivamente l'uscita di una pallina rossa, nera o bianca.

(ii) A causa dell'indipendenza delle X_i, la probabilità dell'evento che consiste nell'uscita di dieci palline rosse è data da

$$P\{X_1=1,\,\ldots,X_{10}=1\}=(P\{X_1=1\})^{10}=\frac{1}{2^{10}}=\frac{1}{1028}\,.$$

(iii) La probabilità dell'evento che consiste nell'uscita delle prima pallina rossa alla terza estrazione è data da

$$\begin{aligned}P\{X_1\neq 1,\,X_2\neq 2,\,X_3=1\} &= (1-P\{X_1=1\})^2P\{X_1=1\}=\\ &= \left(\frac{3}{10}+\frac{1}{5}\right)^2\frac{1}{2}=\frac{1}{2^3}=\frac{1}{8}\,.\end{aligned}$$

(iv) La probabilità dell'evento che consiste nell'uscita di tre palline rosse, seguite da due nere e da cinque bianche, è data da

$$\begin{aligned}&P\{X_1=1,\,\ldots,X_3=1,\,X_4=2,\,X_5=2,\,X_6=3,\,\ldots X_{10}=3\}=\\ &\quad=(P\{X_1=1\})^3(P\{X_1=2\})^2(P\{X_1=3\})^5=\frac{1}{2^3}\cdot\left(\frac{3}{10}\right)^2\cdot\frac{1}{5^5}=\\ &\quad=\frac{9}{2500000}\,.\end{aligned}$$

Prova scritta del 16 febbraio 2006

Esercizio 1 Calcolare, se esistono, i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+2x-3\sqrt{|x|^3}}{4x-5x^2}\,,\qquad \lim_{x\to+\infty}\left(e^{x-x^2}-e^{x^2-x}\right)\,.$$

Esercizio 2 Data la funzione

$$f(x)=\frac{\sin x}{2+\cos x}\,,$$

trovarne il massimo ed il minimo sull'intervallo $[0, 2\pi]$ e calcolarne l'integrale sullo stesso intervallo.

Esercizio 3 Nella stazione di Empoli fermano treni di tre tipi: regionali (il 70% del totale), interregionali (il 20%) e intercity (il 10%). Un'indagine statistica ha rilevato la seguente tabella di ritardi medi:

	puntuale	0-10 min.	10-30 min.	30-60 min.
regionale	20%	30%	40%	10%
interreg.	30%	30%	20%	20%
intercity	50%	30%	10%	10%

Arriva alla stazione un treno.

(i) Calcolare la probabilità che il treno sia in ritardo.

(ii) Assodato che il treno è in ritardo, calcolare la probabilità che si tratti di un treno intercity.

(iii) Calcolare la probabilità che il treno abbia un ritardo compreso fra 10 e 30 minuti.

(iv) Calcolare la probabilità che si tratti di un treno interregionale, sapendo che esso ha un ritardo di 20 minuti.

(v) Calcolare la fascia media di ritardo per un treno regionale.

Risoluzione

Esercizio 1 Per il primo limite, possiamo scrivere

$$\frac{x^2 + 2x - 3\sqrt{|x|^3}}{4x - 5x^2} = \frac{2x\left(\frac{x}{2} + 1 - \frac{3}{2}\frac{\sqrt{|x|^3}}{x}\right)}{4x\left(1 - \frac{5}{4}x\right)},$$

da cui

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 + 2x - 3\sqrt{|x|^3}}{4x - 5x^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{0 + 1 - 0}{1 - 0} = \frac{1}{2}.$$

Per il secondo limite invece risulta

$$e^{x - x^2} - e^{x^2 - x} = e^{x(1-x)} - e^{x(x-1)};$$

quando $x \to +\infty$ si ha $(x(1-x) \to -\infty$ mentre $x(x-1) \to +\infty$, e dunque ricaviamo

$$\lim_{x\to+\infty} \left(e^{x-x^2} - e^{x^2-x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(e^{x(1-x)} - e^{x(x-1)}\right) = 0 - \infty = -\infty.$$

Esercizio 2 La funzione f è continua su $[0, 2\pi]$ e quindi ha massimo e minimo per il teorema di Weierstrass. Osserviamo che

$$f'(x) = \frac{\cos x(2+\cos x) - \sin x(-\sin x)}{(2+\cos x)^2} = \frac{2\cos x + 1}{(2+\cos x)^2}\,,$$

da cui

$$f'(x) \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \cos x \geq -\frac{1}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad 0 \leq x \leq \frac{2}{3}\pi \;\text{ oppure }\; \frac{4}{3}\pi \leq x \leq 2\pi.$$

Pertanto f ha massimi locali nel punto $\frac{2}{3}\pi$ e nell'estremo 2π, e minimi locali nel punto $\frac{4}{3}\pi$ e nell'estremo 0, con

$$f\left(\frac{2}{3}\pi\right) = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{2-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\,, \quad f\left(\frac{4}{3}\pi\right) = -\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{2-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}\,, \quad f(0) = f(2\pi) = 0.$$

