Ingegneria civile - ambientale - edile

Analisi 1 - Prove scritte dal 2017

Prova scritta del 9 giugno 2017

Esercizio 1 Determinare i numeri complessi z che risolvono l'equazione

$$i\,\overline{z} - |z|\,z - z\,i = 1.$$

Esercizio 2 (i) Posto

$$a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{1+\frac{3}{n}} - \sqrt[4]{1+\sin\frac{2}{n}}}{\ln\left[\left(1+\frac{1}{2n}\right)^3\right]},$$

si calcoli $L = \lim_{n\to\infty} a_n$.

(ii) La serie $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - L)$ è convergente?

Esercizio 3 Calcolare, se esiste,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin\sqrt{x} - \sqrt{\sin x}}{\sqrt{x}\,(\cos\sqrt{x} - \sqrt{\cos x})}.$$

Esercizio 4 (i) Determinare l'insieme di definizione della funzione

$$f(x) = \ln|\cos x - \sin x|$$

e verificare che essa è periodica di periodo π;

(ii) Descrivere il grafico di f sull'intervallo $\left]\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right[$.

Esercizio 5 (i) Calcolare l'integrale improprio

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln x\,dx.$$

(ii) Provare che l'integrale improprio

$$\int_0^{\pi} \ln\sin x\,dx$$

è finito e strettamente negativo.

(iii)* Calcolare il valore di tale integrale.

Esercizio 6 Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 4y' + 4y = x(e^{2x} - 1) \\ y(0) = -1, \quad y'(0) = -1. \end{cases}$$

Risoluzione

Esercizio 1 L'equazione si può scrivere nella forma

$$i(\overline{z}-z)-|z|\,z=1,$$

e poiché $\overline{z}-z=-2i\,\mathrm{Im}\,z$, conviene porre $z=x+iy$ e trasformare l'equazione in un sistema separando parti reali e parti immaginarie:

$$i(-2iy)-(x+iy)\sqrt{x^2+y^2}=1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} 2y-x\sqrt{x^2+y^2}=1 \\ y\sqrt{x^2+y^2}=0, \end{cases}$$

da cui

$$y=0, \qquad \text{e di conseguenza} \qquad x|x|=-1.$$

Pertanto $x=-1$. L'unica soluzione dell'equazione è dunque $z=-1$.

Esercizio 2 Utilizziamo gli sviluppi di Taylor per $x\to 0$ e $t\to 0$:

$$\sqrt[3]{1+x}=1+\frac{1}{3}\,x-\frac{1}{9}\,x^2+\mathrm{o}(x^2),$$

$$\sqrt[4]{1+x}=1+\frac{1}{4}\,x-\frac{3}{32}\,x^2+\mathrm{o}(x^2),$$

$$\sin t=t-\frac{1}{6}\,t^3+\mathrm{o}(t^4),$$

$$\ln[(1+x)^3]=3\ln(1+x)=3x-\frac{9}{2}\,x^2+\mathrm{o}(x^2).$$

Allora, per $n\to\infty$,

$$\sqrt[3]{1+\frac{3}{n}}=1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

$$\sqrt[4]{1+\sin\frac{2}{n}}=1+\frac{1}{4}\,\sin\frac{2}{n}-\frac{3}{32}\,\sin^2\frac{2}{n}+\mathrm{o}\left(\sin^2\frac{1}{n}\right)=1+\frac{1}{2n}-\frac{3}{8n^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

$$\ln\left[\left(1+\frac{1}{2n}\right)^3\right]=3\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)=\frac{3}{2n}-\frac{3}{8n^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Dunque

$$a_n=\frac{\frac{1}{2n}-\frac{5}{8n^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)}{\frac{3}{2n}-\frac{3}{8n^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)}\to\frac{1}{3} \quad \text{per } n\to\infty,$$

cosicché $L=\frac{1}{3}$.

(ii) Risulta per $n\to\infty$, in virtù di quanto stabilito sopra,

$$a_n-\frac{1}{3}=\frac{\frac{1}{2n}-\frac{5}{8n^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)-\frac{1}{3}\left[\frac{3}{2n}-\frac{3}{8n^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]}{\frac{3}{2n}-\frac{3}{8n^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)}\simeq\frac{-\frac{1}{2n^2}}{\frac{3}{2n}}\simeq-\frac{1}{3n}\,.$$

Ne deduciamo, per il criterio del confronto asintotico, che la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n - \frac{1}{3}\right)$ è divergente negativamente.

Esercizio 3 Ricordiamo gli sviluppi di Taylor per $t \to 0$:

$$\sin t = t - \frac{1}{6}\,t^3 + \frac{1}{120}\,t^5 + \mathrm{o}(t^6),$$

$$\cos t = 1 - \frac{1}{2}\,t^2 + \frac{1}{24}\,t^4 + \mathrm{o}(t^5).$$

Posto $t = \sqrt{x}$, con $x \to 0^+$, si ricava

$$\sin\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{6}\,x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{120}\,x^{\frac{5}{2}} + \mathrm{o}(x^3),$$

$$\cos\sqrt{x} = 1 - \frac{1}{2}\,x + \frac{1}{24}\,x^2 + \mathrm{o}(x^{\frac{5}{2}}),$$

ed anche

$$\begin{aligned}\sqrt{\sin x} &= \sqrt{x - \frac{1}{6}\,x^3 + \mathrm{o}(x^4)} = \sqrt{x}\sqrt{1 - \frac{1}{6}\,x^2 + \mathrm{o}(x^3)} = \\ &= \sqrt{x}\left[1 + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{6}\,x^2 + \mathrm{o}(x^3)\right) + \mathrm{o}(x^2)\right] = x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{12}x^{\frac{5}{2}} + \mathrm{o}(x^{\frac{5}{2}}),\end{aligned}$$

$$\sqrt{\cos x} = \sqrt{1 - \frac{1}{2}\,x^2 + \mathrm{o}(x^3)} = 1 - \frac{1}{4}\,x^2 + \mathrm{o}(x^3).$$

Da qui ricaviamo infine, per $x \to 0^+$,

$$\frac{\sin\sqrt{x} - \sqrt{\sin x}}{\sqrt{x}\,(\cos\sqrt{x} - \sqrt{\cos x})} = \frac{-\frac{1}{6}\,x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{120}\,x^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{12}\,x^{\frac{5}{2}} + \mathrm{o}(x^{\frac{5}{2}})}{x^{\frac{1}{2}}\left(-\frac{1}{2}\,x + \frac{1}{24}\,x^2 + \frac{1}{4}\,x^2 + \mathrm{o}(x^{\frac{5}{2}})\right)} \to \frac{1}{3}\,.$$

Esercizio 4 (i) La funzione f è definita in tutti i punti in cui $\sin x \neq \cos x$, ossia i punti $\frac{\pi}{4} + k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$. Se x non è uno di tali punti,

$$f(x+\pi) = \ln|\cos(x+\pi) - \sin(x+\pi)| = \ln|-\cos x + \sin x| = \ln|\cos x - \sin x| = f(x),$$

dunque f è π-periodica.

(ii) Anzitutto, negli estremi dell'intervallo vi sono due asintoti verticali:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}^+} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to\frac{5\pi}{4}^-} f(x) = -\infty.$$

Inoltre, nell'intervallo $\left]\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right[$ si ha $\sin x > \cos x$, quindi

$$f(x) = \ln(\sin x - \cos x) \qquad \forall x \in \left]\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right[\,.$$

Dunque

$$f'(x) = \frac{\cos x + \sin x}{\sin x - \cos x} \geq 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \cos x + \sin x \geq 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \in \left]\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right[\ ;$$

per cui f ha massimo nel punto $x = \frac{3\pi}{4}$, dove vale $\ln\sqrt{2}$.
Poi,

$$f''(x) = \frac{-(\sin x - \cos x)^2 - (\cos x + \sin x)^2}{(\sin x - \cos x)^2} \leq 0 \quad \forall x \in \left]\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right[\ ,$$

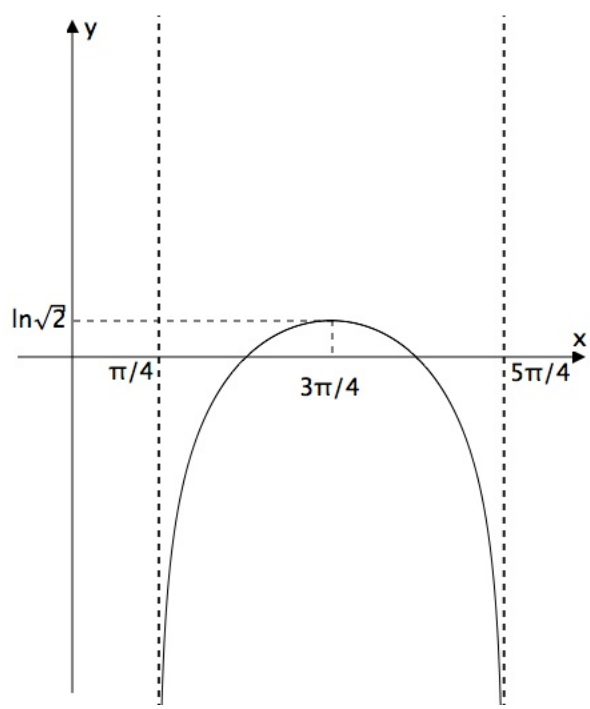
cosicché f è concava in tale intervallo. Si noti infine che

$$f\left(\frac{3\pi}{4} + t\right) = f\left(\frac{3\pi}{4} - t\right) \quad \forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\ ,$$

ossia il grafico di f è simmetrico rispetto alla retta di equazione $x = \frac{3\pi}{4}$: infatti, essendo $\sin\frac{3\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} = -\cos\frac{3\pi}{4}$, si può scrivere

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{3\pi}{4} - t\right) &= \ln\left(\sin\left(\frac{3\pi}{4} - t\right) - \cos\left(\frac{3\pi}{4} - t\right)\right) = \\
&= \ln\left(\sin\frac{3\pi}{4}\cos t - \cos\frac{3\pi}{4}\sin t - \cos\frac{3\pi}{4}\cos t - \sin\frac{3\pi}{4}\sin t\right) = \\
&= \ln\left(\sin\frac{3\pi}{4}\cos t - \cos\frac{3\pi}{4}\sin t + \sin\frac{3\pi}{4}\cos t + \cos\frac{3\pi}{4}\sin t\right) = \\
&= \ln\left(\sin\left(\frac{3\pi}{4} + t\right) - \cos\left(\frac{3\pi}{4} + t\right)\right) = f\left(\frac{3\pi}{4} + t\right).
\end{aligned}$$

Dalle informazioni raccolte otteniamo il grafico seguente:



Esercizio 5 (i) Integrando per parti, una primitiva di $\ln x$ è $x(\ln x - 1)$; quindi

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln x\, dx = \Big[x(\ln x - 1)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}\left(\ln\frac{\pi}{2} - 1\right) - 0 = \frac{\pi}{2}\left(\ln\frac{\pi}{2} - 1\right).$$

(ii) L'integrale improprio esiste sicuramente, poiché l'integrando è una funzione negativa in $]0,\pi[$. Per valutarne la convergenza, notiamo anzitutto, utilizzando il fatto che $\sin(\pi - t) = \sin t$ per ogni $t \in [0,\pi]$, che si ha

$$\int_0^{\pi} \ln\sin x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x\, dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln\sin x\, dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x\, dx.$$

Adesso utilizziamo la parte (i) già dimostrata, scrivendo

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\ln\frac{\sin x}{x} + \ln x\right] dx,$$

ed osserviamo che il primo addendo dell'integrando a secondo membro è una funzione continua in $\left[0, \frac{pi}{2}\right]$: infatti $\frac{\sin x}{x}$ è continua e strettamente positiva se le si assegna il valore 1 in $x = 0$. Dunque si ha

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\frac{\sin x}{x}\, dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln x\, dx,$$

e i due integrali sono entrambi finiti. Ne segue che l'integrale proposto è a sua volta finito. Infine, esso è strettamente negativo:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x\, dx \le \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\sin x\, dx \le \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\sin\frac{\pi}{4}\, dx = -\frac{\pi}{4}\ln\sqrt{2} < 0.$$

(iii) Il calcolo esplicito dell'integrale è possibile grazie alle proprietà della funzione logaritmo ed alle simmetrie delle funzioni seno e coseno. Anzitutto notiamo che, essendo $\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ per ogni $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, si ha, ponendo nell'ultima uguaglianza $t = \frac{\pi}{2} - x$,

$$\int_0^{\pi} \ln\sin x\, dx == 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x\, dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\cos t\, dt.$$

Se due numeri coincidono, coincide con essi anche la loro media: dunque

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x\, dx &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\ln\sin x + \ln\cos x)\, dx = \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x\cos x)\, dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\frac{\sin 2x}{2}\, dx.\end{aligned}$$

Quindi, posto $2x = t$ e notando che $\sin t$ è simmetrica rispetto alla retta $t = \frac{\pi}{2}$,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x\, dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\frac{\sin 2x}{2}\, dx = \frac{1}{4}\int_0^{\pi} \ln\frac{\sin t}{2}\, dt = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\frac{\sin t}{2}\, dt.$$

Ne segue

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x\, dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \frac{\sin t}{2}\, dt = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin t\, dt - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln 2\, dt.$$

Pertanto

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x\, dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x\, dx - \frac{\pi \ln 2}{4}\,,$$

e in conclusione

$$\int_0^{\pi} \ln \sin x\, dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x\, dx = \pi \ln 2.$$

Esercizio 6 L'equazione caratteristica associata all'equazione differenziale lineare omogenea è

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0,$$

ed ha la soluzione $\lambda = 2$ di molteplicità 2. Perciò le soluzioni dell'equazione omogenea sono le funzioni delle forma

$$c_1\, e^{2x} + c_2 x\, e^{2x}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Il secondo membro dell'equazione differenziale è composto da due addendi, $x\, e^{2x}$ e $-x$; quindi possiamo applicare il metodo dei coefficienti indeterminati. Poiché l'esponente della funzione $x\, e^{2x}$ è radice di molteplicità 2 dell'equazione caratteristica, cerchiamo una soluzione particolare $u(x)$ di $u''(x) - 4u'(x) + 4u(x) = xe^{2x}$ della forma

$$u(x) = x^2(Ax + B)e^{2x}.$$

Derivando e raccogliendo i termini si ha

$$\begin{aligned} u(x) &= (Ax^3 + Bx^2)e^{2x},\\ u'(x) &= \big(2Ax^3 + (3A + 2B)x^2 + 2Bx\big)e^{2x},\\ u''(x) &= \big(4Ax^3 + (12A + 4B)x^2 + (6A + 8B)x + 2B\big)e^{2x}, \end{aligned}$$

da cui, semplificando,

$$x\, e^{2x} = u''(x) - 4u'(x) + 4u(x) = (6Ax + 2B)e^{2x};$$

dunque

$$B = 0, \quad A = \frac{1}{6}\,.$$

cosicché

$$u(x) = \frac{1}{6}\, x^3\, e^{2x}.$$

Poiché 0 non risolve l'equazione caratteristica, cerchiamo una soluzione particolare $v(x)$ di $v''(x) - 4v'(x) + 4v(x) = -x$ della forma

$$v(x) = ax + b.$$

Allora $v'(x) = a$, $v''(x) = 0$ e dunque

$$-x = v''(x) - 4v'(x) + 4v(x) = -4a + 4ax + 4b,$$

da cui $a = b$ e $-4a = 1$. Pertanto $a = -\frac{1}{4} = b$ e si trova

$$v(x) = \frac{x+1}{4}\,.$$

Si conclude che le soluzioni dell'equazione differenziale non omogenea sono tutte le funzioni $y(x)$ della forma

$$y(x) = c_1\, e^{2x} + c_2 x\, e^{2x} + \frac{1}{6}\, x^3\, e^{2x} - \frac{x+1}{4}\,, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Imponiamo infine le condizioni di Cauchy $y(0) = y'(0) = -1$: osservato che

$$y'(x) = (2c_1 + c_2)\, e^{2x} + 2c_2 x\, e^{2x} + \left(\frac{1}{2}\, x^2 + \frac{1}{3}\, x^3\right) e^{2x} - \frac{1}{4}\,,$$

deve essere

$$-1 = y(0) = c_1 - \frac{1}{4}, \qquad -1 = y'(0) = 2c_1 + c_2 - \frac{1}{4},$$

da cui $c_1 = -\frac{3}{4}$ e $c_2 = \frac{3}{4}$. Pertanto la soluzione del problema di Cauchy è

$$y(x) = -\frac{3}{4}\, e^{2x} + \frac{3}{4}\, x\, e^{2x} + \frac{1}{6}\, x^3\, e^{2x} - \frac{x+1}{4}\,.$$

Prova scritta del 30 giugno 2017

Esercizio 1 Si consideri la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{n}{2}}}{n(1+e^n)}\, x^{3n}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

(i) Per quali $x \in \mathbb{R}$ la serie converge assolutamente?

(ii) Per quali $x \in \mathbb{R}$ la serie è convergente?

Esercizio 2 Sia

$$f(x) = \int_0^x e^{-t} \arctan t\, dt, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Senza tentare di calcolare l'integrale (il che è impossibile), si tracci un grafico approssimativo di f, specificando per quanto possibile: (a) limiti agli estremi del dominio, (b) eventuali asintoti, (c) intervalli di crescenza e decrescenza, (d) punti di massimo o minimo relativo, (e) intervalli di concavità e convessità.

Esercizio 3 Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 3y = e^{-x} + \cos x, \qquad x \in \mathbb{R}, \\ y(0) = 1, \;\; y'(0) = 2. \end{cases}$$

Risoluzione

Esercizio 1 (i) Si tratta di una serie di potenze: quindi l'intervallo dove essa converge assolutamente è dalla forma $]-R,R[$, ove R è il raggio di convergenza. Ma la presenza del monomio x^{3n} rende scomodo il calcolo diretto di R. Quindi utilizziamo il criterio della radice per la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{n}{2}}}{n(1+e^n)}\,|x|^{3n}.$$

Si ha

$$\exists \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{e^{\frac{n}{2}}}{n(1+e^n)}\,|x|^{3n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{\frac{1}{2}}|x|^3}{e} = e^{-\frac{1}{2}}|x|^3.$$

Risulta evidentemente

$$e^{-\frac{1}{2}}|x|^3 < 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad |x| < e^{\frac{1}{6}},$$

e dunque la serie converge assolutamente in $\left]-e^{\frac{1}{6}}, e^{\frac{1}{6}}\right[$. D'altra parte, la serie dei moduli diverge per $|x| \geq e^{\frac{1}{6}}$, per confronto asintotico con la serie armonica.