Confrontando i valori si vede che

$$\max_{[0,2\pi]} f = f\left(\frac{2}{3}\pi\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}\,, \qquad \min_{[0,2\pi]} f = f\left(\frac{4}{3}\pi\right) = -\frac{1}{\sqrt{3}}\,.$$

Infine risulta

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{2+\cos x}\,dx = \left[-\ln(2+\cos x)\right]_0^{\pi} = -\ln 3 + \ln 3 = 0,$$

cosa che poteva essere stabilita immediatamente osservando che la funzione integranda è periodica di periodo 2π, per cui

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{2+\cos x}\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin x}{2+\cos x}\,dx,$$

ed è anche dispari, da cui

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin x}{2+\cos x}\,dx = 0.$$

Esercizio 3 Denotiamo rispettivamente con R, IR, IC l'evento consistente nel fatto che il treno sopraggiunto alla stazione sia regionale, interregionale o intercity. Si tratta evidentemente di eventi incompatibili e le loro probabilità sono

$$P(R) = \frac{7}{10}, \quad P(IR) = \frac{2}{10}, \quad P(IC) = \frac{1}{10}.$$

Notiamo anche che la tabella esprime le probabilità condizionali di registrare un dato ritardo conoscendo il tipo di treno.

(i) Indichiamo con A l'evento consistente nel fatto che il treno è puntuale: allora dobbiamo calcolare $P(A^c)$, ossia $1 - P(A)$. Calcoliamo $P(A)$: dalla formula di disintegrazione e dai valori della tabella otteniamo

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A|R)P(R) + P(A|IR)P(IR) + P(A|IC)P(IC) = \\ &= \frac{2}{10} \cdot \frac{7}{10} + \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{10} + \frac{5}{10} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{4}, \end{aligned}$$

e in definitiva

$$P(A^c) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

(ii) Dobbiamo calcolare $P(IC|A^c)$. Dalla formula di Bayes segue che

$$P(IC|A^c) = \frac{P(A^c|IC)P(IC)}{P(A^c)},$$

mentre da (i) e dalla tabella assegnata ricaviamo

$$P(IC|A^c) = \frac{\frac{30+10+10}{100}}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{3}.$$

(iii) Detto C l'evento che consiste nel fatto che il treno abbia un ritardo fra 10 e 30 minuti, si ha, dalla formula di disintegrazione e dai dati della tabella,

$$\begin{aligned} P(C) &= P(C|R)P(R) + P(C|IR)P(IR) + P(C|IC)P(IC) = \\ &= \frac{4}{10} \cdot \frac{7}{10} + \frac{2}{10} \cdot \frac{2}{10} + \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} = \frac{33}{100}. \end{aligned}$$

(iv) Dobbiamo calcolare $P(IR|C)$, poiché sappiamo che il nostro treno ha un ritardo compreso fra 10 e 30 minuti. Dalla formula di Bayes abbiamo

$$P(IR|C) = \frac{P(C|IR)P(IR)}{P(C)} = \frac{\frac{2}{10} \cdot \frac{2}{10}}{\frac{33}{100}} = \frac{4}{33}.$$

(v) La fascia media di ritardo per un treno regionale si descrive come una fascia di minuti compresi fra a e b, ove a e b si calcolano mediante le formule

$$a = 0 \cdot \frac{2}{10} + 0 \cdot \frac{3}{10} + 10 \cdot \frac{4}{10} + 30 \cdot \frac{1}{10} = 7,$$
$$b = 0 \cdot \frac{2}{10} + 10 \cdot \frac{3}{10} + 30 \cdot \frac{4}{10} + 60 \cdot \frac{1}{10} = 21.$$

In definitiva, un treno regionale ritarda mediamente fra 7 e 21 minuti.

Prova scritta del 12 giugno 2006

Esercizio 1 Data la funzione

$$f(x) = \ln \frac{e^{x/2}}{e^x + 1}, \qquad x \in \mathbb{R},$$

(i) verificare che essa è pari, ossia che $f(-x) = f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$;

(ii) determinare i limiti all'infinito e gli eventuali asintoti;

(iii) individuare gli intervalli di monotonia;

(iv) provare che f è concava;

(v) tracciare il grafico di f.

Esercizio 2 Calcolare l'integrale

$$\int_0^{\sqrt{3}} t\sqrt{1+t^2}e^{\sqrt{1+t^2}}\, dt.$$

Esercizio 3 Da un mazzo di 52 carte non truccate se ne pescano cinque in sequenza. Si calcoli la probabilità:

(i) di ottenere un "colore" (5 carte dello stesso seme);

(ii) di ottenere una scal=a reale (5 carte dello stesso seme e con valori consecutivi, con l'asso che può stare solo al primo posto o all'ultimo, dopo il re);

(iii) di ottenere un poker (4 carte dello stesso valore), sapendo che le prime due carte pescate sono assi.