(ii) Per $x = e^{\frac{1}{6}}$ la serie è a termini positivi e diverge per confronto asintotico con la serie armonica. Per $x = -e^{\frac{1}{6}}$ la serie è a segni alterni e diventa

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{e^n}{n(1+e^n)}.$$

Per poter applicare il criterio di Leibniz occorre verificare che

$$a_n = \frac{e^n}{n(1+e^n)}$$

è positiva (evidente), infinitesima (ovvio), decrescente (unica verifica non banale). A questo scopo consideriamo la funzione

$$g(t) = \frac{e^t}{t(1+e^t)}, \qquad t > 0,$$

e vediamo se g è decrescente: si ha

$$g'(t) = \frac{e^t \cdot t(1+e^t) - e^t(1+e^t+t\,e^t)}{t^2(1+e^t)^2} = \frac{e^t(t-1-e^t)}{t^2(1+e^t)^2};$$

dato che risulta $e^t > 1+t > t > t-1$ per ogni $t > 0$, si conclude che $g'(t) < 0$ per ogni $t > 0$ e dunque a_n è una successione strettamente decrescente. Pertanto, per il criterio di Leibniz la serie converge nel punto $x = -e^{\frac{1}{6}}$, e in definitiva la serie data converge nell'intervallo $\left[-e^{\frac{1}{6}}, e^{\frac{1}{6}}\right[$.

Esercizio 2 La funzione f verifica

$$f(0) = 0, \qquad f(x) > 0 \quad \forall x \neq 0;$$

infatti l'integrando è una funzione continua, positiva per $x > 0$ e negativa per $x < 0$, da cui

$$\int_0^x e^{-t} \arctan t \, dt = -\int_x^0 e^{-t} \arctan t \, dt > 0 \qquad \forall x < 0.$$

Inoltre

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \int_0^\infty e^{-t} \arctan t \, dt = y_0 \in \mathbb{R};$$

infatti

$$0 < y_0 = \int_0^\infty e^{-t} \arctan t \, dt < \frac{\pi}{2} \int_0^\infty e^{-t} \, dt = \frac{\pi}{2} \, .$$

Dunque vi è l'asintoto orizzontale $y = y_0$ per $x \to \infty$, con il valore di y_0 non calcolabile. Invece, ponendo $s = -t$,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} f(x) &= \int_0^{-\infty} e^{-t} \arctan t \, dt = \int_0^\infty e^s \arctan(-s) \, (-ds) = \\ &= \int_0^\infty e^s \arctan s \, ds \geq \int_1^\infty e^s \arctan s \, ds \geq \frac{\pi}{4} \int_1^\infty e^s \, ds = +\infty.\end{aligned}$$

D'altra parte, usando il teorema di de l'Hôpital,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} f'(x) = \lim_{x\to-\infty} e^{-x} \arctan x = -\infty,$$

cosicché non vi è asintoto obliquo per $x \to -\infty$.
Analizziamo la derivata prima:

$$f'(x) = e^{-x} \arctan x > 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x > 0,$$

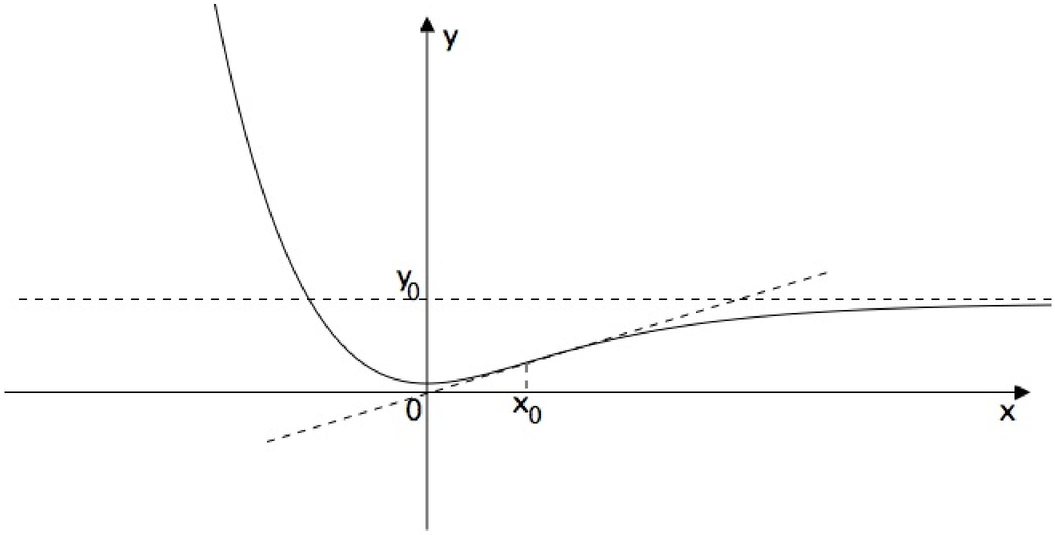
dunque f è decrescente in $\,]-\infty, 0]$ e crescente in $[0, \infty[\,$; f ha quindi un minimo assoluto per $x = 0$, con $f(0) = 0$, mentre non è limitata superiormente.
Analizziamo la derivata seconda:

$$f''(x) = -e^{-x} \arctan x + \frac{e^{-x}}{1 + x^2} = e^{-x} \left[\frac{1}{1 + x^2} - \arctan x \right].$$

La funzione $h(x) = \frac{1}{1+x^2} - \arctan x$, $x \in \mathbb{R}$, è positiva per $x \leq 0$; si ha $h(0) = 1$ e, per $x > 0$, h è decrescente, con $h(x) \to -\frac{\pi}{2}$ per $x \to +\infty$. Vi è dunque un unico punto $x_0 > 0$, in cui h si annulla: tale punto è quindi un punto di flesso per f, con $f''(x) > 0$ per $x < x_0$, $f''(x_0) = 0$, $f''(x) < 0$ per $x > x_0$. Dunque f è convessa in $\,]-\infty, x_0]$ e concava in $[x_0, +\infty[\,$.
Si può osservare che risulta, più precisamente, $\frac{1}{\sqrt{3}} < x_0 < 1$, perché

$$f''\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{3}{4} - \frac{\pi}{6} > 0, \qquad f''(1) = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} < 0.$$

Naturalmente il calcolo di x_0 e di $f(x_0)$ è impossibile.
Dalle informazioni ottenute si ricava il seguente grafico qualitativo:



Esercizio 3 Si tratta di un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti. Risolviamo l'equazione omogenea: il polinomio caratteristico è $\lambda^2+2\lambda+3$ e le sue radici sono
$$\lambda = -1 \pm \sqrt{-2} = -1 \pm i\sqrt{2}.$$
Dunque le soluzioni dell'omogenea sono
$$y(x) = c_1\, e^{-x}\, \cos\sqrt{2}\, x + c_2\, e^{-x}\, \sin\sqrt{2}\, x, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$
Il secondo membro dell'equazione differenziale è somma di due addendi, e ad entrambi è applicabile il metodo dei coefficienti indeterminati. Cerchiamo due soluzioni particolari: la prima, v_1, soluzione di $v_1''(x) + 2v_1'(x) + 3v_1(x) = e^{-x}$, e la seconda, v_2, soluzione di $v_2''(x)(x)(x) + 2v_2' + 3v_2 = \cos x$. Ponendo
$$v_1(x) = A\, e^{-x}$$
si ha
$$v_1'(x) = -A\, e^{-x}, \qquad v_2''(x) = A\, e^{-x},$$
e quindi
$$e^{-x} = v_1''(x) + 2v_1'(x) + 3v_1(x) = (A - 2A + 3A)e^{-x}$$
da cui
$$A = \frac{1}{2}\,, \qquad v_1(x) = \frac{1}{2}\, e^{-x}.$$
Analogamente, ponendo
$$v_2(x) = a\cos x + b\sin x$$
si ha
$$v_2'(x) = -a\sin x + b\cos x, \qquad v_2''(x) = -a\cos x - b\sin x,$$
e quindi
$$\cos x = v_2''(x) + 2v_2'(x) + 3v_2(x) = (-a + 2b + 3a)\cos x + (-b - 2a + 3b)\sin x,$$

da cui
$$\begin{cases} 2a + 2b = 1 \\ -2a + 2b = 0, \end{cases}$$
ovvero
$$a = b = \frac{1}{4}, \qquad v_2(x) = \frac{1}{4}(\cos x + \sin x).$$
L'insieme delle soluzioni dell'equazione non omogenea è dunque
$$y(x) = c_1\, e^{-x}\, \cos\sqrt{2}\, x + c_2\, e^{-x}\, \sin\sqrt{2}\, x + \frac{1}{2}\, e^{-x} + \frac{1}{4}(\cos x + \sin x), \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$
Risolviamo infine il problema di Cauchy: essendo
$$\begin{aligned} y'(x) &= -c_1\, e^{-x}\, \cos\sqrt{2}\, x - c_1\sqrt{2}\, e^{-x}\, \sin\sqrt{2}\, x - \\ &\quad -c_2\, e^{-x}\, \sin\sqrt{2}\, x + c_2\sqrt{2}\, e^{-x}\, \cos\sqrt{2}\, x - \\ &\quad -\frac{1}{2}\, e^{-x} + \frac{1}{4}(-\sin x + \cos x), \end{aligned}$$
si ha
$$\begin{cases} 1 = y(0) = c_1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} \\ 2 = y'(0) = -c_1 + c_2\sqrt{2} - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4}\,, \end{cases}$$
da cui $c_1 = \frac{1}{4}$ e $c_2 = \frac{5}{2\sqrt{2}}$, e in conclusione
$$y(x) = \frac{1}{4}\, e^{-x}\, \cos\sqrt{2}\, x + \frac{5}{2\sqrt{2}}\, e^{-x}\, \sin\sqrt{2}\, x + \frac{1}{2}\, e^{-x} + \frac{1}{4}(\cos x + \sin x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Prova scritta del 21 luglio 2017

Esercizio 1 Trovare le coppie (z, w) di numeri complessi tali che
$$\begin{cases} z^2 = w\,\overline{w} \\ iz + w = 1 - i. \end{cases}$$

Esercizio 2 Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione così definita:
$$f(x) = \begin{cases} x^{-2} & \text{se } \ x < 0 \\ 1 & \text{se } \ x = 0 \\ \max\{|3x - 9|, |4 - x|\} & \text{se } \ x > 0. \end{cases}$$
Si tracci un grafico approssimativo di f, specificando, se esistono:

(a) limiti agli estremi del dominio,

(b) asintoti,

(c) punti di discontinuità e punti angolosi,

(d) intervalli di crescenza e decrescenza,

(e) punti di massimo o minimo relativo,

(f) punti di massimo o minimo assoluti,

(g) intervalli di concavità e convessità.

Esercizio 3 Si consideri l'integrale

$$\int_{-1}^{3} x\,(\ln|x|)^2\,dx.$$

(i) Si mostri che esso esiste.

(ii) Lo si calcoli.

Risoluzione

Esercizio 1 La prima equazione si può riscrivere come

$$z^2 = |w|^2,$$

e fornisce di conseguenza $z = \pm|w|$. Sostituendo nella seconda equazione si ha

$$i|w| + w = 1 - i, \quad \text{oppure} \quad -i|w| + w = 1 - i,$$

e scrivendo $w = a + ib$ si ottiene il sistema equivalente

$$\begin{cases} a = 1 \\ \sqrt{a^2+b^2} + b = -1, \end{cases} \qquad \text{oppure} \qquad \begin{cases} a = 1 \\ -\sqrt{a^2+b^2} + b = -1. \end{cases}$$

Il primo sistema non ha soluzione perché $\sqrt{1+b^2} + b > 0$. Il secondo sistema invece implica $\sqrt{1+b^2} = 1 + b$, da cui, quadrando e semplificando, $b = 0$. Ne segue $w = 1$ e $z = -1$.

Esercizio 2 Calcoliamo per cominciare

$$\max\{|3x-9|, |4-x|\}.$$

Risulta

$$|3x-9| < |4-x|$$

se e solo se, elevando al quadrato,

$$9x^2 - 54x + 81 < 16 - 8x + x^2,$$

ossia se e solo se $8x^2 - 46x + 65 < 0$. Questo trinomio ha le radici

$$x = \frac{23 \pm \sqrt{529 - 520}}{8} = \frac{23 \pm 3}{8}$$

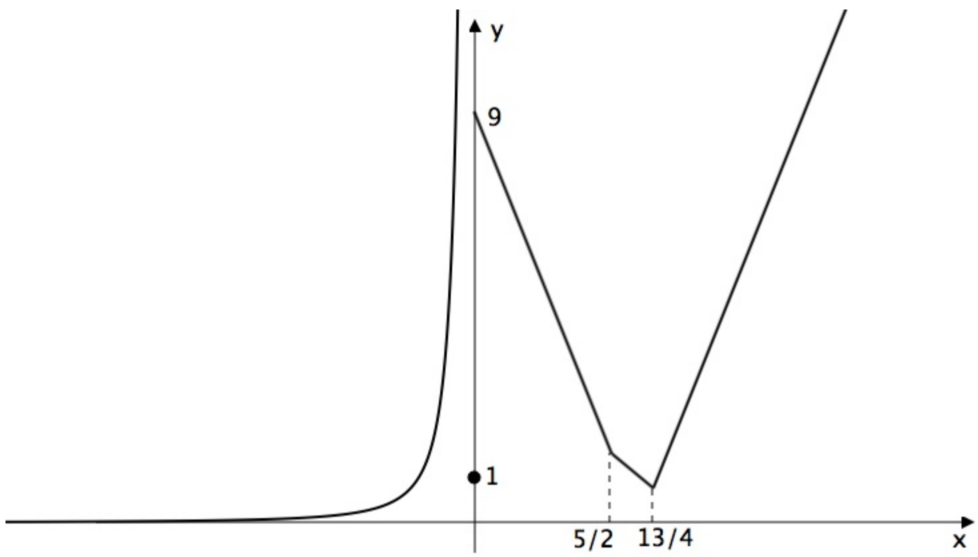
ossia $\frac{13}{4}$ e $\frac{5}{2}$; dunque la disequazione è verificata se e solo se

$$\frac{5}{2} < x < \frac{13}{4}\,.$$

Pertanto

$$\max\{|3x-9|, |4-x|\} = \begin{cases} |3x-9| = 9-3x & \text{se } x < \frac{5}{2} \\ |4-x| = 4-x & \text{se } \frac{5}{2} \le x \le \frac{13}{4} \\ |3x-9| = 3x-9 & \text{se } x > \frac{13}{4}. \end{cases}$$

A questo punto, il grafico di f è facile:



Analizziamo i vari punti richiesti.

(a)-(b) Si ha

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2} = 0^+,$$

dunque per $x \to -\infty$ vi è l'asintoto orizzontale di equazione $y = 0$; invece

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^2} = +\infty,$$

dunque per $x \to 0^-$ vi è l'asintoto verticale di equazione $x = 0$.

Inoltre

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (3x - 9) = +\infty,$$

e naturalmente per $x > \frac{13}{4}$ la f coincide con il suo asintoto obliquo di equazione $y = 3x - 9$.

(c)-(d) Il punto $x = 0$ è di discontinuità perché

$$f(0) = 1, \quad \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^2} = +\infty, \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (9 - 3x) = 9.$$

Invece i punti $x = \frac{5}{2}$ e $x = \frac{13}{4}$ sono punti angolosi, con $f(\frac{5}{2}) = \frac{3}{2}$ e $f(\frac{13}{4}) = \frac{3}{4}$: infatti

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{2}{x^3} & \text{se } x < 0, \\ -3 & \text{se } 0 < x < \frac{5}{2} \\ -1 & \text{se } \frac{5}{2} < x < \frac{13}{4} \\ 3 & \text{se } x > \frac{13}{4}\,. \end{cases}$$

e pertanto

$$\lim_{x\to \frac{5}{2}^-} f'(x) = -3, \quad \lim_{x\to \frac{5}{2}^+} f'(x) = -1,$$
$$\lim_{x\to \frac{13}{4}^-} f'(x) = -1, \quad \lim_{x\to \frac{13}{4}^+} f'(x) = 3.$$

(d)-(e) La funzione f è crescente in $]-\infty, 0[$ e in $[\frac{13}{4}, \infty[$, mentre è decrescente in $]0, \frac{13}{4}]$. Pertanto $x = \frac{13}{4}$ è un punto di minimo relativo, con $f(\frac{13}{4}) = \frac{3}{4}$, e non vi sono punti di massimo relativo.

(f) La funzione f non ha né massimo assoluto né minimo assoluto, con

$$\inf_{\mathbb{R}} f = 0, \qquad \sup_{\mathbb{R}} f = +\infty.$$

(g) La funzione f è convessa (separatamente) nelle due semirette $]-\infty, 0[$ e $]0, \infty[$.

Esercizio 3 (i) L'integrale proposto è improprio perché la funzione $(\ln|x|)^2$ è infinita nell'origine. Tuttavia la funzione $x\,(\ln|x|)^2$ è prolungabile con continuità in 0, quindi l'integrale esiste certamente.

(ii) Calcoliamo l'integrale: osservato che l'integrando è dispari, risulta

$$\int_{-1}^{1} x\,(\ln|x|)^2\,dx = 0,$$

e quindi si ha

$$\int_{-1}^{3} x\,(\ln|x|)^2\,dx = \int_{1}^{3} x\,(\ln x)^2\,dx,$$

e integrando per parti si ottiene

$$\begin{aligned}
\int_1^3 x\,(\ln x)^2\,dx &= \frac{1}{2}\left[x^2\,(\ln x)^2\right]_1^3 - \int_1^3 x\,\ln x\,dx = \\
&= \frac{1}{2}\left[x^2\,(\ln x)^2\right]_1^3 - \frac{1}{2}\left[x^2\,\ln x\right]_1^3 + \frac{1}{2}\int_1^3 x\,dx = \\
&= \frac{1}{2}\left[x^2\,(\ln x)^2\right]_1^3 - \frac{1}{2}\left[x^2\,\ln x\right]_1^3 + \frac{1}{4}\left[x^2\right]_1^3 = \frac{9}{2}(\ln^2 3 - \ln 3) + 2.
\end{aligned}$$

Prova scritta del 13 settembre 2017

Esercizio 1 Poniamo per $n \in \mathbb{N}^+$

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{n-2}{n} & \text{se } n \text{ è dispari,} \\ \dfrac{n+2}{n} & \text{se } n \text{ è pari, } n \geq 2. \end{cases}$$

(i) Calcolare, se esistono,

$$\max_{n \in \mathbb{N}^+} a_n \,, \qquad \min_{n \in N^+} a_n \,, \qquad \lim_{n \to \infty} a_n \,.$$

(ii) Stabilire se la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - a_n)$$

è convergente.

Esercizio 2 Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione così definita:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1+x^2}\,|x+1| & \text{se} \quad x < 0, \\ \sqrt{1+x^2} & \text{se} \quad x \geq 0. \end{cases}$$

Si tracci un grafico approssimativo di f, specificando, se esistono:

(a) limiti agli estremi del dominio,

(b) asintoti,

(c) punti di discontinuità e punti angolosi,

(d) intervalli di crescenza e decrescenza,

(e) punti di massimo o minimo relativo,

(f) punti di massimo o minimo assoluti,

(g) intervalli di concavità e convessità.

Esercizio 3 Si calcoli l'integrale

$$\int_{-1}^{\sqrt{3}} |x-1| \arctan x \, dx.$$

Risoluzione

Esercizio 1 (i) Analizziamo i primi termini della successione:

$$\begin{array}{lcccccccccc} n = & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & \cdots \\ a_n = & -1, & 2, & \frac{1}{3}, & \frac{3}{2}, & \frac{3}{5}, & \frac{4}{3}, & \frac{5}{7}, & \frac{5}{4}, & \cdots \end{array}$$

Dal momento che i termini di indice dispari crescono ed hanno limite 1, mentre quelli di indice pari decrescono ed hanno limite 1, è facile dedurre che

$$\max_{n\in\mathbb{N}^+} a_n = a_2 = 2, \qquad \min_{n\in N^+} a_n = a_1 = -1, \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = 1.$$

(ii) Risulta

$$1 - a_n = \begin{cases} 1 - \dfrac{n-2}{n} = \dfrac{2}{n} & \text{se } n \text{ è dispari,} \\ 1 - \dfrac{n+2}{n} = -\dfrac{2}{n} & \text{se } n \text{ è pari, } n \geq 2; \end{cases}$$

dunque si ha

$$1 - a_n = -2\frac{(-1)^n}{n} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^+.$$

ne segue

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1 - a_n) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{n},$$

e perciò la serie è convergente (non assolutamente), in virtù del criterio di Leibniz.

Esercizio 2 (a) La funzione è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$. Si ha inoltre

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \sqrt{1+x^2}\,|x+1| = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{1+x^2} = +\infty.$$

(b) Per $x \to -\infty$ si ha, essendo $x < 0$,

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}\,|x+1|}{x} = -\infty,$$

e quindi non c'è asintoto per $x \to -\infty$. Invece, per $x \to +\infty$ si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} = 1,$$

ed inoltre, essendo $x > 0$,

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} (f(x) - x) &= \lim_{x\to+\infty} (\sqrt{1+x^2} - x) = \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{(\sqrt{1+x^2} - x)(\sqrt{1+x^2} + x)}{\sqrt{1+x^2} + x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^2} + x} = 0; \end{aligned}$$

ne segue che per $x \to +\infty$ vi è l'asintoto di equazione $y = x$.

(c) Essendo $x \mapsto \sqrt{1+x^2}\,|x+1|$ continua, la funzione f è continua in ogni punto di $]-\infty,0[$; essendo $x \mapsto \sqrt{1+x^2}$ continua, la funzione f è continua in ogni punto di $]0,\infty[$. Inoltre, nel punto 0 si ha

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \sqrt{1+x^2}\,|x+1| = 1, \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \sqrt{1+x^2} = 1,$$

cosicché

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 1 = f(0);$$

dunque f è continua anche in 0. Pertanto non ci sono punti di discontinuità.
Vediamo se esistono punti angolosi. Calcoliamo anzitutto la derivata $f'(x)$. Si ha

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-x(x+1)}{\sqrt{1+x^2}} - \sqrt{1+x^2} & \text{se } x < -1, \\ \dfrac{x(x+1)}{\sqrt{1+x^2}} + \sqrt{1+x^2} & \text{se } \; -1 < x < 0, \\ \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} & \text{se } \; x > 0. \end{cases}$$

Ciò premesso, nella semiretta $]0,+\infty[$ non ci sono punti angolosi, poiché f' è continua. Nella semiretta $]-\infty,0[$ vi è un punto sospetto: quello dove si annulla il valore assoluto, cioè -1. In tale punto si ha $f(-1) = 0$ e dunque

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim_{x\to -1^-} \frac{\sqrt{1+x^2}\,(-x-1)}{x+1} = -\sqrt{2},$$

mentre

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim_{x\to -1^+} \frac{\sqrt{1+x^2}\,(x+1)}{x+1} = \sqrt{2}.$$

Pertanto

$$f'(-1^-) = -\sqrt{2}, \qquad f'(-1^+) = \sqrt{2},$$

ed il punto $(-1,0)$ è punto angoloso del grafico. Le tangenti al grafico in tale punto hanno equazioni

$$y = -\sqrt{2}(x+1) \quad (\text{per } x \to -1^-), \qquad y = \sqrt{2}(x+1) \quad (\text{per } x \to -1^+).$$

Infine vediamo cosa accade in 0: essendo $f(0) = 1$, si ha, dal teorema di de l'Hôpital,

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{d}{dx}\sqrt{1+x^2}\,(x+1) = \lim_{x\to 0^-} \left[\frac{x(x+1)}{\sqrt{1+x^2}} + \sqrt{1+x^2}\right] = 1,$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{d}{dx}\sqrt{1+x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = 0;$$

pertanto il punto $(0,1)$ è punto angoloso del grafico. Le tangenti al grafico in tale punto hanno equazioni

$$y = 1+x \quad (\text{per } x \to 0^-), \qquad y = 1 \quad (\text{per } x \to 0^+).$$

(d) Dall'espressione di f' segue subito che $f' > 0$ in $]0, +\infty[$, mentre si ha $f' < 0$ in $]-\infty, -1[$, essendo $x < x + 1 < 0$. Nell'intervallo $]-1, 0[$ si ha

$$f'(x) = \frac{x(1 + x) + (1 + x^2)}{\sqrt{1 + x^2}} = \frac{1 + x + 2x^2}{\sqrt{1 + x^2}},$$

ed essendo il numeratore sempre positivo, otteniamo $f' > 0$ in $]-1, 0[$. Dunque f è decrescente in $]-\infty, -1]$ e crescente in $[-1, +\infty[$.

(e)-(f) Si ha

$$\sup_{\mathbb{R}} f = +\infty, \qquad \inf_{\mathbb{R}} f = \min_{\mathbb{R}} f = f(-1) = 0.$$

Oltre al punto -1, che è di minimo assoluto, non sono presenti altri punti di massimo o di minimo relativo.

(g) Calcoliamo f'': ricordando che

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-2x^2 - x - 1}{\sqrt{1 + x^2}} & \text{se } x < -1, \\ \dfrac{2x^2 + x + 1}{\sqrt{1 + x^2}} & \text{se } \; -1 < x < 0, \\ \dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2}} & \text{se } \; x > 0, \end{cases}$$

si ottiene, con qualche calcolo,

$$f''(x) = \begin{cases} \dfrac{-2x^3 - 3x - 1}{(1 + x^2)^{\frac{3}{2}}} & \text{se } x < -1, \\ \dfrac{2x^3 + 3x + 1}{(1 + x^2)^{\frac{3}{2}}} & \text{se } \; -1 < x < 0, \\ \dfrac{1}{(1 + x^2)^{\frac{3}{2}}} & \text{se } \; x > 0. \end{cases}$$

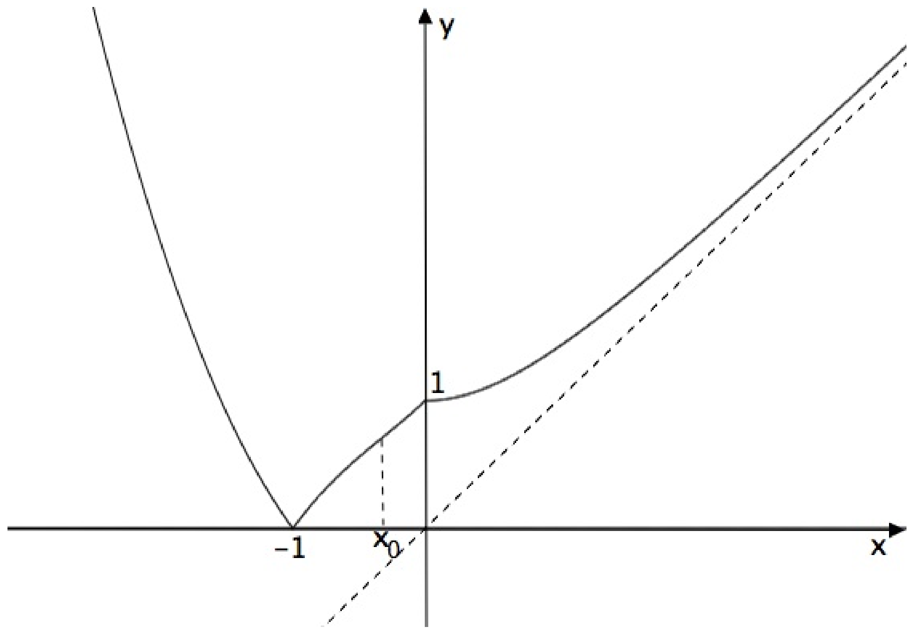
Ne segue che $f'' > 0$ in $]0, +\infty[$; inoltre, essendo ovviamente $-2x^3 - 3x - 1 > 2 + 3 - 1 > 0$ per ogni $x < -1$, si ha $f'' > 0$ anche in $]-\infty, -1[$. Invece in $]-1, 0[$ la f'' passa da negativa per $x = -1$ a positiva per $x = 0$, e cambia segno una volta sola perché

$$\frac{d}{dx}(2x^3 + 3x + 1) = 6x^2 + 3 > 0 \quad \text{in }]-1, 0[.$$

In definitiva:

- f è convessa in $]-\infty, -1]$;
- f è convessa in $[0, +\infty[$;
- esiste un unico punto $x_0 \in]-1, 0[$ tale che f è concava in $[-1, x_0]$ ed è convessa in $[x_0, 0]$.

Possiamo riassumere le informazioni raccolte nel seguente grafico:



Esercizio 3 L'integrando è

$$(1-x)\arctan x \quad \text{se } -1 \le x \le 1, \qquad (x-1)\arctan x \quad \text{se } 1 \le x \le \sqrt{3}.$$

Dunque

$$\int_{-1}^{\sqrt{3}} |x-1| \arctan x \, dx = \int_{-1}^{1} (1-x) \arctan x \, dx + \int_{1}^{\sqrt{3}} (x-1) \arctan x \, dx.$$

La funzione $\arctan x$ è dispari e quindi il suo integrale su $[-1, 1]$ è nullo. Invece $x \arctan x$ è una funzione pari e quindi il suo intgrale su $[-1, 1]$ è il doppio di quello su $[0, 1]$. Pertanto

$$\int_{-1}^{\sqrt{3}} |x-1| \arctan x \, dx = -2 \int_{0}^{1} x \arctan x \, dx + \int_{1}^{\sqrt{3}} (x-1) \arctan x \, dx.$$

Una primitiva di $x \arctan x$ si trova integrando per parti:

$$\int_a^b x \arctan x \, dx = \left[\frac{x^2}{2} \arctan x \right]_a^b - \frac{1}{2} \int_a^b \frac{x^2}{1+x^2} \, dx,$$

e poiché

$$\int_a^b \frac{x^2}{1+x^2} \, dx = \int_a^b \left(1 - \frac{1}{1+x^2} \right) \, dx = [x - \arctan x]_a^b \, ,$$

si ottiene

$$\int_a^b x \arctan x \, dx = \left[\frac{x^2}{2} \arctan x - \frac{x}{2} + \frac{\arctan x}{2} \right]_a^b .$$

Similmente, una primitiva di $\arctan x$ si trova così:

$$\int_a^b \arctan x\, dx = [x \arctan x]_a^b - \int_a^b \frac{x}{1+x^2}\, dx = \left[x \arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) \right]_a^b .$$

Pertanto si ha

$$-2\int_0^1 x \arctan x\, dx = -2\left[\frac{x^2}{2} \arctan x - \frac{x}{2} + \frac{\arctan x}{2} \right]_0^1 = -\frac{\pi}{4} + 1 - \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{\pi}{2},$$

mentre

$$\begin{aligned}
&\int_1^{\sqrt{3}} (x-1)\arctan x\, dx = \\
&\quad = \left[\frac{x^2}{2} \arctan x - \frac{x}{2} + \frac{\arctan x}{2} - x \arctan x + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) \right]_1^{\sqrt{3}} = \\
&\quad = \frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{\sqrt{3}} + \ln 2 - \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2} - \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2} = \\
&\quad = \pi\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) - \frac{\sqrt{3}-1}{2} + \frac{\ln 2}{2}.
\end{aligned}$$

In definitiva

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{\sqrt{3}} |x-1| \arctan x\, dx &= 1 - \frac{\pi}{2} + \pi\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) - \frac{\sqrt{3}-1}{2} + \frac{\ln 2}{2} = \\
&= -\pi\left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{6} \right) + \frac{3-\sqrt{3}}{2} + \frac{\ln 2}{2}.
\end{aligned}$$

Prova scritta del 17 novembre 2017

Esercizio 1 Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la successione così definita:

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{n^2 + 3^n - 4^n}{2^{2n} + 3^n - n^7} & \text{se } n \text{ è pari} \\[2ex] \cos\dfrac{\pi(n! - n^n)}{2^n + n^n} & \text{se } n \text{ è dispari.} \end{cases}$$

Si calcoli, se esiste,

$$\lim_{n\to\infty} a_n .$$

Esercizio 2 Calcolare, se esiste,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x (e^{t^2} - e^{-t^2})\, dt}{\sin x\,(1-\cos x)} .$$

Esercizio 3 Calcolare l'integrale

$$\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x}(4+x)}\, dx.$$

Esercizio 4 Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{4+y}{\sqrt{x}}\,, \\ y(1) = -1. \end{cases}$$

Risoluzione

Esercizio 1 Affinché il limite esista, occorre che le due sottosuccessioni $\{a_{2k}\}_{k\in\mathbb{N}^+}$ e $\{a_{2k+1}\}_{k\in\mathbb{N}}$ abbiano entrambe limite, e che questi due limiti coincidano. Ora, per n pari si ha

$$a_n = \frac{n^2+3^n-4^n}{2^{2n}+3^n-n^7} = \frac{4^n\left(\frac{n^2}{4^n}+\frac{3^n}{4^n}-1\right)}{4^n\left(1+\frac{3^n}{2^{2n}}-\frac{n^7}{2^{2n}}\right)} \to -1 \qquad \text{per } n = 2k \to \infty;$$

similmente, per n dispari si ha

$$a_n = \cos\frac{\pi(n!-n^n)}{2^n+n^n} = \cos\pi\frac{n^n\left(\frac{n!}{n^n}-1\right)}{n^n\left(\frac{2^n}{n^n}+1\right)} \to \cos(-\pi) = -1 \qquad \text{per } n = 2k+1 \to \infty.$$

Ne deduciamo che

$$\exists \lim_{n\to\infty} a_n = -1.$$

Esercizio 2 Si tratta di una forma indeterminata del tipo $0/0$. Possiamo osservare che per il denominatore si ha, per $x \to 0$,

$$\sin x\,(1-\cos x) = (x + \mathrm{o}(x))\left(\frac{x^2}{2}+\mathrm{o}(x^2)\right) = \frac{x^3}{2}+\mathrm{o}(x^3);$$

dunque

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x (e^{t^2}-e^{-t^2})\,dt}{\sin x\,(1-\cos x)} = \lim_{x\to 0}\frac{2\int_0^x (e^{t^2}-e^{-t^2})\,dt}{x^3}\,.$$

Per analizzare il limite a destra conviene utilizzare il teorema di de L'Hôpital. Il rapporto delle derivate è

$$\frac{2(e^{x^2}-e^{-x^2})}{3x^2}\,,$$

ed essendo, per $x \to 0$,

$$e^{x^2}-e^{-x^2} = 1+x^2+\mathrm{o}(x^2)-(1-x^2+\mathrm{o}(x^2)) = 2x^2+\mathrm{o}(x^2),$$

si deduce che

$$\lim_{x\to 0}\frac{2(e^{x^2}-e^{-x^2})}{3x^2} = \frac{4}{3}\,.$$

Dunque, per il teorema di de L'Hôpital, il limite proposto è uguale a $\frac{4}{3}$.

Esercizio 3 L'integrale è improprio ma convergente, perché l'integrando ha una singolarità nell'origine di ordine $\frac{1}{2}$. Conviene utilizzare la sostituzione $\sqrt{x} = t$: si ha allora $dt = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$, e pertanto

$$\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x}(4+x)}\,dx = 2\int_0^2 \frac{1}{4+t^2}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^2 \frac{1}{1+\frac{t^2}{4}}\,dt.$$

Posto allora $s = \frac{t}{2}$, si ha infine

$$\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x}(4+x)}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{1+s^2}\,ds = \big[\arctan s\big]_0^1 = \frac{\pi}{4}\,.$$

Esercizio 4 L'equazione è a variabili separabili. Vi è la soluzione costante $y = -4$, da escludere perchè non soddisfa la condizione $y(1) = -1$; quindi possiamo dividere per $y+4$, ottenendo via via

$$\frac{dy}{y+4} = \frac{dx}{\sqrt{x}},$$

$$\ln|y+4| = 2\sqrt{x} + c, \qquad c \in \mathbb{R},$$

$$|y+4| = b\,e^{2\sqrt{x}}, \qquad b > 0,$$

$$y+4 = k\,e^{2\sqrt{x}}, \qquad k \in \mathbb{R}\setminus\{0\},$$

ma possiamo prendere anche il valore $k = 0$, che fornisce la soluzione $y = -4$. In definitiva, le soluzioni dell'equazione differenziale sono

$$y(x) = -4 + k\,e^{2\sqrt{x}}, \qquad k \in \mathbb{R}.$$

Imponendo la condizione $y(1) = -1$ si trova

$$-1 = y(1) = -4 + k\,e^2,$$

da cui, facilmente, $k = 3\,e^{-2}$. Dunque la soluzione del problema di Cauchy assegnato è

$$y(x) = -4 + 3\,e^{2(\sqrt{x}-1)}, \qquad x \in \,]0,\infty[\,.$$

Prova scritta del 12 gennaio 2018

Esercizio 1 Stabilire il comportamento delle due serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{2n}}{2^{3n}}\,, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{(2n)^2}}{2^{(3n)^2}}\,.$$

Esercizio 2 Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione così definita:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x < -2 \\ 4 & \text{se } x = -2 \\ x^2 - 1 & \text{se } -2 < x \leq 2 \\ -\frac{1}{3}x^2 + \frac{10}{3} & \text{se } x > 2. \end{cases}$$

(i) Determinare, se esistono, i massimi e minimi locali e globali di f.