Risoluzione

Esercizio 1 (i) La funzione f è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$ e risulta

$$f(-x) = \ln \frac{e^{-x/2}}{e^{-x}+1} = \ln \frac{e^x \cdot e^{-x/2}}{e^x(e^{-x}+1)} = \ln \frac{e^{x/2}}{e^x+1} = f(x),$$

ossia f è pari.

(ii) Risulta

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$$

Vediamo se ci sono asintoti obliqui: a $+\infty$ si ha

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln e^{x/2} - \ln e^x - \ln(1+e^{-x})}{x} = \\
&= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{2} - 1 - \frac{\ln(1+e^{-x})}{x}\right) = -\frac{1}{2}\,, \\
\lim_{x\to+\infty} \left(f(x) + \frac{x}{2}\right) &= \lim_{x\to+\infty} \left(\ln e^{x/2} - \ln e^x - \ln(1+e^{-x}) + \frac{x}{2}\right) = \\
&= -\lim_{x\to+\infty} \ln(1+e^{-x}) = 0,
\end{aligned}$$

cosicché per $x \to +\infty$ vi è l'asintoto obliquo di equazione $y = -x/2$.
Poiché la funzione è pari, si conclude che per $x \to -\infty$ vi è l'asintoto obliquo di equazione simmetrica della precedente rispetto all'asse y, vale a dire $y = +x/2$.

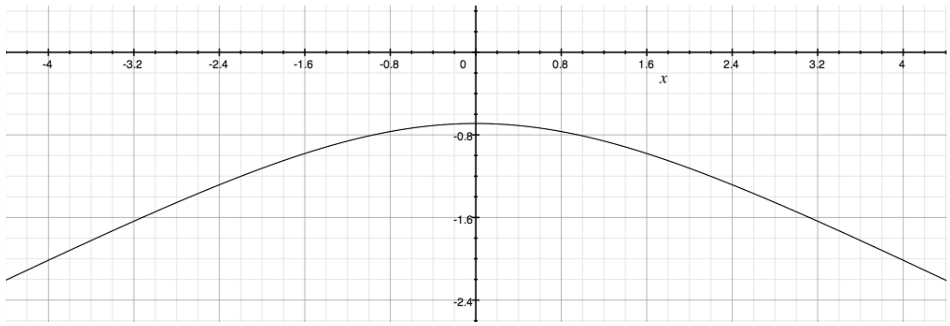
(iii) Cerchiamo gli intervalli di crescenza e decrescenza. Si ha, con facili calcoli,

$$f'(x) = \frac{1-e^x}{2(1+e^x)}\,,$$

cosicché $f'(x) \geq 0$ se e solo se $e^x \leq 1$, ossia se e solo se $x \leq 0$. In definitiva f cresce per $x \leq 0$ e decresce per $x \geq 0$. Il punto 0 è di massimo assoluto per f e si ha $f(0) = -\ln 2$. Naturalmente f non ha minimo, essendo illimitata inferiormente.

(iv) La funzione f è concava poiché, con facili calcoli,

$$f''(x) = -\frac{2e^x}{(1+e^x)^2} < 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$



(v) Il grafico di f è disegnato qui sopra.

Esercizio 2 Con la sostituzione $x = \sqrt{1+t^2}$, l'intervallo di integrazione $[0, \sqrt{3}]$ si trasforma in $[1, 2]$, risulta $dx = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\, dt$ e l'integrale diventa

$$\int_0^{\sqrt{3}} t\sqrt{1+t^2} e^{\sqrt{1+t^2}}\, dt = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} (1+t^2)\, e^{\sqrt{1+t^2}}\, dt = \int_1^2 x^2\, e^x\, dx.$$

Si ha allora, integrando per parti,

$$\begin{aligned} \int_1^2 x^2\, e^x\, dx &= [x^2 e^x]_1^2 - \int_1^2 2xe^x\, dx = [x^2 e^x - 2xe^x]_1^2 + 2\int_1^2 e^x\, dx = \\ &= [x^2 e^x - 2xe^x + e^x]_1^2 = e^2. \end{aligned}$$

Pertanto l'integrale proposto è uguale a e^2.

Esercizio 3 (i) Dato che il mazzo non è truccato, ciascuna carta può essere pescata con uguale probabilità. Il totale delle cinquine di carte ottenibili è dato dal coefficiente binomiale $\binom{52}{5}$; le cinquine con carte tutte di un dato seme son $\binom{13}{5}$, e poiché i semi sono 4, otteniamo che la probabilità richiesta è

$$\frac{4\binom{13}{5}}{\binom{52}{5}} = \frac{33}{3332} = \simeq 0,099.$$

(ii) Stavolta le cinquine che costituiscono una scala reale di un dato seme sono 10 (dalla minima, asso-2-3-4-5, alla massima, 10-J-Q-K-asso): i semi sono sempre 4, e dunque la probabilità richiesta è