(ii) Calcolare l'integrale

$$\int_{-3}^{3} f(x)\, dx.$$

Esercizio 3 Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) - y(x) + y(x)^3 = 0 \\ y(0) = -2. \end{cases}$$

Risoluzione

Esercizio 1 Possiamo riscrivere la prima serie nella forma seguente:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{2n}}{2^{3n}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3^2}{2^3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{9}{8}\right)^n.$$

Si tratta dunque della serie geometrica di ragione $9/8$. Essendo $9/8 > 1$, la serie diverge positivamente.
Analogamente, possiamo riscrivere la seconda serie come segue:

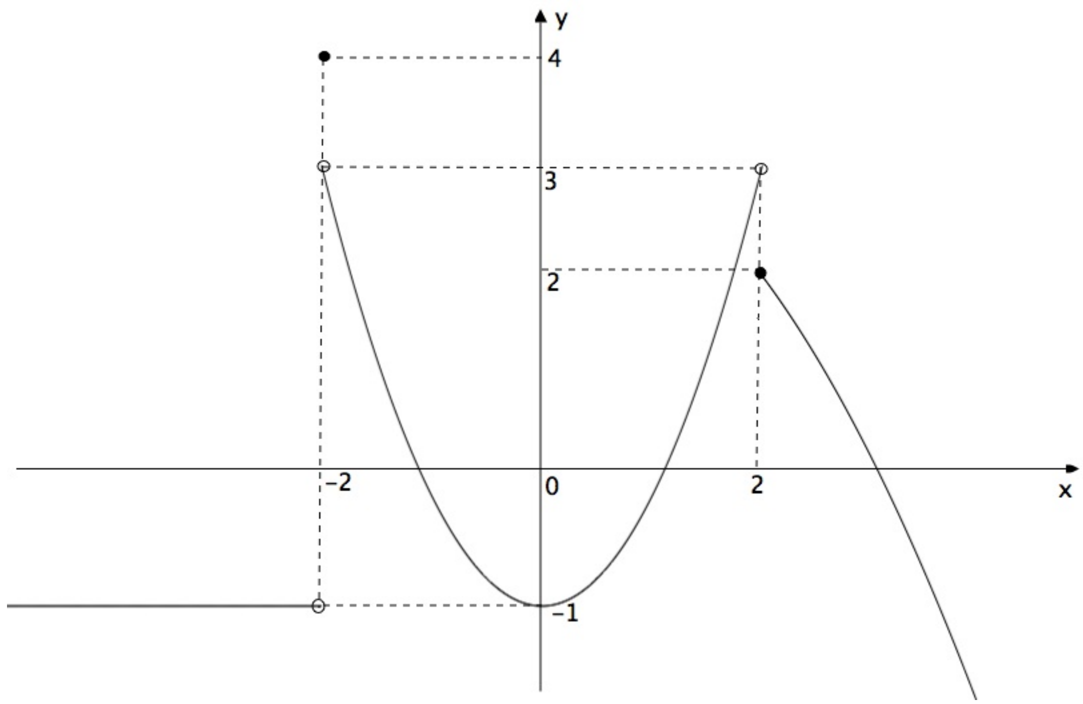
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{(2n)^2}}{2^{(3n)^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3^4)^{n^2}}{(2^9)^{n^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{81}{512}\right)^{n^2}.$$

Poiché

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{81}{512}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{81}{512}\right)^n = 0,$$

la serie converge in virtù del criterio della radice.

Esercizio 2 (i) Conviene anzitutto disegnare il grafico della funzione f: nella semiretta $]-\infty, -2[$ essa vale costantemente -1; in $x = -2$ si ha $f(x) = 4$; nell'intervallo $]-2, 2]$ la f ha per grafico la parabola $y = x^2 - 1$; infine nella semiretta $]2, +\infty[$ si ha la parabola $y = \frac{1}{3}(-x^2 + 10)$ (di vertice il punto $\left(0, \frac{10}{3}\right)$, passante per $(\pm 2, 2)$). Ne risulta il grafico qui sotto:



Partendo da qui, si vedono i fatti seguenti.

- La funzione f è discontinua nei punti ± 2.
- I punti $x_0 < -2$ sono tutti punti di massimo e di minimo relativo, con $f(x_0) = -1$: infatti, posto $U =]-\infty, -2[$, l'insieme U è intorno di ciascuno di tali x_0 e risulta

$$-1 = f(x) \leq f(x_0) = -1 \quad \forall x \in U, \qquad -1 = f(x) \geq f(x_0) = -1 \quad \forall x \in U.$$

- Il punto di discontinuità $x_0 = -2$ è punto di massimo relativo ed assoluto con $f(-2) = 4$: infatti si ha

$$f(x) \leq f(-2) = 4 \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

- Il punto $x_0 = 0$ è punto di minimo relativo con $f(0) = -1$: infatti, si ha $f'(x) = 2x$ in un intorno di 0, $f'(0) = 0$ e $f''(0) = 2 > 0$.
- La funzione non ha minimo assoluto, essendo illimitata inferiormente: infatti,

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \left(-\frac{1}{3}x^2 + \frac{10}{3} \right) = -\infty.$$

- Non vi sono altri punti di massimo o minimo relativo, poiché il secondo punto di discontinuità $x_0 = 2$ non è né di massimo né di minimo relativo (in ogni intorno $[2-\delta, 2+\delta]$ con $\delta > 0$ sufficientemente piccolo si ha $f(x) > f(2) = 2$ per $x \in [2-\delta, 2[$ e $f(x) < f(2) = 2$ per $x \in]2, 2+\delta]$, mentre negli intervalli $]-2, 0[$, $]0, 2[$ e $]2, \infty[$ la funzione f è derivabile con derivata non nulla.

(ii) In virtù dell'additività rispetto al dominio di integrazione, si ha

$$\begin{aligned}\int_{-3}^{3} f(x)\,dx &= \int_{-3}^{-2}(-1)\,dx + \int_{-2}^{2}(x^2-1)\,dx + \int_{2}^{3}\left(-\frac{1}{3}\,x^2+\frac{10}{3}\right)dx = \\ &= -1 + \left[\frac{1}{3}\,x^3 - x\right]_{-2}^{2} + \left[-\frac{1}{9}\,x^3+\frac{10}{3}\,x\right]_{2}^{3} = \\ &= -1 + \frac{16}{3} - 4 - \frac{19}{9} + \frac{10}{3} = \frac{14}{9}\,.\end{aligned}$$

Esercizio 3 L'equazione differenziale è di tipo Bernoulli. Essa si risolve con la sostituzione $u(x) = y(x)^{-2}$: si ha

$$u'(x) = -2y(x)^{-3}y'(x) = -2y(x)^{-3}(y(x) - y(x)^3) = -2y(x)^{-2} + 2 = -2u(x) + 2.$$

Dunque u risolve il problema di Cauchy lineare

$$\begin{cases} u'(x) + 2u(x) = 2 \\ u(0) = \frac{1}{4}. \end{cases}$$

Dalla formula per le soluzioni delle equazioni lineari del primo ordine si ottiene

$$u(x) = c\,e^{-2x} + \int_0^x 2e^{-2(x-t)}\,dt = c\,e^{-2x} + 1 - e^{-2x} + 1, \qquad x \in \mathbb{R},$$

e dalla condizione iniziale segue subito $c = \frac{1}{4}$. Pertanto

$$u(x) = 1 - \frac{3}{4}\,e^{-2x}, \qquad x \in \mathbb{R},$$

Dalla relazione $u(x) = y(x)^{-2}$, essendo $y(x)$ negativa, si conclude che

$$y(x) = -\sqrt{\frac{1}{u(x)}} = -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{3}{4}\,e^{-2x}}};$$

questa funzione è definita per $x \in \left]\frac{1}{2}\,\ln\frac{3}{4}, +\infty\right[$ ed in tale semiretta risolve l'equazione data.

Prova scritta del 2 febbraio 2018

Esercizio 1 (i) Si consideri la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+3}{n^2+4n+3}\,(x^2-4)^{n+2}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

(i) Stabilire per quali $x \in \mathbb{R}$ la serie converge assolutamente.

(ii) Stabilire per quali $x \in \mathbb{R}$ la serie converge.

(iii) Ricordando la relazione

$$\ln(1+t) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{t^k}{k} \qquad \forall t \in]-1,1],$$

calcolare la somma della serie nell'intervallo di convergenza.

Esercizio 2 Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione così definita:

$$f(x) = \begin{cases} \ln|x| & \text{se } x < 0 \\ 1 - x & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ \arctan(x-1) & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

Determinare, se esistono:

(i) i massimi e minimi locali e globali di f;

(ii) i punti di discontinuità di f;

(iii) gli asintoti di f;

(iv) il valore dell'integrale

$$\int_{-1}^{2} f(x)\, dx.$$

Esercizio 3 Scrivere la soluzione $y(\cdot)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) - 4y(x) = 4 \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \end{cases}$$

e calcolare

$$\min_{x \in \mathbb{R}} y(x).$$

Risoluzione

Esercizio 1 (i) Notiamo anzitutto che $n^2 + 4n + 3 = (n+1)(n+3)$, per cui la serie si può riscrivere nella forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x^2-4)^{n+2}}{n+1}.$$

Poiché la serie dipende da x^2, basta studiarne il comportamento per $x \geq 0$. La serie dei valori assoluti è

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x^2-4|^{n+2}}{n+1},$$

e utilizzando il criterio della radice si trova

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|x^2-4|^{n+2}}{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x^2-4|^{1+\frac{2}{n}}}{(n+1)^{\frac{1}{n}}} = |x^2-4|,$$

da cui segue che la serie dei valori assoluti converge se $|x^2-4|<1$, ossia per $\sqrt{3}<x<\sqrt{5}$, e diverge se $|x^2-4|>1$, osaia per $0\le x<\sqrt{3}$ e per $x>\sqrt{5}$. Se $|x^2-4|=1$, ossia $x=\sqrt{3}$ oppure $x=\sqrt{5}$, la serie dei valori assoluti si riduce alla serie armonica e quindi diverge. Quindi la serie converge assolutamente se e solo se $\sqrt{3}<x<\sqrt{5}$.

(ii) Se $x\ge 2$, la serie è a termini non negativi, e quindi converge quando $2\le x<\sqrt{5}$ e diverge a $+\infty$ quando $x\ge\sqrt{5}$. Se $0\le x\le 2$, la serie si può scrivere nella forma

$$(4-x^2)^2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(4-x^2)^n}{n+1},$$

e quindi è a segni alterni; la quantità positiva $\frac{(4-x^2)^{n+2}}{n+1}$ non è infinitesima quando $0\le x<\sqrt{3}$, mentre è infinitesima e decrescente quando $\sqrt{3}\le x\le 2$, cosicché il criterio di Leibniz è applicabile. In definitiva, le serie converge per $\sqrt{3}\le x\le 2$ ed è indeterminata per $0\le x<\sqrt{3}$.

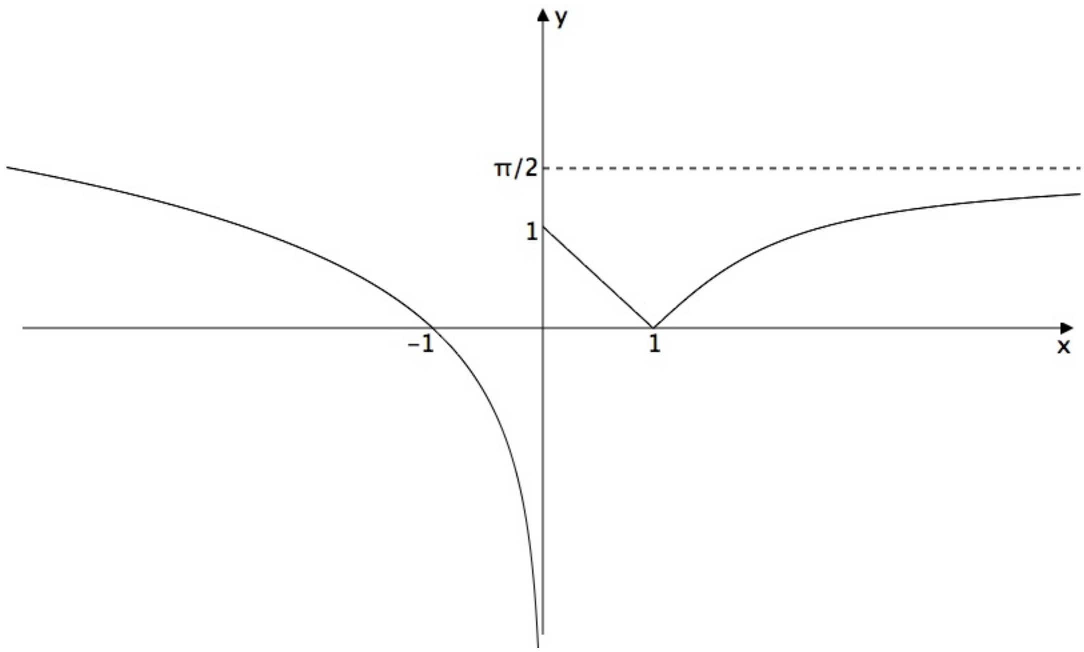
(iii) Utilizzando lo sviluppo in serie di $\ln(1+t)$, possiamo scrivere per $\sqrt{3}\le x\le\sqrt{5}$

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x^2-4)^{n+2}}{n+1} &= (4-x^2)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(4-x^2)^{n+1}}{n+1} = \\ &= (4-x^2)\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{(4-x^2)^k}{k} = (4-x^2)\ln(5-x^2).\end{aligned}$$

Esercizio 2 (i) La funzione f è derivabile negli intervalli $]-\infty,0[$, $]0,1[$ e $]1,+\infty[$, con derivata

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{se } x<0 \\ -1 & \text{se } 0<x<1 \\ \frac{1}{1+(x-1)^2} & \text{se } x>1. \end{cases}$$

Poiché la derivata di f è diversa da 0 in tali intervalli, gli eventuali punti di massimo o minimo relativo di f sono al più $x=0$ oppure $x=1$.



In effetti, intorno al punto 0 si ha

$$f(x) = \ln|x| < f(0) = 1 \quad \forall x \in]-e, 0[\,, \qquad f(x) = 1 - x < f(0) = 1 \quad \forall x \in]0, 1],$$

cosicché $x = 0$ è punto di massimo relativo con $f(0) = 1$. Analogamente, intorno al punto 1 si ha

$$f(x) = 1 - x > f(1) = 0 \quad \forall x \in [0, 1[\,, \qquad f(x) = \arctan(x-1) > f(1) = 0 \quad \forall X > 0,$$

e dunque $x = 1$ è punto di minimo relativo con $f(1) = 0$. Inoltre, essendo

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty,$$

si ha in particolare

$$\sup_{\mathbb{R}} f = +\infty, \qquad \inf_{\mathbb{R}} f = -\infty,$$

e dunque f non ha né massimo assoluto, né minimo assoluto.

(ii) La funzione f è discontinua nel punto $x = 0$ poiché

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty, \qquad f(0) = 1.$$

Invece f è continua nel punto $x = 1$ poiché

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (1 - x) = 0 = f(1) = \lim_{x\to 1^+} \arctan(x-1) = \lim_{x\to 1^+} f(x).$$

Per $x \to -\infty$ la f non ha asintoto, in quanto

$$\lim_{x\to-\infty} \ln|x| = +\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{\ln|x|}{x} = m = 0,$$

ma non può essere

$$\lim_{x\to-\infty}(\ln|x| - mx) = \lim_{x\to-\infty}\ln|x| \in \mathbb{R}.$$

Per $x \to 0^-$ si ha, come abbiamo visto,

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty,$$

e dunque f ha l'asintoto verticale di equazione $x = 0$.
Infine, per $x \to +\infty$ si ha

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\arctan(x-1) = \frac{\pi}{2}\,,$$

e pertanto f ha l'asintoto orizzontale di equazione $y = \frac{\pi}{2}$.

(iv) Si ha

$$\int_{-1}^{2} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0}\ln|x|\,dx + \int_{0}^{1}(1-x)\,dx + \int_{1}^{2}\arctan(x-1)\,dx.$$

Calcoliamo il primo integrale:

$$\int_{-1}^{0}\ln|x|\,dx = \int_{0}^{1}\ln t\,dt = [t\ln t]_0^1 - \int_0^1 \frac{t}{t}\,dt = [t\ln t - t]_0^1 = -1.$$

Calcoliamo il secondo integrale:

$$\int_0^1 (1-x)\,dx = \left[x - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\,.$$

Calcoliamo il terzo integrale:

$$\begin{aligned}\int_1^2 \arctan(x-1)\,dx &= \int_0^1 \arctan t\,dt = [t\,\arctan t]_0^1 - \frac{t}{1+t^2}\,dt = \\ &= \left[t\,\arctan t - \frac{1}{2}\ln(1+t^2)\right]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2.\end{aligned}$$

Si conclude allora che

$$\int_{-1}^{2} f(x)\,dx = -1 + \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2 = -\frac{1+\ln 2}{2} + \frac{\pi}{4}\,.$$

Esercizio 3 Si tratta di una equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti. Il polinomio caratteristico associato all'equazione omogenea è $\lambda^2 - 4$, e le sue radici sono ± 2. Quindi le soluzioni dell'equazione omogenea sono le funzioni

$$c_1\,e^{2x} + c_2\,e^{-2x}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Il secondo membro dell'equazione non omogenea è la costante 4: dato che 0 non è radice del polinomio caratteristico, possiamo cercare una soluzione particolare della forma

$$v(x) = c.$$

Sostituendo si trova subito $-4c = 4$, ossia $c = -1$. Dunque l'insieme delle soluzioni dell'equazione non omogenea è dato dalle funzioni $y(x)$ della forma

$$y(x) = c_1\, e^{2x} + c_2\, e^{-2x} - 1, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Imponiamo le condizioni iniziali: si ha

$$0 = y(0) = c_1 + c_2 - 1, \qquad 1 = y'(0) = 2c_1 - 2c_2,$$

da cui, facilmente, $c_1 = \frac{3}{4}$ e $c_2 = \frac{1}{4}$. In definitiva, la soluzione del problema di Cauchy è

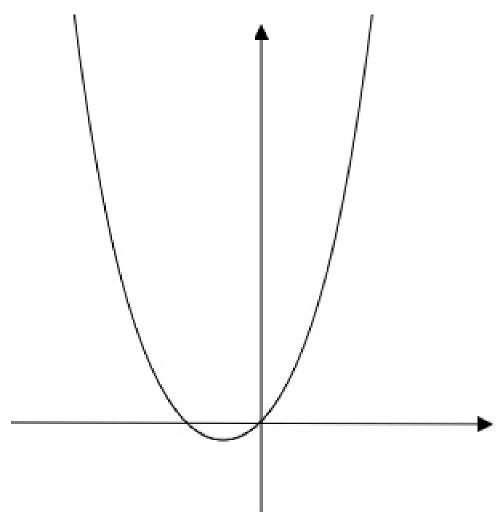
$$y(x) = \frac{3}{4}\, e^{2x} + \frac{1}{4}\, e^{-2x} - 1.$$

Per calcolare il minimo di $y(\cdot)$, notiamo che

$$\lim_{x \to \pm\infty} y(x) = +\infty,$$

e che la derivata $y'(x) = \frac{3}{2}\, e^{2x} - \frac{1}{2}\, e^{-2x}$ si annulla solo in un punto: precisamente in $x = \frac{1}{4} \ln \frac{1}{3}$. Dunque tale punto è necessariamente punto di minimo assoluto e risulta

$$y\left(\frac{1}{4} \ln \frac{1}{3}\right) = \frac{3}{4}\, e^{-\frac{1}{2}\ln 3} + \frac{1}{4}\, e^{\frac{1}{2}\ln 3} - 1 = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} - 1 = \frac{\sqrt{3}}{2} - 1.$$



Prova scritta del 20 febbraio 2018

Esercizio 1 Si consideri la successione

$$a_n = \left(1 + \frac{2}{3n}\right)^{4n}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

(i) Determinarte il limite L della successione.