$$\frac{4 \cdot 10}{\binom{52}{5}} = \frac{5}{389844} \simeq 0.0000128.$$

(iii) Sapendo che sono usciti due assi, l'unica possibilità è quella di fare un poker d'assi. Dobbiamo quindi estrarre, nelle tre pescate che restano, gli ultimi due assi dalle 50 carte restanti: dunque, due delle tre pescate devono dare un asso e una deve dare una carta diversa. Ciò può accedere solo in tre modi: la carta diversa esec alla prima, oppure alla seconda, oppure alla terza delle tre pescate. Quindi la probabilità richiesta vale

$$\frac{3}{\binom{50}{5}} = \frac{3}{19600} \simeq 0.00015.$$

Prova scritta del 6 luglio 2006

Esercizio 1 Si consideri la funzione

$$f(x) = \ln \frac{x^2 + 3x}{x - 1}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

(i) Si determinino l'insieme di definizione ed il segno di f, nonché gli eventuali asintoti;

(ii) si indichino gli intervalli di monotonia e i punti di massimo e di minimo relativo;

(iii) si disegni il grafico approssimativo di f.

Esercizio 2 Si calcoli l'integrale

$$\int_0^3 \frac{2u(\ln(1 + u^2))^2}{1 + u^2} \, du.$$

Esercizio 3 Tre urne indistinguibili contengonmo ciascuna 10 palline rosse e gialle. Nella prima urna le palline rosse sono il 30% del totale, nella seconda sono la metà, nella terza sono il 60%.
Si sceglie a caso un'urna e da essa si estraggono in sequenza tre palline.

(i) Calcolare la probabilità di estrarre tre palline rosse.

(ii) Avendo estratto tre palline rosse, calcolare la probabilità di aver scelto la prima urna.

Risoluzione

Esercizio 1 La funzione è definita per

$$\frac{x(x+3)}{x-1} > 0,$$

ossia per $-3 < x < 0$ e $x > 1$. Analizziamo i limiti negli estremi dell'insieme di definizione. Si ha

$$\lim_{x\to -3^+} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty,$$

e quindi nei punti $x = -3$, $x = 0$, $x = 1$ si hanno tre asintoti verticali. Inoltre

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty,$$

e poiché

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x + \ln(x+3) - \ln(x-1)}{x} = 0,$$

si conclude che non vi sono asintoti obliqui né orizzontali per $x \to +\infty$.
La funzione è positiva per

$$\frac{x(x+3)}{x-1} > 1,$$

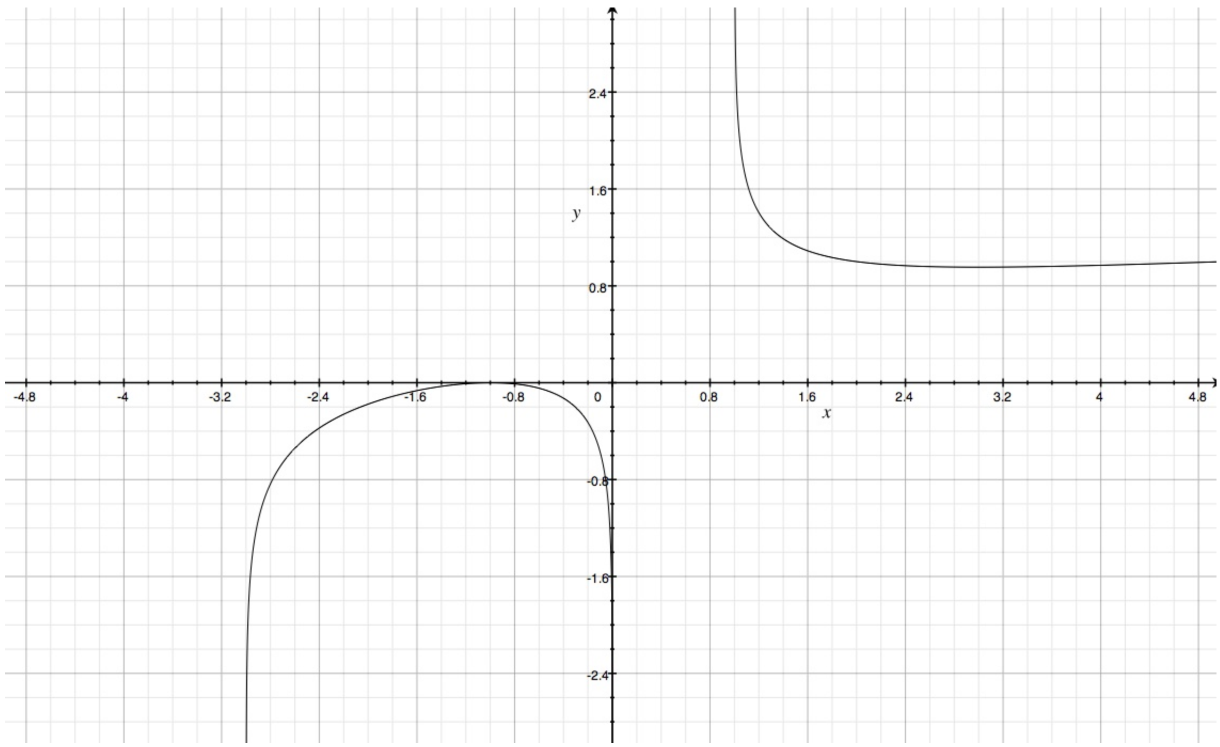
ossia per $x > 1$, come si verifica facilmente.
Analizziamo la derivata prima. Si ha, con facili calcoli,

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x(x+3)(x-1)}\,, \qquad x \in\,]-3, 0[\, \cup\,]1, +\infty[,$$

cosicché

$$f'(x) \geq 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \in\,]-3, -1] \;\cup\; [3, +\infty[.$$

Dunque la f è crescente in $]-3,-1]$ e in $[3,+\infty[$; in particolare $x = -1$ è punto di massimo relativo con $f(-1) = 0$, mentre $x = 3$ è punto di minimo relativo con $f(3) = 2\ln 3$. Il grafico di f è il seguente:



Esercizio 2 Con la sostituzione $t = 1 + u^2$, si trova $dt = 2u\,du$ e l'integrale si trasforma in

$$\int_1^{10} \frac{(\ln t)^2}{t}\,dt.$$

A questo punto l'ulteriore sostituzione $x = \ln t$ dà $dx = \frac{dt}{t}$ e l'integrale diventa

$$\int_0^{\ln 10} x^2 dx,$$

e quindi l'integrale proposto vale

$$\int_0^3 \frac{2u\,(\ln(1+u^2))^2}{1+u^2}\,du = \int_0^{\ln 10} x^2\,dx = \frac{(\ln 10)^3}{3}\,.$$

Esercizio 3 (a) Denotiamo con U_1, U_2 e U_3 gli eventi che consistono nella scelta di una delle tre urne; la probabilità di ciscuno di essi è $1/3$. L'evento A, che consiste nell'estrarre in sequenza tre palline rosse, si decompone nei tre eventi disgiunti

$$A = (A \cap U_1) \cup (A \cap U_2) \cup (A \cap U_3);$$

inoltre

$$P(A|U_1) = \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{8}, \quad P(A|U_2) = \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8}, \quad P(A|U_3) = \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8}.$$

Pertanto, utilizzando la formula di disintegrazione,

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap U_1) + P(A \cap U_2) + P(A \cap U_3) = \\ &= P(A|U_1)P(U_1) + P(A|U_2)P(U_2) + P(A|U_3)P(U_3) = \\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{6}{720} + \frac{60}{720} + \frac{120}{720}\right) = \frac{31}{360}\,. \end{aligned}$$

(b) Dobbiamo calcolare $P(U_1|A)$ e per questo basta far uso della formula di Bayes:

$$P(U_1|A) = \frac{P(A|U_1)P(U_1)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{6}{720}}{\frac{31}{360}} = \frac{1}{31}\,.$$

Prova scritta del 25 settembre 2006

Esercizio 1 Si consideri la funzione

$$f(x) = e^{-x}\sqrt{1+x^2}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

(i) Si determinino gli eventuali asintoti di f;

(ii) si indichino gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di massimo e di minimo relativo;

(iii) si trovino gli intervalli di convessità e gli eventuali punti di flesso;

(iv) si disegni il grafico approssimativo di f.

Esercizio 2 Si calcoli l'integrale

$$\int_0^3 \frac{\ln(x+2)}{(x+4)^2}\,dx.$$

Esercizio 3 Due urne indistinguibili, denominate T e C, contengono entrambe dodici palline, alcune bianche e alcune rosse. Nell'urna T le palline bianche sono un terzo del totale, mentre nell'urna C le palline bianche e rosse sono in pari quantità. Si lancia una moneta e, a seconda del risultato "testa" (T) o "croce" (C), si estraggono in sequenza quattro palline dall'urna corrispondente.

(i) Calcolare la probabilità di estrarre quattro palline bianche.

(ii) Avendo estratto quattro palline bianche, calcolare la probabilità che il risultato del lancio della moneta sia stato "testa".

Risoluzione

Esercizio 1 (i) La funzione è definita per per ogni $x \in \mathbb{R}$ ed è sempre positiva. Vediamo se ci sono asintoti. Si ha

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0,$$

cosicché la funzione ha l'asintoto orizzontale $y = 0$ per $x \to +\infty$. Inoltre

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty,$$

e poiché

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty,$$

si conclude che non vi sono asintoti obliqui né orizzontali per $x \to -\infty$.