(ii) Stabilire il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}(L-a_n).$$

Esercizio 2 Si consideri la funzione

$$f(x)=\frac{1}{|x-1|}+|x+1|, \qquad x\in A,$$

ove A è l'insieme (massimale) di definizione di f.

(i) Descrivere l'insieme A.

(ii) Determinare i pinti dove f non è continua e quelli dove f non è derivabile.

(iii) Individuare gli asintoti di f.

(iv) Calcolare le quantità

$$f'\left(\frac{1}{2}\right), \qquad \int_{-2}^{0} f(x)\,dx.$$

Esercizio 3 Scrivere la soluzione $y(\cdot)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(x)+4y(x)=x \\ y(\pi)=\pi, \quad y'(\pi)=0. \end{cases}$$

Risoluzione

Esercizio 1 (i) Possiamo scrivere

$$a_n=\left[\left(1+\frac{2/3}{n}\right)^n\right]^4,$$

e ricordando il limite notevole

$$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{x}{k}\right)^k=e^x \qquad \forall x\in\mathbb{R},$$

si ottiene immediatamente

$$L=\lim_{n\to\infty}a_n=\left[e^{\frac{2}{3}}\right]^4=e^{\frac{8}{3}}.$$

ii Analizziamo la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[e^{\frac{8}{3}}-\left(1+\frac{2}{3n}\right)^{4n}\right]:$$

essa è a termini positivi, dato che $k \mapsto \left(1+\frac{x}{k}\right)^k$ è strettamente crescente per ogni $x > 0$. Si ha, raccogliendo a fattor comune $e^{\frac{8}{3}}$,

$$e^{\frac{8}{3}} - \left(1+\frac{2}{3n}\right)^{4n} = e^{\frac{8}{3}}\left[1 - e^{4\ln\left(1+\frac{2}{3n}\right)-\frac{8}{3}}\right];$$

d'altra parte, utilizzando lo sviluppo di Taylor del logaritmo,

$$4\ln(1+\frac{2}{3n} - \frac{8}{3} = 4n\left[\frac{2}{3n} - \frac{1}{2}\frac{4}{9n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] - \frac{8}{3} = -\frac{8}{9n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right) \mathrm{o},$$

e di conseguenza, grazie allo sviluppo di Taylor dell'esponenziale,

$$\begin{aligned} 1 - e^{4\ln\left(1+\frac{2}{3n}\right)-\frac{8}{3}} &= -\left[4\ln\left(1+\frac{2}{3n}\right) - \frac{8}{3}\right] + \mathrm{o}\left(\ln\left(1+\frac{2}{3n}\right) - \frac{8}{3}\right) = \\ &= \frac{8}{9n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right), \end{aligned}$$

da cui, infine,

$$e^{\frac{8}{3}} - \left(1+\frac{2}{3n}\right)^{4n} = e^{\frac{8}{3}}\left[\frac{8}{9n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right].$$

Dunque, per confronto asintotico con la serie armonica, le serie data diverge a $+\infty$.

Esercizio 2 (i) La funzione f è definita ovunque, salvo che per $x = 1$. Dunque

$$A = \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

(ii) Essendo composizione di funzioni continue, la funzione f è continua in ogni punto di A (si noti che $1 \notin A$, quindi non ha senso parlare di continuità nel punto . Inoltre f è derivabile in tutti i punti di A, salvo che in $x = -1$, dove si annulla il valore assoluto $|x+1|$.

(iii) Risulta anzitutto

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{1}{|x-1|} + 2 = +\infty,$$

quindi la retta di equazione $x = 1$ è un asintoto verticale di f per $x \to 1$. Inoltre per $x \to +\infty$ si ha

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 + \lim_{x\to+\infty}(x+1) = +\infty,$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 + \lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x} = 1,$$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x) - x) = 0 + \lim_{x\to+\infty}(x+1-x) = 1,$$

e dunque la retta di equazione $y = x+1$ è asintoto obliquo di f per $x \to +\infty$. Similmente,per $x \to -\infty$ si ha

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0 + \lim_{x\to-\infty}(-x-1) = +\infty,$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = 0 + \lim_{x\to-\infty}\frac{-x-1}{x} = -1,$$
$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)+x) = 0 + \lim_{x\to-\infty}(-x-1+x) = -1,$$

e dunque la retta di equazione $y = -x-1$ è asintoto obliquo di f per $x \to -\infty$.

(iv) Nell'intervallo $]-1,1[$, che contiene il punto $\frac{1}{2}$, la f è derivabile con

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x} + x + 1\right) = \frac{1}{(1-x)^2} + 1 \quad \forall x \in]-1.,1[\,;$$

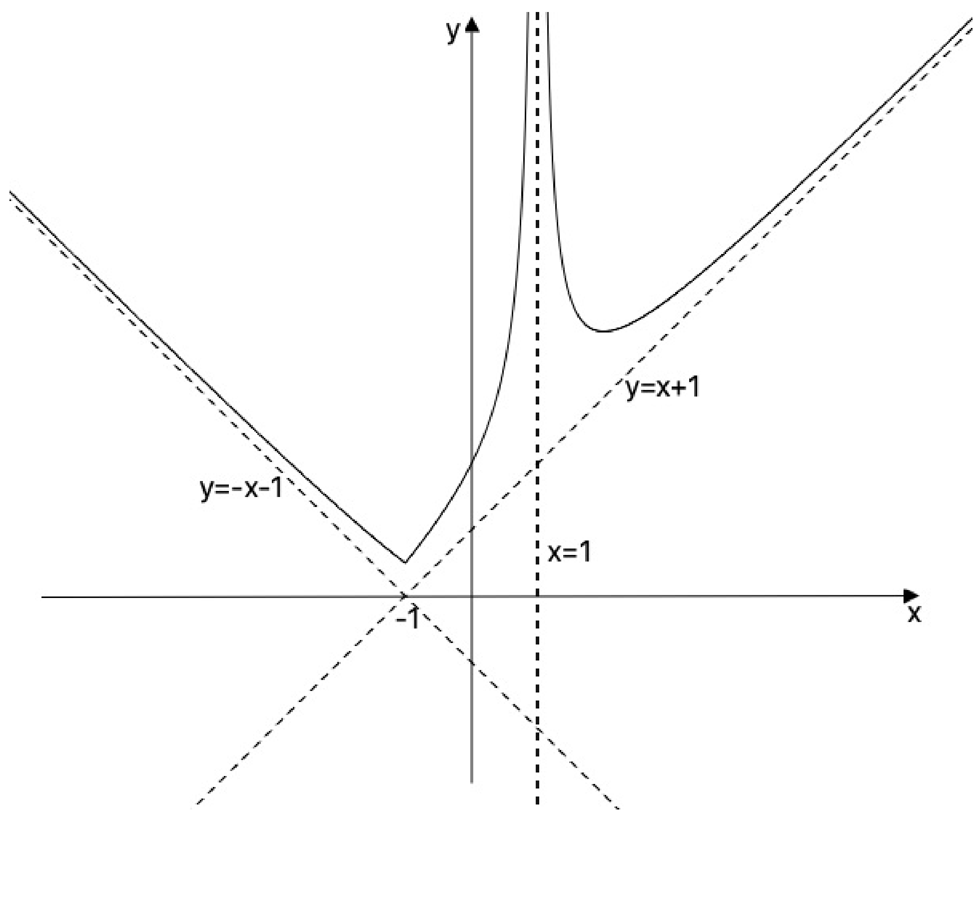
quindi

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = 5.$$

Inoltre

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{0} f(x)\,dx &= \int_{-2}^{-1}\left(\frac{1}{1-x} - x - 1\right)dx + \int_{-1}^{0}\left(\frac{1}{1-x} + x + 1\right)dx = \\ &= \left[-\ln(1-x) - \frac{x^2}{2} - x\right]_{-2}^{-1} + \left[-\ln(1-x) + \frac{x^2}{2} + x\right]_{-1}^{0} = \\ &= \left(\ln\frac{3}{2} + \frac{3}{2} - 1\right) + \left(\ln 2 - \frac{1}{2} + 1\right) = \ln 3 + 1.\end{aligned}$$

Un grafico approssimativo di f è il seguente:



Esercizio 3 L'equazione differenziale è del secondo ordine, lineare a coefficienti costanti. Il polinomio caratteristico associato all'equazione omogenea è λ^2+4, e le sue radici sono $\lambda = \pm 2i$. Dunque le soluzioni (reali) dell'equazione omogenea sono

$$y(x) = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Possiamo cercare una soluzione dell'equazione non omogenea della forma

$$v(x) = ax + b.$$

Sostituendo nell'equazione differenziale troviamo

$$v''(x) + 4v(x) = 0 + 4(ax+b) = x \qquad \Longleftrightarrow \qquad a = \frac{1}{4}, \quad b = 0.$$

Dunque le soluzioni dell'equazione non omogenea sono

$$y(x) = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + \frac{x}{4}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Imponiamo le condizioni di Cauchy: essendo

$$y'(x) = -2c_1 \sin 2x + 2c_2 \cos 2x + \frac{1}{4},$$

otteniamo

$$\pi = y(\pi) = c_1 + \frac{1}{4}, \quad 0 = y'(\pi) = 2c_2 + \frac{1}{4} \qquad \Longleftrightarrow \qquad c_1 = \frac{3\pi}{4}, \quad c_2 = -\frac{1}{8}.$$

Quindi la soluzione del problema di Cauchy è

$$y(x) = \frac{3\pi}{4} \cos 2x - \frac{1}{8} \sin 2x + \frac{x}{4}.$$

Prova scritta del 12 aprile 2018

Esercizio 1 Stabilire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ sono convergenti le serie

$$\textbf{(a)} \ \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} \ln \frac{3n^2+6}{3n^2+5}, \qquad \textbf{(b)} \ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n!}{n^2\,(2n)!} \right)^{\alpha}.$$

Esercizio 2 Si tracci un grafico approssimato della funzione

$$f(x) = \int_0^{\sin x} e^{-t^2}\, dt, \qquad 0 \le x \le 2\pi,$$

specificando in particolare:

(i) i valori della funzione e della sua derivata agli estremi dell'intervallo;

(ii) le zone di positività e negatività;

(iii) le zone di crescenza e decrescenza, con i punti di massimo e di minimo;

(iv) le zone di convessità e concavità, con i punti di flesso.

Esercizio 3 Calcolare gli integrali

$$\textbf{(a)} \ \int_0^1 \frac{1}{(1+t)^2} \sqrt{\frac{1}{(1+t)^2} + \frac{1}{(1+t)^4}}\, dt, \qquad \textbf{(b)} \ \int_{-\infty}^0 e^{e^t+t}\, dt.$$

Risoluzione

Esercizio 1 (a) La serie è a termini positivi. Dallo sviluppo di Taylor di $t \mapsto \ln(1+t)$ nell'origine segue che

$$n^\alpha \ln \frac{3n^2+6}{3n^2+5} = n^\alpha \ln\left(1+\frac{1}{3n^2+5}\right) \simeq \frac{1}{3} n^{\alpha-2},$$

e questo ci permette di concludere, in virtù del criterio del confronto asintotico, che la serie proposta si comporta come la serie $\Sigma n^{\alpha-2}$. Pertanto,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^\alpha \ln \frac{3n^2+6}{3n^2+5} \begin{cases} \text{diverge} & \text{se } \alpha \geq 1, \\ \text{converge} & \text{se } \alpha < 1. \end{cases}$$

(b) La serie è a termini positivi. Utilizziamo il criterio del rapporto:

$$\begin{aligned} \frac{\left(\frac{(n+1)!}{(n+1)^2\,(2n+2)!}\right)^\alpha}{\left(\frac{n!}{n^2\,(2n)!}\right)^\alpha} &= \left((n+1)\left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \frac{1}{(2n+2)(2n+1)}\right)^\alpha \simeq \\ &\simeq \left(\frac{n^2}{(n+1)(2n+2)(2n+1)}\right)^\alpha \simeq \frac{1}{(4n)^\alpha}. \end{aligned}$$

Quindi il rapporto fra due termini consecutivi ha limite 0 se e solo se $\alpha > 0$, ed in questo caso, quindi, la serie converge. Se $\alpha = 0$, la serie si riduce a $\Sigma 1$, e quindi diverge. Infine, se $\alpha < 0$, il rapporto fra due termini consecutivi ha limite $+\infty$ e pertanto la serie diverge. Ne segue

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n!}{n^2\,(2n)!}\right)^\alpha \begin{cases} \text{converge} & \text{se } \alpha > 0, \\ \text{diverge} & \text{se } \alpha \leq 0. \end{cases}$$

Esercizio 2 (i) La funzione f è la funzione composta $G(h(x))$, dove

$$G(r) = \int_0^r e^{-t^2}\,dt, \qquad h(x) = \sin x.$$

Quindi

$$f'(x) = G'(h(x))\,h'(x) = e^{-\sin^2 x}\cos x \qquad \forall x \in [0, 2\pi].$$

In particolare

$$f(0) = f(2\pi) = 0, \qquad f'(0) = f'(2\pi) = 1.$$

(ii) La funzione f, che è l'integrale di una funzione positiva, sarà positiva quando il secondo estremo d'integrazione è positivo e sarà negativa quando il secondo estremo d'integrazione è negativo. Perciò

$$f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [0, \pi], \qquad f(x) \leq 0 \quad \forall x \in [\pi, 2\pi].$$

(iii) Risulta, come abbiamo visto,

$$f'(x) = e^{-\sin^2 x}\cos x,$$

quindi

$$f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right], \qquad f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right],$$

e dunque f cresce in $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ e in $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$ e decresce in $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ e in $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$. In particolare, f ha massimo assoluto in $\frac{\pi}{2}$, dove vale

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \int_0^1 e^{-t^2}\, dt,$$

ed ha minimo assoluto in $\frac{3\pi}{2}$, dove vale

$$f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \int_0^{-1} e^{-t^2}\, dt = -\int_{-1}^{0} e^{-t^2}\, dt = -\int_0^1 e^{-t^2}\, dt.$$

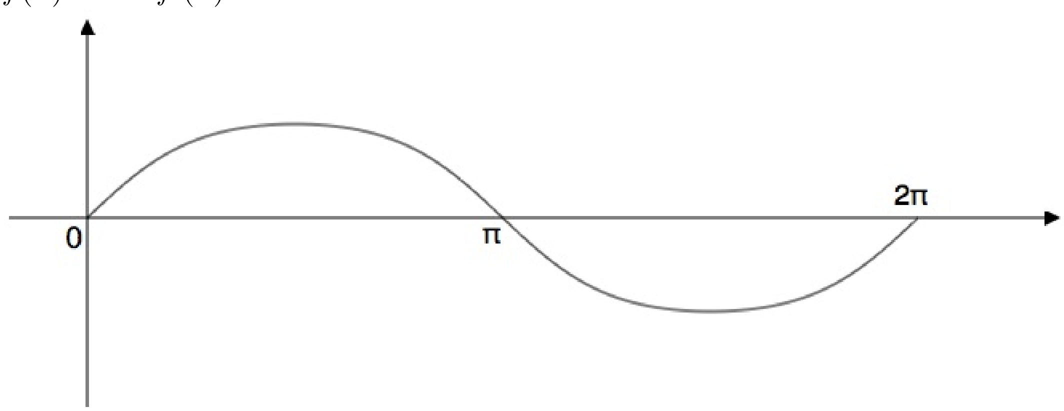
Si ha poi

$$f''(x) = e^{-\sin^2 x}(-2\sin x \cos^2 x - \sin x) = -\sin x\, e^{-\sin^2 x}(2\cos^2 x + 1),$$

quindi

$$f''(x) \leq 0 \quad \forall x \in [0, \pi], \qquad f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in [\pi, 2\pi],$$

ovvero f è concava in $[0, \pi]$ ed è convessa in $[\pi, 2\pi]$. In particolare π è punto di flesso con $f(\pi) = 0$ e $f'(\pi) = -1$.



Si può aggiungere che la f si estende a $\mathbb{R}$ e che l'estensione è 2π-periodica: essa ha allora due ulteriori punti di flesso in 0 e 2π, ove, come sappiamo, $f(0) = f(2\pi) = 0$, $f'(0) = f'(2\pi) = 1$.

Esercizio 3 (a) Possiamo scrivere

$$\int_0^1 \frac{1}{(1+t)^2}\sqrt{\frac{1}{(1+t)^2} + \frac{1}{(1+t)^4}}\, dt = \int_0^1 \frac{1}{(1+t)^3}\sqrt{1 + \frac{1}{(1+t)^2}}\, dt,$$

e con la sostituzione $s = \frac{1}{1+t}$, da cui $dt = -\frac{ds}{s^2}$, ricaviamo

$$\int_0^1 \frac{1}{(1+t)^2}\sqrt{\frac{1}{(1+t)^2} + \frac{1}{(1+t)^4}}\, dt = \int_{\frac{1}{2}}^1 s^3\sqrt{1+s^2}\, \frac{ds}{s^2} = \int_{\frac{1}{2}}^1 s\sqrt{1+s^2}\, ds.$$

L'integrando ha come primitiva la funzione $\frac{1}{3}(1+s^2)^{\frac{3}{2}}$, e pertanto si ha

$$\int_0^1 \frac{1}{(1+t)^2}\sqrt{\frac{1}{(1+t)^2}+\frac{1}{(1+t)^4}}\,dt = \frac{1}{3}\left[(1+s^2)^{\frac{3}{2}}\right]_{\frac{1}{2}}^{1} = \frac{1}{3}\left[2^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{3}{2}}\right].$$

(b) Posto $u = e^t$, si ha $du = e^t\,dt$, da cui

$$\int_{-\infty}^{0} e^{e^t+t}\,dt = \int_0^1 e^u\,du = \left[e^u\right]_0^1 = e-1.$$

Prova scritta del 10 giugno 2019

Esercizio 1.1 Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la successione definita da

$$\begin{cases} a_0 = \lambda > 0 \\ a_{n+1} = \frac{a_n^2}{1+a_n}, \end{cases} \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Provare che:

(i) $a_n > 0$ e $a_{n+1} < a_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$;

(ii) $a_n \to 0$ per $n \to \infty$;

(iii) la serie Σa_n è convergente.

Esercizio 1.2 Stabilire il comportamento della serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2\frac{1}{n} - \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^2}} - \sqrt[4]{1+\frac{1}{n^2}}}\, x^n, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 2.1 Calcolare, se esistono, i seguenti limiti:

$$\textbf{(a)}\ \lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x e^{t^2}\sin t\,dt - \frac{1}{2}\sin^2 x}{\sin(x^4)}, \qquad \textbf{(b)}\ \lim_{t\to+\infty} \frac{\ln\sqrt{t+1} - \ln\sqrt{t-1}}{\left[\sqrt{t+1}-\sqrt{t-1}\right]^2}.$$

Esercizio 2.2 Si consideri la funzione

$$f(x,y) = x|x-y|, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

(i) Si dica se f è differenziabile in $(0,0)$.

(ii) Posto $Z = \{(x,y):\ f(x,y) = 4\}$, si verifichi che $(2,0) \in Z$ e si scriva l'equazione della retta tangente a Z nel punto $(2,0)$.

Esercizio 3.1 Calcolare, se esistono, i seguenti integrali impropri:

$$\textbf{(a)}\ \int_1^6 x\,\ln(\sqrt{x+3}-2)\,dx, \qquad \textbf{(b)}\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}\right] dx.$$

Esercizio 3.2 Scrivere le soluzioni dei problemi di Cauchy

$$\textbf{(a)}\ \begin{cases} y' = \dfrac{y(1+y^2)}{x} \\ y(1) = 2, \end{cases} \qquad \textbf{(b)}\ \begin{cases} y' = \dfrac{y}{x} + \dfrac{1}{x^2} \\ y(1) = 0. \end{cases}$$

Risoluzione

Esercizio 1.1 (i) Ragioniamo per induzione. Si ha $a_0 = 1 > 0$ e $a_1 = \frac{1}{2} < 1 = a_0$; se inoltre risulta $a_n > 0$ e $a_{n+1} < a_n$, allora $a_{n+1} = \frac{a_n^2}{1+a_n}$ è il prodotto di due numeri positivi e quindi è positivo, mentre

$$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = \frac{a_{n+1}}{1+a_{n+1}} < 1, \quad \text{ossia} \quad a_{n+2} < a_{n+1}.$$

Ciò dimostra il passo induttivo e quindi prova la tesi.

(ii) Essendo decrescente e positiva, la successione $\{a_n\}$ ha limite $L \geq 0$. Passando al limite nella relazione di ricorrenza si ottiene $L = \frac{L^2}{1+L}$, ovvero, moltiplicando per $1+L$, $L + L^2 = L^2$, da cui $L = 0$. Dunque $a_n \to 0$ per $n \to \infty$.

(iii) La serie è a termini positivi. Applicando il criterio del rapporto, otteniamo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{1+a_n} = 0 < 1,$$

quindi la serie Σa_n converge.

Esercizio 1.2 Analizziamo il coefficiente di x^n utilizzando gli sviluppi di Taylor: per il numeratore si ha, quando $n \to \infty$,

$$\begin{aligned}\sin^2\frac{1}{n} - \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) &= \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^4}\right)\right]^2 - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{2n^4} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^5}\right) = \\ &= \frac{1}{n^2} - \frac{1}{3n^4} - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{2n^4} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^5}\right) = \frac{1}{6n^4} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^5}\right),\end{aligned}$$

mentre per il denominatore risulta, per $n \to \infty$,

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^2}} - \sqrt[4]{1+\frac{1}{n^2}} &= 1 + \frac{1}{3n^2} - \frac{1}{9n^4} - 1 - \frac{1}{4n^2} + \frac{3}{32n^4} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^5}\right) = \\ &= \frac{1}{12n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).\end{aligned}$$

Pertanto

$$\frac{\sin^2\frac{1}{n} - \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^2}} - \sqrt[4]{1+\frac{1}{n^2}}} = \frac{\frac{1}{6n^4} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^5}\right)}{\frac{1}{12n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)} = \frac{2}{n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^3}\right) \quad \text{per} \quad n \to \infty.$$

Ciò implica che

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{\sin^2\frac{1}{n} - \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^2}} - \sqrt[4]{1+\frac{1}{n^2}}}\right|} = 1.$$

Perciò il raggio di convergenza della serie di potenze è 1, per cui la serie converge assolutamente per $|x| < 1$ e non converge per $|x| > 1$; inoltre, per $|x| = 1$ la serie converge assolutamente per confronto asintotico con la serie $\Sigma \frac{1}{n^2}$.

Esercizio 2.1 (a) Il limite si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Il denominatore $sinx^4$ può essere sostituito da x^4, che è un infinitesimo del suo stesso ordine. Ci riduciamo quindi al

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x e^{t^2} \sin t\, dt - \frac{1}{2}\sin^2 x}{x^4}.$$

Ricordando che

$$\frac{d}{dx}\int_0^x f(t)\, dt = f(x)$$

quando f è continua, conviene applicare il teorema di De l'Hôpital, riducendoci (sotto condizione) al calcolo del

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}\sin x - \sin x \cos x}{4x^3},$$

ovvero

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{4x^2} \cdot \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{4x^2}.$$

Dato che, per $x \to 0$,

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \mathrm{o}(x^2), \qquad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \mathrm{o}(x^2),$$

otteniamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{4x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{3x^2}{2}}{4x^2} = \frac{3}{8},$$

e dunque anche il limite proposto esiste e vale $\frac{3}{8}$.

(b) Poiché, per $t \to +\infty$,

$$\ln\sqrt{t+1} - \ln\sqrt{t-1} = \frac{1}{2}\ln\frac{t+1}{t-1} \to 0,$$
$$\left[\sqrt{t+1} - \sqrt{t-1}\right]^2 = \frac{4}{\left[\sqrt{t+1} + \sqrt{t-1}\right]^2} \to 0,$$

il limite è una forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Possiamo scriverlo nella forma

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{2}{t-1}\right)}{\frac{4}{\left[\sqrt{t-1}\left(1+\sqrt{1+\frac{2}{t-1}}\right)\right]^2}} = \lim_{t\to+\infty} \frac{\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{2}{t-1}\right)}{\frac{4}{(t-1)\left(1+\sqrt{1+\frac{2}{t-1}}\right)^2}},$$

ovvero, ponendo $s = \frac{2}{t-1}$,

$$\lim_{s\to 0^+} \frac{\frac{1}{2}\ln(1+s)}{\frac{2s}{\left(1+\sqrt{1+s}\right)^2}} = \lim_{s\to 0^+} \frac{\frac{1}{4}\ln(1+s)}{s}\left(1+\sqrt{1+s}\right)^2 = 1.$$

Dunque il limite proposto vale 1.

Esercizio 3.1 (a) L'integrando è negativo, essendo $0 < \sqrt{x+3} - 2 < 1$, e quindi l'integrale improprio esiste. Ponendo $t = \sqrt{x+3} - 2$, si ha $0 < t < 1$, $x = (t+2)^2 - 3$, $dx = 2(t+2)dt$ e dunque

$$\int_1^6 x\,\ln(\sqrt{x+3}-2)\,dx = 2\int_0^1 [(t+2)^2-3](t+2)\ln t\,dt = 2\int_0^1 (t^3+6t^2+9t+2)\ln t\,dt.$$

Integrando per parti si ha

$$\begin{aligned} 2\int_0^1 [(t+2)^2-3](t+2)\ln t\,dt &= 2\int_0^1 (t^3+6t^2+9t+2)\ln t\,dt = \\ &= 2\left[\left(\frac{t^4}{4}+2t^3+\frac{9}{2}t^2+2t\right)\ln t\right]_0^1 - 2\int_0^1 \left(\frac{t^3}{4}+2t^2+\frac{9}{2}t+2\right)dt = \\ &= 0 - 2\left[\frac{t^4}{16}+\frac{2}{3}t^3+\frac{9}{4}t^2+2t\right]_0^1 = -2\left[\frac{1}{16}+\frac{2}{3}+\frac{9}{4}+2\right] = -\frac{239}{24}\,. \end{aligned}$$

Dunque l'integrale proposto vale $-\frac{185}{24}$.

(b) L'integrando è positivo, essendo $\sin^2 x < x^2$ in tutto l'intervallo: dunque l'integrale esiste. Osserviamo che, in analogia con la relazione $\frac{d}{dx}\tan x = \frac{1}{\cos^2 x}$, vale

$$\frac{d}{dx}\frac{\cos x}{\sin x} = -\frac{1}{\sin^2 x}\,.$$

D'altra parte è facile verificare che

$$\lim_{x\to 0^+}\left[-\frac{\cos x}{\sin x}+\frac{1}{x}\right] = \lim_{x\to 0^+}\frac{x\cos x - \sin x}{x\sin x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{-x^3}{3}}{x^2} = 0,$$

e dunque si ha

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\right]dx = \left[-\frac{\cos x}{\sin x}+\frac{1}{x}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0+\frac{2}{\pi} - \lim_{x\to 0^+}\left[-\frac{\cos x}{\sin x}+\frac{1}{x}\right] = \frac{2}{\pi}.$$

Dunque l'integrale proposto vale $\frac{2}{\pi}$.

Esercizio 3.2 (a) L'equazione è a variabili separabili. Osservato che l'unica soluzione costante è $y = 0$ che non risolve il problema di Cauchy, si ha

$$\frac{dy}{y(1+y^2)} = \frac{dx}{x}.$$

Poiché, come è facile verificare,

$$\frac{1}{y(1+y^2)} = \frac{1}{y} - \frac{y}{1+y^2}\,,$$

si ricava successivamente, visto che $x > 0$ e $y > 0$ in un intorno del punto iniziale $(1, 2)$,

$$\ln y - \frac{1}{2}\ln(1+y^2) = \ln\frac{y}{\sqrt{1+y^2}} = \ln x + c,$$

$$\frac{y}{\sqrt{1+y^2}} = Kx, \qquad K > 0,$$

e da qui, con calcoli elementari,

$$y^2 = \frac{K^2x^2}{1-K^2x^2},$$

e infine

$$y = \frac{Kx}{\sqrt{1-K^2x^2}}.$$

Imponendo la condizione $y(1) - 2$ si ottiene

$$2 = \frac{K}{\sqrt{1-K^2}},$$

da cui, con altri calcoli elementari,

$$K^2 = \frac{4}{5}, \quad \text{ovvero} \quad K = \frac{2}{\sqrt{5}}\,.$$

Si conclude che la soluzione è

$$y(x) = \frac{\frac{2}{\sqrt{5}}\,x}{\sqrt{1-\frac{4}{5}\,x^2}} = \frac{2x}{\sqrt{5-4x^2}}, \qquad -\frac{\sqrt{5}}{2} < x < \frac{\sqrt{5}}{2}\,.$$

(b) L'equazione è lineare, definita in $]0,\infty[$. Si ha successivamente, notando che $a(x) = \frac{1}{x}$ e $A(x) = \ln x$, e moltiplicando l'equazione per $e^{-A(x)} = \frac{1}{x}$,

$$\frac{d}{dx}\frac{y}{x} = \frac{1}{x^3},$$

$$\frac{y}{x} = -\frac{1}{2x^2} + c\,,$$

$$y = -\frac{1}{2x} + cx.$$

Imponendo la condizione $y(1) = 0$ si ottiene $0 = -\frac{1}{2} + c$, e pertanto $c = \frac{1}{2}$. Dunque la soluzione è

$$y(x) = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right).$$

Prova scritta del 1° luglio 2019

Esercizio 1 Determinare le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ del sistema

$$\begin{cases} |z-1-i| = 1 \\ \operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z = 2. \end{cases}$$

Esercizio 2 Si consideri la funzione

$$f(x) = \ln(|x^2 - x| + 3x + 6), \qquad x \in A,$$

ove A è l'insieme (massimale) di definizione di f.

(i) Descrivere l'insieme A.

(ii) Determinare, se esistono, i punti dove f non è continua e quelli dove f non è derivabile.

(iii) Individuare, se esistono, gli asintoti di f.

(iv) Determinare gli intervalli di crescenza e decrescenza.

(v) Determinare gli intervalli di convessità e concavità.

(vi) Tracciare approssimativamente il grafico di f.

Esercizio 3 Trovare i punti stazionari della funzione

$$f(x,y) = xy \ln(1+x^2+y^2), \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

stabilendone la natura, e calcolare

$$\inf_{\mathbb{R}^2} f, \qquad \sup_{\mathbb{R}^2} f.$$

Esercizio 4 Si calcoli l'integrale improprio

$$\int_a^\infty \frac{\arctan x}{x^2}\, dx, \qquad a > 0,$$

e se ne determini il limite per $a \to 0^+$.

Risoluzione

Esercizio 1 Poniamo $z = x + iy$, con $x, y \in \mathbb{R}$; allora il sistema diventa:

$$\begin{cases} \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} = 1 \\ x + y = 2. \end{cases}$$

Si tratta a questo punto di un esercizio di geometria analitica: trovare le intersezioni fra una circonferenza e una retta. Inserendo $x = 2-y$ nell'equazione $(x-1)^2+(y-1)^2 = 1$ si ottiene

$$(1-y)^2 + (y-1)^2 = 1,$$

ossia $2(y-1)^2 = 1$: ne segue

$$|y-1| = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

da cui

$$y = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad x = 1 \mp \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Pertanto i numeri complessi cercati sono

$$z_1 = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + i\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \qquad z_2 = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + i\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Esercizio 2 (i) Poiché $x^2 - x \leq 0$ se e solo se $0 \leq x \leq 1$, si ha

$$f(x) = \begin{cases} \ln(-x^2 + 4x + 6) & \text{se } x \in A \cap [0,1], \\ \ln(x^2 + 2x + 6) & \text{se } x \in A \setminus [0,1]; \end{cases}$$

dunque la funzione f è certamente ben definita in ogni punto $x \notin [0,1]$, dove risulta $x^2 + 2x + 6 = (x+1)^2 + 5 > 0$. Invece per $x \in [0,1]$ occorre controllare che sia

$$-x^2 + 4x + 6 > 0, \qquad \text{ossia} \qquad x^2 - 4x - 6 < 0:$$

dato che tale binomio si annulla per $x = 2 \pm \sqrt{10}$, si ha

$$x^2 - 4x - 6 < 0 \qquad \forall x \in]2 - \sqrt{10}, 2 + \sqrt{10}[\,.$$

Essendo $2 - \sqrt{10} < 0 < 1 < 2 + \sqrt{10}$, deduciamo che $-x^2 + 4x + 6 > 0$ per ogni $x \in [0,1]$, e pertanto la funzione f è ben definita in ogni punto $x \in [0,1]$. Si conclude che il dominio di definizione di f è $A = \mathbb{R}$.

(ii) La funzione f è continua su $\mathbb{R}$, essendo composizione di funzioni continue: un polinomio, il modulo di un polinomio ed un logaritmo. Invece f non sarà derivabile nei punti dove si annulla il modulo, ossia $x = 0$ e $x = 1$. Si ha infatti

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-2x + 4}{-x^2 + 4x + 6} & \text{se } x \in]0,1[\\ \dfrac{2x + 2}{x^2 + 2x + 6} & \text{se } x \in]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[\,; \end{cases}$$

pertanto $f(0) = \ln 6$, $f(1) = \ln 9$, e

$$f'(0^-) = \frac{1}{3}, \qquad f'(0^+) = \frac{2}{3}, \qquad f'(1^-) = \frac{2}{9}, \qquad f'(1^+) = \frac{4}{9}\,.$$

(iii) Essendo f continua su $\mathbb{R}$, essa non può avere asintoti verticali. Per $x \to \pm\infty$ si ha

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \ln(x^2 + 2x + 6) = +\infty,$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\ln(x^2 + 2x + 6)}{x} = 0,$$

e questo esclude la presenza di asintoti per $x \to \pm\infty$.

(iv) L'espressione di f' per $x \in [0,1]$ ci dice che

$$f'(x) = \frac{-2x + 4}{-x^2 + 4x + 6} > 0 \qquad \forall x \in]0,1[\,,$$

essendo il quoziente di due quantità positive. Anche sulla semiretta $]1, +\infty[$ si ha, per la stessa ragione,

$$f'(x) = \frac{2x + 2}{x^2 + 2x + 6} > 0 \qquad \forall x > 1.$$

Invece sulla semiretta $]-\infty, 0[$ si ha

$$f'(x) = \frac{2x+2}{x^2+2x+6} > 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad -1 \le x < 0.$$

Si conclude che f è decrescente in $]-\infty, -1]$ e crescente in $[-1, +\infty[$. In particolare, -1 è punto di minimo relativo ed assoluto per f, con

$$f(-1) = \min_{\mathbb{R}} f = \ln 5, \qquad \sup_{\mathbb{R}} f = +\infty.$$

(v) Calcoliamo la derivata seconda:

$$f''(x) = \begin{cases} \dfrac{-2(-x^2+4x+6)-(-2x+4)^2}{(-x^2+4x+6)^2} = \dfrac{-2x^2+8x-28}{(-x^2+4x+6)^2} & \text{se } x \in]0,1[\\ \dfrac{2(x^2+2x+6)-(2x+2)^2}{(x^2+2x+6)^2} = \dfrac{-2x^2-4x+8}{(x^2+2x+6)^2} & \text{altrimenti;} \end{cases}$$

Analizziamo il segno del numeratore nei due casi: per $x \in [0,1]$ si ha

$$-2x^2+8x-28 > 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x^2-4x+14 < 0,$$

e ciò non accade mai poiché $x^2-4x+14 = (x-2)^2+10 > 0$. Dunque la f risulta concava in $[0,1]$.
Per $x \notin [0,1]$ si ha invece

$$-2x^2-4x+8 > 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x^2+2x-4 < 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad -1-\sqrt{5} < x < -1+\sqrt{5}.$$

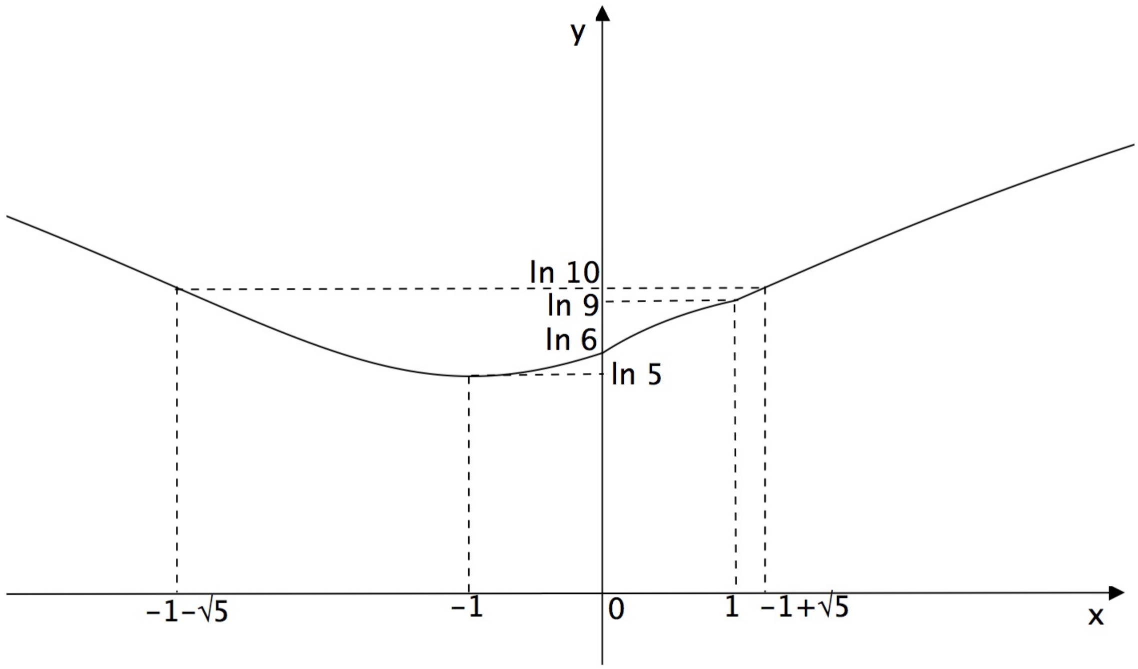
Essendo $-1-\sqrt{5} < 0 < 1 < -1+\sqrt{5}$, e tenuto conto di quanto detto per l'intervallo $[0,1]$, si conclude che f è concava in $]-\infty, -1-\sqrt{5}]$, convessa in $[-1-\sqrt{5}, 0]$, concava in $[0,1]$, convessa in $[1, -1+\sqrt{5}]$, e infine concava in $[-1+\sqrt{5}, +\infty[$. In particolare i punti $x = -1 \pm \sqrt{5}$ sono punti di flesso, con

$$f(-1-\sqrt{5}) = \ln 10, \quad f'(-1-\sqrt{5}) = -\frac{3+\sqrt{5}}{10}\,,$$

$$f(-1+\sqrt{5}) = \ln 10, \quad f'(-1+\sqrt{5}) = \frac{1+\sqrt{5}}{5}\,.$$

I punti $x = 0$ e $x = 1$ sono anch'essi punti di flesso, ma sono punti angolosi dove la f non è derivabile.