(ii) Analizziamo la derivata prima. Si ha, con facili calcoli,

$$f'(x) = -e^{-x}\sqrt{1+x^2} + e^{-x}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{e^{-x}}{\sqrt{1+x^2}}(-1-x^2+x),$$

cosicché

$$f'(x) \geq 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad -x^2+x-1 \geq 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \text{mai.}$$

Dunque la f è decrescente in tutto $\mathbb{R}$ e non vi sono punti di massimo relativo né di minimo relativo.

(iii) Analizziamo la derivata seconda. Con qualche calcolo si trova

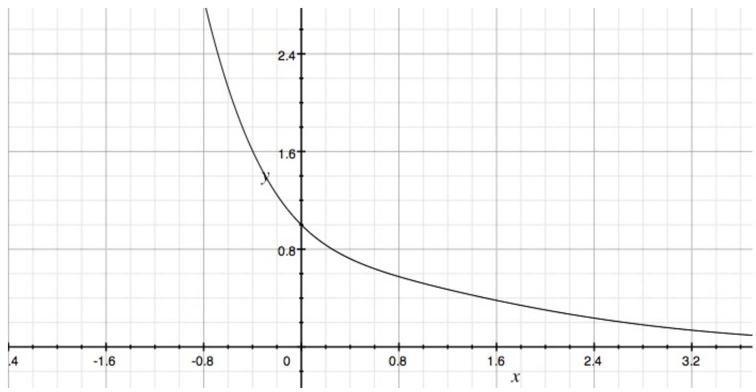
$$\begin{aligned} f''(x) &= e^{-x}\sqrt{1+x^2} - 2e^{-x}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - e^{-x}\frac{1}{(1+x^2)^{3/2}} = \\ &= \frac{e^{-x}}{(1+x^2)^{3/2}}\left((1+x^2)^2 - 2x(1+x^2) + 1\right). \end{aligned}$$

In particolare

$$f''(x) = \frac{e^{-x}}{(1+x^2)^{3/2}}((1+x^2)(1-x)^2+1) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R};$$

dunque f è convessa su $\mathbb{R}$ e non vi sono punti di flesso.

(iv) Il grafico di f è il seguente:



Esercizio 2 Integrando per parti si trova

$$\begin{aligned}
\int_0^3 \frac{\ln(x+2)}{(x+4)^2}\,dx &= \left[-\frac{1}{x+4}\ln(x+2)\right]_0^3 + \int_0^3 \frac{dx}{(x+4)(x+2)} = \\
&= -\frac{\ln 5}{7} + \frac{\ln 2}{4} + \frac{1}{2}\int_0^3 \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+4}\right) dx = \\
&= -\frac{\ln 5}{7} + \frac{\ln 2}{4} + \left[\frac{1}{2}\ln\frac{x+2}{x+4}\right]_0^3 = \\
&= -\frac{\ln 5}{7} + \frac{\ln 2}{4} + \frac{1}{2}\ln\frac{5}{7} - \frac{1}{2}\ln\frac{1}{2} = \\
&= \frac{5}{14}\ln 5 - \frac{1}{2}\ln 7 + \frac{3}{4}\ln 2.
\end{aligned}$$

Esercizio 3 (i) Denotiamo con T e C gli eventi che consistono nell'uscita di "testa" e di "croce"; la probabilità di ciascuno di essi è $1/2$. L'evento A, che consiste nell'estrarre in sequenza quattro palline bianche, si decompone nei due eventi disgiunti

$$A = (A \cap T) \cup (A \cap C).$$

Inoltre, poiché le palline bianche sono quattro nell'urna T e sei nell'urna C,

$$P(A|T) = \frac{4}{12} \cdot \frac{3}{11} \cdot \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{9} + \frac{1}{495},$$
$$P(A|C) = \frac{6}{12} \cdot \frac{5}{12} \cdot \frac{4}{12} \cdot \frac{3}{12} = \frac{1}{33}.$$

Pertanto, utilizzando la formula di disintegrazione,

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap T) + P(A \cap C) = \\ &= P(A|T)P(T) + P(A|C)P(C) = \\ &= \frac{1}{990} + \frac{1}{66} = \frac{16}{990} = \frac{8}{495}. \end{aligned}$$

(ii) Dobbiamo calcolare $P(T|A)$ e per questo basta far uso della formula di Bayes:

$$P(T|A) = \frac{P(A|T)P(T)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{495} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{8}{495}} = \frac{1}{16}.$$

Prova scritta del 15 gennaio 2007

Esercizio 1 Si consideri la funzione

$$f(x) = e^x \, \frac{2x+1}{2x-1}.$$

(i) Determinare l'insieme di definizione e gli eventuali asintoti della funzione f.

(ii) Individuare gli intervalli di monotonia e gli eventuali massimi e minimi relativi di f.

(iii) Tracciare un grafico approssimativo di f.

(iv) Scrivere il polinomio di Taylor di centro 0 e grado 2 della funzione f.

Esercizio 2 Si calcoli l'integrale

$$\int_1^{\sqrt{3}} x \, \arctan x \, dx.$$

Esercizio 3 Un'urna contiene 7 palline bianche e 3 rosse. Vengono effettuate 5 estrazioni successive, senza reimbussolamento. Determinare:

(i) la probabilità che la prima pallina rossa esca alla quarta estrazione;

(ii) la probabilità che, nell'ipotesi (i), anche la quinta pallina estratta sia rossa;

(iii) la probabilità che nelle cinque estrazioni escano consecutivamente almeno due palline rosse.

Risoluzione

Esercizio 1 (i) La funzione f è definita per ogni $x \neq \frac{1}{2}$ (valore per il quale si annulla il denominatore). Calcoliamo i limiti negli estremi del dominio di definizione:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0 \cdot 1 = 0,$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \cdot 1 = +\infty,$$

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}^-} = e^{\frac{1}{2}} \cdot 2 \cdot (-\infty) = -\infty, \quad \lim_{x \to \frac{1}{2}^+} = e^{\frac{1}{2}} \cdot 2 \cdot (+\infty) = +\infty.$$

Si ha in particolare l'asintoto orizzontale $y = 0$ per $x \to -\infty$ e l'asintoto verticale $x = \frac{1}{2}$ per $x \to \frac{1}{2}^-$ e per $x \to \frac{1}{2}^+$. Quando $x \to +\infty$ non c'è asintoto obliquo poiché

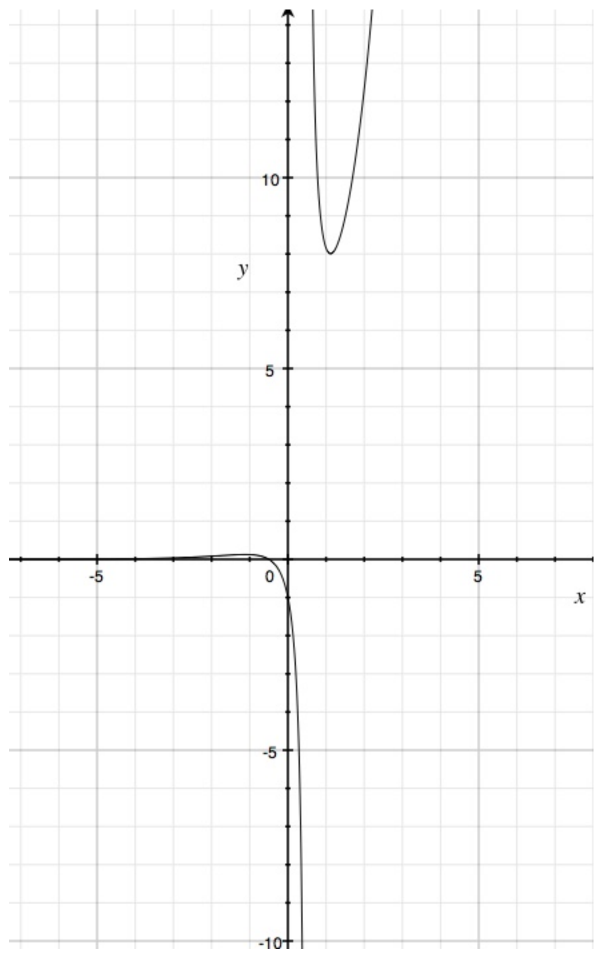
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty.$$

(ii) Calcoliamo la derivata di f. Si ha

$$f'(x) = e^x \frac{2x+1}{2x-1} + e^x \frac{2(2x-1) - 2(2x+1)}{(2x-1)^2} = \frac{e^x}{(2x-1)^2} (4x^2 - 5).$$

Quindi $f'(x) \geq 0$ se e solo se $4x^2 \geq 5$, ossia se e solo se $x \in]-\infty, -\frac{\sqrt{5}}{2}] \cup [\frac{\sqrt{5}}{2}, +\infty[$. Dunque f cresce sulla semiretta $]-\infty, -\frac{\sqrt{5}}{2}]$, decresce nell'intervallo $[-\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{\sqrt{5}}{2}]$ e cresce sulla semiretta $[\frac{\sqrt{5}}{2}, +\infty[$. In particolare, $x = -\frac{\sqrt{5}}{2}$ è punto di massimo relativo per f, mentre $x = \frac{\sqrt{5}}{2}$ è punto di minimo relativo per f.