(vi) Tenuto conto delle considerazioni precedenti, il grafico di f è approssimativamente il seguente:



Esercizio 3 La funzione f è definita su tutto $\mathbb{R}^2$ ed è di classe C^∞. Cerchiamo i punti stazionari di f: si deve avere

$$\begin{cases} f_x(x,y) = y\,\ln(1+x^2+y^2) + \dfrac{2x^2y}{1+x^2+y^2} = 0 \\[2ex] f_y(x,y) = x\,\ln(1+x^2+y^2) + \dfrac{2xy^2}{1+x^2+y^2} = 0. \end{cases}$$

La prima equazione è risolta, intanto, per $y = 0$, e in tal caso la seconda equazione diventa $x\,\ln(1+x^2) = 0$ che implica $x = 0$. Si trova così il punto stazionario $(0,0)$. La prima equazione non ha altre soluzioni perché il fattore che moltiplica la y è strettamente positivo per ogni $x \neq 0$. Quindi non vi sono altri punti stazionari.
Per scoprire la natura del punto stazionario $(0,0)$ non è necessario calcolare la matrice Hessiana di f, poiché si vede subito che

$$f(0,0) = 0, \qquad f(\varepsilon,\varepsilon) > 0, \quad f(-\varepsilon,\varepsilon) < 0 \quad \forall \varepsilon > 0,$$

cosicché $(0,0)$ è punto di sella.
Infine,

$$\sup_{\mathbb{R}^2} f \geq \lim_{y\to+\infty} f(1,y) = \lim_{y\to+\infty} y\,\ln(2+y^2) = +\infty,$$

mentre

$$\inf_{\mathbb{R}^2} f \leq \lim_{y\to+\infty} f(-1,y) = \lim_{y\to+\infty} -y\,\ln(2+y^2) = -\infty,$$

Esercizio 4 L'integrale improprio $\int_a^\infty \frac{\arctan x}{x^2}\,dx$ esiste sicuramente, finito o infinito, perché l'integrando è positivo. Per calcolarlo, fissato $b > a$, integrando per parti si trova:

$$\begin{aligned}
\int_a^b \frac{\arctan x}{x^2}\,dx &= -\left[\frac{\arctan x}{x}\right]_a^b + \int_a^b \frac{1}{x(1+x^2)}\,dx = \\
&= -\frac{\arctan b}{b} + \frac{\arctan a}{a} + \int_a^b \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}\right) dx = \\
&= -\frac{\arctan b}{b} + \frac{\arctan a}{a} + \left[\ln x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_a^b = \\
&= -\frac{\arctan b}{b} + \frac{\arctan a}{a} + \left[\ln \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right]_a^b = \\
&= -\frac{\arctan b}{b} + \frac{\arctan a}{a} + \ln \frac{b}{\sqrt{1+b^2}} - \ln \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}\,.
\end{aligned}$$

Facendo il limite per $b \to +\infty$ si ottiene

$$\int_a^\infty \frac{\arctan x}{x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b \frac{\arctan x}{x^2}\,dx = \frac{\arctan a}{a} - \ln \frac{a}{\sqrt{1+a^2}} \qquad \forall a > 0.$$

Adesso facciamo il limite di questa espressione per $a \to 0^+$. Si trova

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{\arctan x}{x^2}\,dx &= \lim_{a\to 0^+} \int_a^\infty \frac{\arctan x}{x^2}\,dx = \\
&= \lim_{a\to 0^+} \left(\frac{\arctan a}{a} - \ln \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}\right) = 1 + \infty = +\infty.
\end{aligned}$$

Prova scritta del 22 luglio 2019

Esercizio 1 Descrivere il comportamento delle seguenti serie:

$$\textbf{(a)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n+2^n}\,, \qquad \textbf{(b)} \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}\,.$$

Esercizio 2 Determinare, se esiste, il limite seguente:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{3 - 3\cos\sqrt{x} - \sin x - \ln\left(1 + \frac{x}{2}\right)}{e^x - \cos x - x\sqrt{1+2x}}\,.$$

Esercizio 3 Si calcoli, se esiste, l'integrale improprio seguente:

$$\int_0^1 (\ln x)^3\, x^{-1-\ln x}\,dx.$$

Risoluzione

Esercizio 1 (a) La serie è a termini positivi. Inoltre risulta

$$\frac{n+1}{n+2^n} < \frac{n+1}{2^n} \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$

e d'altra parte, per $n \to \infty$,

$$\frac{\frac{n+2}{2^{n+1}}}{\frac{n+1}{2^n}} = \frac{1}{2}\,\frac{n+2}{n+1} \to \frac{1}{2} < 1;$$

dunque, per il criterio del rapporto, la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^n}$$

è convergente. Ne segue, per il criterio del confronto, che anche la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n+2^n}$$

è convergente.

(b) La serie è a segni alterni. Risulta

$$\frac{\ln n}{n} > 0 \quad \forall n \geq 2, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0,$$

ed inoltre si può verificare che il modulo del termine generale è definitivamente decrescente, e più precisamente si ha

$$\frac{\ln(n+1)}{n+1} < \frac{\ln n}{n} \qquad \forall n \geq 3.$$

Infatti la relazione precedente equivale a

$$\ln(n+1) < \ln n \left(1 + \frac{1}{n}\right),$$

ovvero a

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{\ln n}{n},$$

e quest'ultima maggiorazione è vera poiché, in virtù di una stima ben nota,

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n} < \frac{\ln n}{n} \qquad \forall n \geq 3.$$

Ne segue che la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$$

converge per il criterio di Leibniz.

Esercizio 2 Dagli sviluppi di Taylor nel punto $x = 0$, arrestati al terzo ordine, segue:

$$3 - 3\cos\sqrt{x} = \frac{3}{2}\,x - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{240} + \mathrm{o}(x^3),$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \mathrm{o}(x^3),$$

$$\ln\left(1 + \frac{x}{2}\right) = \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{24} + \mathrm{o}(x^3),$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \mathrm{o}(x^3),$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \mathrm{o}(x^3),$$

$$x\sqrt{1+2x} = x + x^2 - \frac{x^3}{2} + \mathrm{o}(x^3).$$

Pertanto, per $x \to 0^+$, i termini di ordine 0, 1 e 2 si cancellano sia a numeratore che a denominatore, e si trova

$$\frac{3 - 3\cos\sqrt{x} - \sin x - \ln\left(1 + \frac{x}{2}\right)}{e^x - \cos x - x\sqrt{1+2x}} \simeq \frac{\left(\frac{1}{240} + \frac{1}{6} - \frac{1}{24}\right)x^3}{\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\right)x^3},$$

cosicché

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{3 - 3\cos\sqrt{x} - \sin x - \ln\left(1 + \frac{x}{2}\right)}{e^x - \cos x - x\sqrt{1+2x}} = \frac{\frac{1}{240} + \frac{1}{6} - \frac{1}{24}}{\frac{1}{6} + \frac{1}{2}} = \frac{31}{120}\,.$$

Esercizio 3 L'integrale improprio esiste certamente perché l'integrando è negativo. Per calcolarlo, visto che la singolarità è nell'origine, fissiamo $\delta \in]0,1[$ e consideriamo l'integrale

$$\int_\delta^1 (\ln x)^3\, x^{-1-\ln x}\, dx.$$

Con la sostituzione $\ln x = t$, si ricava

$$\int_\delta^1 (\ln x)^3\, x^{-1-\ln x}\, dx = \int_{\ln\delta}^0 t^3\, \left(e^t\right)^{-t}\, dt = \int_{\ln\delta}^0 t^3\, e^{-t^2}\, dt.$$

L'ulteriore sostituzione $t^2 = s$ ci porta a

$$\int_\delta^1 (\ln x)^3\, x^{-1-\ln x}\, dx = \int_{\ln\delta}^0 t^3\, e^{-t^2}\, dt = \frac{1}{2}\int_{(\ln\delta)^2}^0 s\, e^{-s}\, ds,$$

ed infine, integrando per parti, si ottiene

$$\int_\delta^1 (\ln x)^3\, x^{-1-\ln x}\, dx = \frac{1}{2}\left[-s\, e^{-s} - e^{-s}\right]_{(\ln\delta)^2}^0 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(\ln\delta)^2\, e^{-(\ln\delta)^2} + \frac{1}{2}e^{-(\ln\delta)^2}.$$

In definitiva,

$$\begin{aligned}\int_\delta^1 (\ln x)^3\, x^{-1-\ln x}\, dx &= \lim_{\delta\to 0^+}\int_\delta^1 (\ln x)^3\, x^{-1-\ln x}\, dx = \\ &= \lim_{\delta\to 0^+}\left[-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left((\ln\delta)^2 + 1\right) e^{-(\ln\delta)^2}\right] = -\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Prova scritta del 19 settembre 2019

Esercizio 1 Descrivere il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\alpha}}{(1+n+n^{\frac{3}{2}})\ln(n+1)} \sin\frac{1}{n^2}$$

per ciascun valore del parametro $\alpha > 0$.

Esercizio 2 Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{|1-x|}{|1+x|}\, e^{-|x|-1}, \qquad x \in A,$$

ove A è l'insieme (massimale) di definizione di f.

(i) Descrivere l'insieme A e calcolare i limiti a $\pm\infty$ e nei punti della frontiera di A.

(ii) Determinare i punti dove f non è continua e quelli dove f non è derivabile.

(iii) Individuare gli asintoti di f.

(iv) Trovare i punti di massimo e di minimo relativo di f.

(v) Tracciare un grafico approssimativo di f, omettendo lo studio della derivata seconda.

Esercizio 3 Si determini la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 3y + \dfrac{2x}{y} \\ y(0) = -1. \end{cases}$$

Risoluzione

Esercizio 1 Sia $\alpha > 0$. Notiamo che la serie è a termini positivi, poiché risulta $\sin\frac{1}{n^2} > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}^+$. Ricordando che

$$\sin\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right) \qquad \text{per } n \to \infty,$$

ed il fatto che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+n+n^{\frac{3}{2}}}{n^{\frac{3}{2}}} = 1,$$

per il criterio del confronto asintotico la serie data ha lo stesso comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\alpha-\frac{7}{2}}}{\ln(n+1)}.$$

Quest'ultima serie è convergente se $\alpha - \frac{7}{2} < -1$, ossia se $\alpha < \frac{5}{2}$, e diverge positivamente quando invece $\alpha - \frac{7}{2} \geq -1$, vale a dire $\alpha \geq \frac{5}{2}$. Ne segue che lo stesso vale per la serie considerata.

Esercizio 2 (i) La funzione f è definita per ogni valore $x \neq -1$: dunque il suo insieme di definizione è $= \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Inoltre si ha

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{x+1}\, e^{x-1} & \text{se } x < -1 \\ \dfrac{1-x}{1+x}\, e^{x-1} & \text{se } -1 < x \leq 0 \\ \dfrac{1-x}{1+x}\, e^{-x-1} & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ \dfrac{x-1}{x+1}\, e^{-x-1} & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$$

Di conseguenza

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x-1}{x+1}\, e^{x-1} = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x-1}{x+1}\, e^{-x-1} = 0,$$

mentre

$$\lim_{x\to-1^-} f(x) = \lim_{x\to-1^-} \frac{x-1}{x+1}\, e^{x-1} = \frac{2e^{-2}}{0^+} = +\infty,$$
$$\lim_{x\to-1^+} f(x) = \lim_{x\to-1^+} \frac{1-x}{1+x}\, e^{x-1} = \frac{2e^{-2}}{0^+} = +\infty.$$

(ii) La funzione f è continua in ogni punto di A e non è possibile prolungarla per continuità nel punto $x = -1$. Inoltre essa è derivabile in $A \setminus \{0, 1\}$, e risulta, con facili calcoli,

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+1}{(x+1)^2}\, e^{x-1} & \text{se } x < -1 \\ -\dfrac{x^2+1}{(x+1)^2}\, e^{x-1} & \text{se } -1 < x < 0 \\ \dfrac{x^2-3}{(x+1)^2}\, e^{-x-1} & \text{se } 0 < x < 1 \\ \dfrac{3-x^2}{(x+1)^2}\, e^{-x-1} & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

Si osservi che i punti di ascissa $x = 0$ e $x = 1$ sono punti angolosi:

$$f'(0^-) = -e^{-1}, \qquad f'(0^+) = -3e^{-1}, \qquad f'(1^-) = -\frac{e^{-2}}{2}, \qquad f'(1^+) = \frac{e^{-2}}{2}.$$

Inoltre si vede immediatamente che f' è positiva in $]-\infty, -1[$, negativa in $]-1, 0[$ e negativa anche in $]0, 1[$, mentre nella semiretta $]1, \infty[$ la funzione f' cambia segno una volta sola: è positiva in $]1, \sqrt{3}[$ e negativa in $]\sqrt{3}, \infty[$.

(iii) Essendo, come si è visto,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0,$$

vi è l'asintoto orizzontale $y = 0$ per $x \to \pm\infty$. Infine, come abbiamo già notato,

$$\lim_{x\to-1} f(x) = +\infty,$$

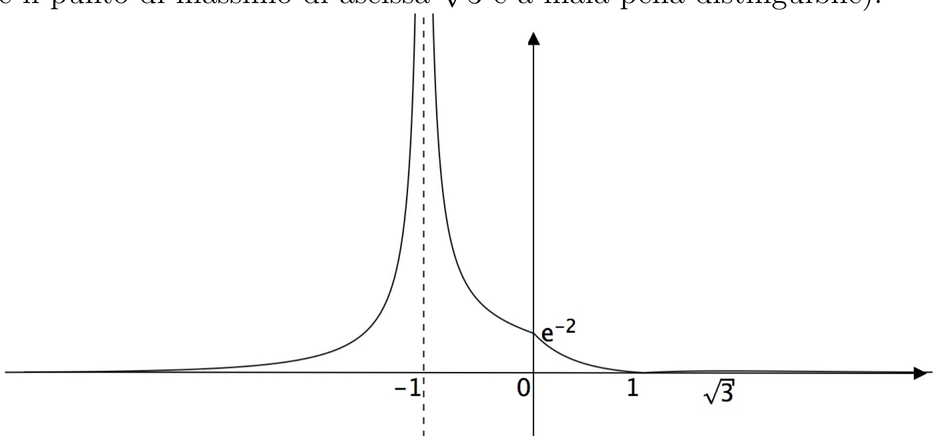
cosicché f ha l'asintoto verticale $x = -1$ per $x \to -1$.

(iv) Dallo studio della derivata prima segue che il punto $x = 1$ è di minimo relativo con $f(1) = 0$: dunque tale punto è anche di minimo assoluto, visto che $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in A$. Inoltre, sempre per quanto visto, il punto $x = \sqrt{3}$ è punto di massimo relativo, con

$$f(\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}\, e^{-\sqrt{3}-1} \simeq 0.0117.$$

Poiché f è infinitesima per $x \to \infty$, deve esistere almeno un punto di flesso nell'intervallo $]\sqrt{3}, \infty[$.

(v) Dalle informazioni ricavate si ottiene per la f il seguente grafico approssimativo (nel quale il punto di massimo di ascissa $\sqrt{3}$ è a mala pena distinguibile):



Esercizio 3 L'equazione differenziale è di tipo Bernoulli, e si risolve con la sostituzione $u(x) = y(x)^2$, che la trasforma in un'equazione lineare. Si ha infatti

$$u'(x) = 2y(x)y'(x) = 2y(x)\left(3y(x) + \frac{2x}{y(x)}\right) = 6u(x) + 4x,$$

con la condizione iniziale $u(0) = 1$.
Risolviamo questa equazione. Moltiplicando entrambi i membri per e^{-6x} si ha

$$\frac{d}{dx}\left(u(x)e^{-6x}\right) = u'(x)e^{-6x} - 6u(x)e^{-6x} = 4xe^{-6x},$$

da cui, integrando fra 0 e x,

$$u(x)e^{-6x} - 1 = 4\int_0^x te^{-6t}\,dt = 4\left[-\frac{1}{6}te^{-6t} - \frac{1}{36}e^{-6t}\right]_0^x = -\left(\frac{2}{3}x + \frac{1}{9}\right)e^{-6x} + \frac{1}{9}\,.$$

In definitiva

$$u(x) = -\frac{2}{3}x - \frac{1}{9} + \frac{10}{9}e^{6x},$$

da cui, finalmente, ricordando che $y(x) < 0$ in un intorno di $x = 0$,

$$y(x) = -\sqrt{u(x)} = -\sqrt{-\frac{2}{3}x - \frac{1}{9} + \frac{10}{9}e^{6x}}.$$

Prova scritta del 29 novembre 2019

Esercizio 1 Stabilire, al variare del parametro reale α, se la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^\alpha}{n^2+1}$$

è indeterminata, divergente, convergente o assolutamente convergente.