(iii) Il grafico di f è approssimativamente il seguente:



(iv) Risulta $f(0) = -1$ e $f'(0) = -5$; inoltre, essendo

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{e^x}{(2x-1)^2}\,(4x^2-5)\right) = \\ &= e^x\left[\frac{4x^2-5}{(2x-1)^2} + \frac{8x}{(2x-1)^2} - 4\cdot\frac{4x^2-5}{(2x-1)^3}\right], \end{aligned}$$

si ottiene $f''(0) = 15$. Pertanto il polinomio cercato è

$$p(x) = -1 - 5x + \frac{15}{2}\,x^2.$$

Esercizio 2 Integrando per parti si ha

$$\int_1^{\sqrt{3}} x \arctan x\, dx \quad = \quad \frac{1}{2}\left[x^2 \arctan x\right]_1^{\sqrt{3}} - \frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{1+x^2}\, dx.$$

D'altra parte, risulta

$$\begin{aligned} \int_1^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{1+x^2}\, dx &= \int_1^{\sqrt{3}} \frac{x^2+1-1}{1+x^2}\, dx = \\ &= \int_1^{\sqrt{3}} \left[1 + \frac{1}{1+x^2}\right] dx = [x + \arctan x]_1^{\sqrt{3}}\,, \end{aligned}$$

da cui finalmente

$$\int_1^{\sqrt{3}} x \arctan x\, dx = \frac{1}{2}\left[(x^2-1)\arctan x - x\right]_1^{\sqrt{3}}.$$

Essendo $\arctan\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$, concludiamo che

$$\int_1^{\sqrt{3}} x \arctan x\, dx = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}-1}{2}\,.$$

Esercizio 3 (i) Denotiamo con B_i, R_i e X_i rispettivamente gli eventi che descrivono l'uscita all'i-esima estrazione di una pallina bianca, rossa o qualunque. Dobbiamo calcolare la probabilità che la sequenza delle prime quattro palline estratte sia $BBBR$, ossia la probabilità dell'evento $B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap R_4$. Poiché non vi è reimbussolamento, alla prima estrazione si hanno 7 palline bianche su 10 totali, alla seconda (supposto che la prima pallina estratta sia stata bianca) se ne hanno 6 bianche su 9, alla terza (supposto che le prime due estratte siano state bianche) 5 bianche su 8, alla quarta (supposto che le prime tre estratte siano state bianche) 3 rosse su 7. Si ottiene pertanto

$$P(B_1) = \frac{7}{10},\ P(B_2|B_1) = \frac{6}{9},\ P(B_3|B_1\cap B_2) = \frac{5}{8},\ P(R_4|B_1\cap B_2\cap B_3) = \frac{3}{7}.$$

Quindi, utilizzando ripetutamente la definizione di probabilità condizionale, si ha

$$\begin{aligned} &P(B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap R_4) = \\ &\quad = P(R_4|B_1\cap B_2\cap B_3)\, P(B_1\cap B_2\cap B_3) = \\ &\quad = P(R_4|B_1\cap B_2\cap B_3)\, P(B_3|B_1\cap B_2)\, P(B_1\cap B_2) = \\ &\quad = P(R_4|B_1\cap B_2\cap B_3)\, P(B_3|B_1\cap B_2)\, P(B_2|B_1)\, P(B_1) = \\ &\quad = \frac{3}{7}\cdot\frac{5}{8}\cdot\frac{6}{9}\cdot\frac{7}{10} = \frac{1}{8}\,. \end{aligned}$$

(ii) Dobbiamo calcolare la probabilità che la sequenza delle palline estratte sia stavolta $BBBRR$. Ripetendo il ragionamento precedente, si trova

$$P(B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap R_4 \cap R_5) = \frac{7}{10} \cdot \frac{6}{9} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{24}\,.$$

(iii) Dobbiamo calcolare la probabilità P_0 che si realizzino almeno due estrazioni consecutive di palline rosse. Le sequenze che danno luogo a tale evento sono:

$$RRXXX, BRRXX, BBRRX, RBRRX, BBBRR, RBBRR, BRBRR.$$

Si tratta di estrazioni mutuamente esclusive; quindi la probabilità cercata sarà la somma delle probabilità di realizzazione di ciascuna sequenza. Risulta

$$P(R_1 \cap R_2 \cap X_3 \cap X_4 \cap X_5) = \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} = \frac{1}{15}\,,$$

$$P(B_1 \cap R_2 \cap R_3 \cap X_4 \cap X_5) = \frac{7}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} = \frac{7}{120}\,,$$

$$P(B_1 \cap B_2 \cap R_3 \cap R_4 \cap X_5) = \frac{7}{10} \cdot \frac{6}{9} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} = \frac{1}{40}\,,$$

$$P(R_1 \cap B_2 \cap R_3 \cap R_4 \cap X_5) = \frac{3}{10} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{2}{8} \cdot \frac{1}{7} = \frac{1}{120}\,,$$

$$P(B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap R_4 \cap R_5) = \frac{7}{10} \cdot \frac{6}{9} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{24}\,,$$

$$P(R_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap R_4 \cap R_5) = \frac{3}{10} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{6}{8} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{120}\,,$$

$$P(B_1 \cap R_2 \cap B_3 \cap R_4 \cap R_5) = \frac{7}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{6}{8} \cdot \frac{2}{7} \cdot 16 = \frac{1}{120}\,.$$

Pertanto la probabilità cercata è

$$P_0 = \frac{1}{15} + \frac{7}{120} + \frac{1}{40} + \frac{1}{120} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{120} = \frac{13}{60}\,.$$