Esercizio 2 Si consideri la funzione

$$f(x) = x^2\sqrt{|x^2-4|}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Si tracci un grafico approssimativo di f, specificando, se esistono:

(a) i limiti agli estremi del dominio,

(b) gli asintoti,

(c) i punti di discontinuità e i punti angolosi,

(d) gli intervalli di crescenza e decrescenza,

(e) i punti di massimo o minimo relativo,

(f) i punti di massimo o minimo assoluti,

trascurando l'analisi della derivata seconda.

Esercizio 3 Calcolare, se esiste, l'integrale improprio

$$\int_1^e \frac{\ln(\ln x^4)}{x}\, dx.$$

Risoluzione

Esercizio 1 Se $\alpha \geq 2$ si vede subito che il valore assoluto del termine generale, cioè la quantità

$$a_n = \frac{n^\alpha}{n^2+1}\,,$$

non è infinitesimo per $n \to \infty$: ne segue che la serie, essendo a segni alterni, è indeterminata.

Se $1 \leq \alpha < 2$, il termine generale a_n è infinitesimo: per verificare se esso è anche decrescente osserviamo che, posto

$$g(x) = \frac{x^\alpha}{x^2+1}, \quad x > 0,$$

risulta, in virtù del teorema di Lagrange,

$$a_{n+1} - a_n = \frac{(n+1)^\alpha}{(n+1)^2+1} - \frac{n^\alpha}{n^2+1} = f(n+1) - f(n) = f'(\xi),$$

con $\xi \in]n, n+1[$ punto opportuno. Dato che

$$f'(\xi) = \frac{\alpha\,\xi^{\alpha-1}(\xi^2+1) - \xi^\alpha \cdot 2\xi}{(\xi^2+1)^2} = \frac{\xi^{\alpha-1}}{(\xi^2+1)^2}\big(\alpha - (2-\alpha)\xi^2\big),$$

si ha sicuramente

$$f'(\xi) < 0 \qquad \forall \xi > \sqrt{\frac{\alpha}{2-\alpha}},$$

e quindi esiste un indice $n^* \in \mathbb{N}$ tale che risulti $a_{n+1} - a_n < 0$ per ogni $n > n^*$. Pertanto la successione $\{a_n\}$ è definitivamente decrescente, oltre che infinitesima. Dal criterio di Leibniz segue che la serie è convergente. Invece la serie non è assolutamente convergente poiché, per il criterio del confronto asintotico, la serie Σa_n ha lo stesso comportamento della serie $\Sigma \frac{1}{n^{2-\alpha}}$, la quale diverge essendo $0 < 2 - \alpha \leq 1$.
Infine, se $\alpha < 1$ la serie è assolutamente convergente in quanto, per il criterio del confronto asintotico, essa ha lo stesso comportamento della serie $\Sigma \frac{1}{n^{2-\alpha}}$, la quale converge essendo $2 - \alpha > 1$.

Esercizio 2 La funzione f è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$ ed è pari, ossia $f(-x) = f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Quindi ci limitiamo ad analizzarla per $x \geq 0$. Anzitutto si ha

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty,$$

cosicché non ci sono asintoti. La funzione è continua in tutti i punti, è sempre non negativa ed è nulla per $x = 0$ e per $x = 2$. Nel punto $x = 2$ la f non è derivabile, per la presenza della radice. Calcoliamo la derivata: ricordando che la derivata di $|t|$ per $t \neq 0$ è $\frac{t}{|t|}$, si ha per $x \neq 2$

$$f'(x) = 2x\sqrt{|x^2-4|} + \frac{x^2}{2\sqrt{|x^2-4|}}\frac{2x(x^2-4)}{|x^2-4|} = \frac{x(x^2-4)}{|x^2-4|^{\frac{3}{2}}}(3x^2-8).$$

In particolare, $f'(0) = 0$ mentre

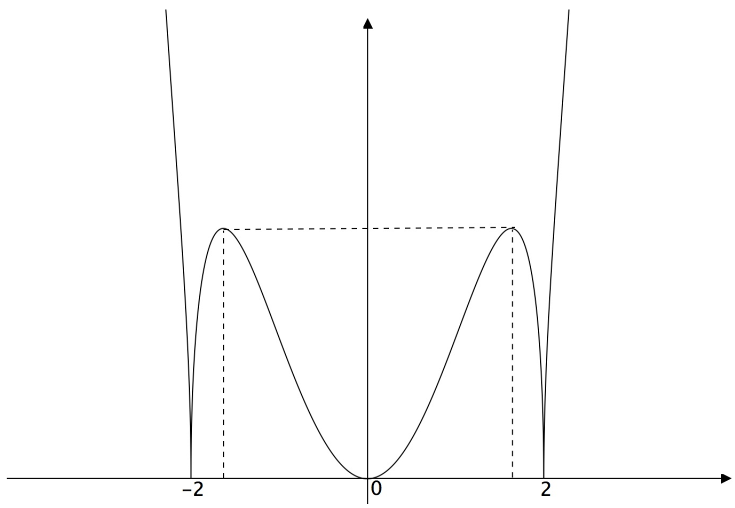
$$\lim_{x\to2^-} f'(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to2^+} f'(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty.$$

Si riconosce inoltre che $f'(x) > 0$ per $0 < x < \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ e per $x > 2$, mentre $f'(x) < 0$ per $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} < x < 2$, ossia f è crescente in $\left[0, \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right] \cup [2, +\infty[$ ed è decrescente in $\left[\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, 2\right]$.

Perciò il punto $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ è di massimo relativo, con

$$f\left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right) = \frac{16}{3\sqrt{3}}\,,$$

mentre 0 e 2 sono punti di minimo relativo e assoluto nei quali f è nulla. La f ovviamente non è limitata superiormente e quindi non ha massimo assoluto.
Infine osserviamo che vi è necessariamente un punto di flesso nell'intervallo $\left]0, \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right[$; ci deve essere inoltre un altro punto di flesso nella semiretta $]2, +\infty[$, in quanto, come si è visto, $f'(x)$ tende a $+\infty$ per $x \to +\infty$.



Esercizio 3 L'integrale è improprio perché il numeratore dell'integrando tende a $-\infty$ per $x \to 1^+$. Esso è convergente, poiché risulta (per definizione)

$$\begin{aligned}
\int_1^e \frac{\ln(\ln x^4)}{x}\,dx &= \lim_{a\to 1^+} \int_a^e \frac{\ln(4\ln x)}{x}\,dx = [\text{posto } t = \ln x \text{ e } b = \ln a] \\
&= \lim_{b\to 0^+} \int_b^1 \ln 4t\,dt = \frac{1}{4}\lim_{b\to 0^+} \int_{4b}^4 \ln s\,ds = \\
&= \frac{1}{4}\lim_{b\to 0^+} \left[\big[s\ln s\big]_{4b}^4 - \int_{4b}^4 1\,ds\right] = \frac{1}{4}\lim_{b\to 0^+} \big[s\ln s - s\big]_{4b}^4 = \\
&= \frac{1}{4}\left[(4\ln 4 - 4) - \lim_{b\to 0^+}(4b\ln 4b - 4b)\right] = \ln 4 - 1.
\end{aligned}$$

Prova scritta del 14 gennaio 2020

Esercizio 1 Determinare tutti i numeri complessi z tali che

$$\frac{z-2i}{z+i} = iz.$$

Esercizio 2 Si consideri la funzione di variabile reale x, definita da

$$f(x) = \ln x^2 - \ln|x-1|.$$

Si tracci un grafico approssimativo di f, specificando:

(a) il dominio di definizione ed i limiti agli estremi del dominio,

(b) gli asintoti,

(c) i punti di discontinuità e i punti angolosi,

(d) gli intervalli di crescenza e decrescenza,

(e) i punti di massimo o minimo relativo,

(f) i punti di massimo o minimo assoluti,

(g) i punti di flesso e gli intervalli di concavità e convessità.

Esercizio 3 Trovare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = xy \ln y \\ y(0) = e^2. \end{cases}$$

Risoluzione

Esercizio 1 Sicuramente ogni soluzione z è diversa da $-i$. Moltiplicando l'equazione per $z + i$ si trova

$$z - 2i = iz(z + i) = iz^2 - z,$$

ovvero

$$iz^2 - 2z + 2i = 0.$$

Scrivendo $z = x + iy$ si ha

$$i(x^2 + 2ixy - y^2) - 2(x + iy) + 2i = ix^2 - 2xy - iy^2 - 2x - 2iy + 2i = 0.$$

Separando la parte reale e la parte immaginaria si ottiene

$$\begin{cases} -2xy - 2x = 0 \\ x^2 - y^2 - 2y + 2 = 0. \end{cases}$$

Se $x = 0$, la prima equazione è soddisfatta e la seconda diventa

$$y^2 + 2y - 2 = 0;$$

le soluzioni di questa sono

$$y_1 = -1 + \sqrt{3}, \qquad y_2 = -1 - \sqrt{3},$$

e si ricavano così le soluzioni

$$z_1 = (-1 + \sqrt{3})i, \qquad z_2 = (-1 - \sqrt{3})i.$$

Se invece $x \neq 0$, la prima equazione dà $y = -1$ e la seconda diventa

$$x^2 - 1 + 4 = x^2 + 3 = 0,$$

e non ha soluzioni x. Pertanto le soluzioni dell'equazione data sono soltanto le z_1 e z_2 già trovate.

Esercizio 2 (a) La funzione f è definita per $x \neq 0$ e $x \neq 1$, ossia per ogni $x \in D = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. Risulta

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty,$$

mentre

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty,$$
$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty.$$

(b) Essendo

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = 0,$$

e similmente

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0,$$

non ci sono asintoti né orizzontali né obliqui per $x \to \pm\infty$. Invece le rette di equazioni $x = 0$ e $x = 1$ sono asintoti verticali di f rispettivamente per $x \to 0$ e per $x \to 1$.

(c) La funzione f è di classe C^∞ nel suo dominio, e dunque non ci sono né punti di discontinuità, né punti angolosi.

(d) Calcoliamo la derivata prima di f: si ha

$$f'(x) = \frac{2}{x} - \frac{1}{x-1} \qquad \forall x \in D.$$

Risulta dunque

$$f'(x) > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{x-2}{x(x-1)} > 0,$$

ossia

$$f'(x) > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x > 2 & \text{se } x > 1 \\ \text{sempre} & \text{se } 0 < x < 1 \\ \text{mai} & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Si conclude che sono intervalli di crescenza $]0, 1[$ e $[2, +\infty[$, mentre sono intervalli di decrescenza $]-\infty, 0[$ e $]1, 2]$.

(e) Vi è un unico punto di minimo relativo, il punto di ascissa $x = 2$, nel quale $f(2) = 2 \ln 2$, mentre non esiste alcun punto di minimo relativo.

(f) La f non ha né massimo né minimo assoluto. In particolare

$$\sup_D f = +\infty, \qquad \inf_D f - \infty.$$

(g) Calcoliamo la derivata seconda di f. Si ha

$$f''(x) = -\frac{2}{x^2} + \frac{1}{(x-1)^2} \qquad \forall x \in D,$$

e dunque

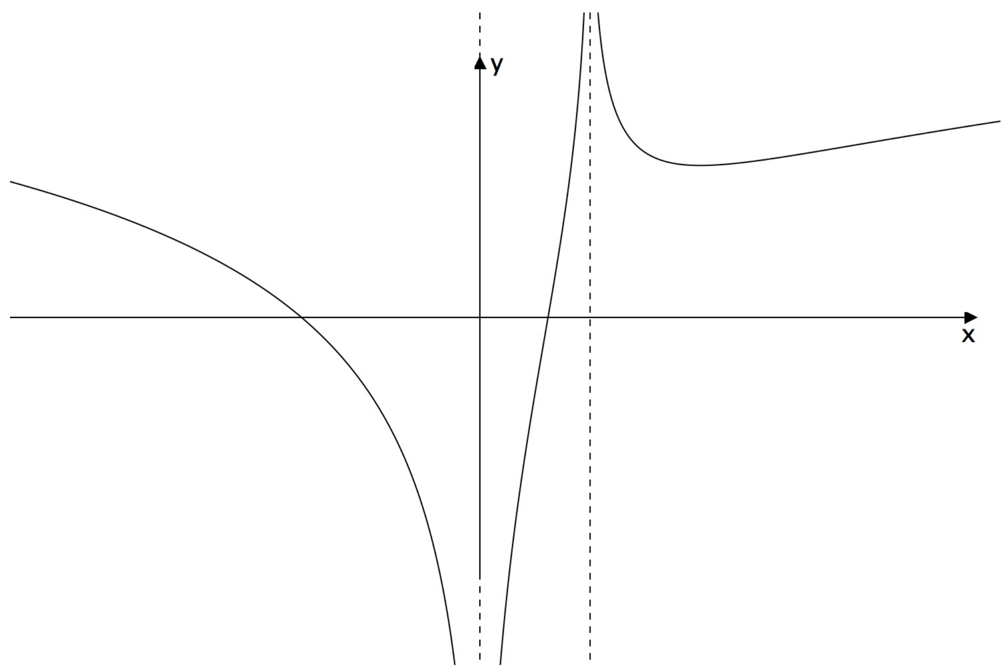
$$f''(x) > 0 \quad \iff \quad x^2 > 2(x-1)^2 \quad \iff \quad x^2 - 4x + 2 < 0.$$

Quindi $f''(x) > 0$ se e solo se $x \in D$ e $2 - \sqrt{2} < x < 2 + \sqrt{2}$. Pertanto vi sono due punti di flesso per f:

$$x = 2 - \sqrt{2}, \quad \text{con } f(2-\sqrt{2}) = \ln\left(\frac{6 - 4\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1}\right),$$

$$x = 2 + \sqrt{2}, \quad \text{con } f(2+\sqrt{2}) = \ln\left(\frac{6 + 4\sqrt{2}}{\sqrt{2} + 1}\right).$$

La funzione f è convessa in $[2-\sqrt{2}, 1[$ ed in $]1, 2+\sqrt{2}]$, mentre è concava in $]-\infty, 0[$, in $]0, 2-\sqrt{2}]$ ed in $[2+\sqrt{2}, +\infty[$.
Le informazioni raccolte permettono di disegnare un grafico approssimativo di f:



Esercizio 3 L'equazione differenziale è a variabili separabili. Vi sono le soluzioni costanti $y = 0$ (se si prolunga $y \ln y$ col valore 0 per $y = 0$) e $y = 1$, entrambe ininfluenti ai fini del problema di Cauchy. Dunque si ha

$$\frac{dy}{y \ln y} = x\, dx,$$

$$\ln|\ln y| = \frac{x^2}{2} + c, \qquad \text{ove } c \in \mathbb{R},$$

$$|\ln y| = e^{\frac{x^2}{2}+c}, \qquad \text{ove } e^c > 0,$$
$$\ln y = K\, e^{\frac{x^2}{2}}, \qquad \text{ove } K \in \mathbb{R},$$
$$y = \exp\left(K\, e^{\frac{x^2}{2}}\right), \qquad \text{ove } K \in \mathbb{R}.$$

Ne segue
$$e^2 = y(0) = \exp K,$$
da cui $K = 2$. Si conclude che la soluzione del problema di Cauchy è
$$y(x) = \exp\left(2\, e^{\frac{x^2}{2}}\right), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Prova scritta del 3 febbraio 2020

Esercizio 1 Satbilire il comportamento della serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{n}{1+n^2}\right) x^n,$$
al variarte del parametro $x \in \mathbb{R}$.

Esercizio 2 Si consideri la funzione di variabile reale x, definita da
$$f(x) = \ln(e^x - x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

(i) Si verifichi che f è di classe $C^\infty(\mathbb{R})$ e se ne tracci un grafico approssimativo, specificando:

- **(a)** i limiti agli estremi del dominio,
- **(b)** gli asintoti, se esistono,
- **(c)** gli intervalli di crescenza e decrescenza,
- **(d)** i punti di massimo o minimo relativo, se esistono,
- **(e)** i punti di massimo o minimo assoluti, se esistono.

(ii) Si dimostri che f deve avere almeno un punto di flesso negativo ed almeno un punto di flesso positivo.

Esercizio 3 Trovare la soluzione del problema di Cauchy
$$\begin{cases} y' = e^{-y}(1+x^2) \\ y(0) = -1. \end{cases}$$

Risoluzione

Esercizio 1 Possiamo meglio scrivere la serie come

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(1+n^2)}\, x^n.$$

Essendo

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n(1+n^2)}} = 1,$$

dalla teoria delle serie di potenze segue subito che la serie converge (assolutamente) per $|x| < 1$ e non converge per $|x| > 1$: per la precisione, essa diverge per $x > 1$ ed è indeterminata per $x < -1$. Inoltre, per $x = 1$ la serie è a termini positivi e converge, perché asintoticamente equivalente alla serie armonica generalizzata $\Sigma 1/n^3$; di conseguenza essa converge (assolutamente) anche per $x = -1$.

Esercizio 2 (a) La f è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$ in quanto $e^x > x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, ed è di classe C^∞ perché composizione di funzioni logaritmiche, esponenziali e polinomiali. Risulta

$$\lim_{x\to-\infty} \ln(e^x - x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} \ln(e^x - x) = +\infty.$$

(b) Per $x \to -\infty$ si ha

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\ln(e^x - x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \left[-\frac{\ln(|x| - e^{-|x|})}{|x|}\right] = \lim_{t\to+\infty} \left[-\frac{\ln(t - e^{-t})}{t}\right] = 0,$$

e dunque non ci sono asintoti per $x \to -\infty$. Per $x \to +\infty$ si ha invece

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(e^x - x)}{x} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln e^x + \ln(1 - x\,e^{-x})}{x} = \\ &= \lim_{x\to+\infty} \left[1 + \frac{\ln(1 - x\,e^{-x})}{x}\right] = 1 + 0 = 1,\end{aligned}$$

mentre

$$\lim_{x\to+\infty} [\ln(e^x - x) - x] = \lim_{x\to+\infty} \left[x - \ln(1 - x\,e^{-x}) - x\right] = 0,$$

cosicché per $x \to +\infty$ vi è l'asintoto obliquo di equazione $y = x$.

(c) Essendo

$$f'(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x} \qquad \forall x \in \mathbb{R},$$

risulta

$$f'(x) > 0 \quad \iff \quad \frac{e^x - 1}{e^x - x} > 0 \quad \iff \quad e^x > 1 \quad \iff \quad x > 0.$$

Dunque f è crescente in $]-\infty, 0]$ ed è decrescente in $[0, +\infty[$.

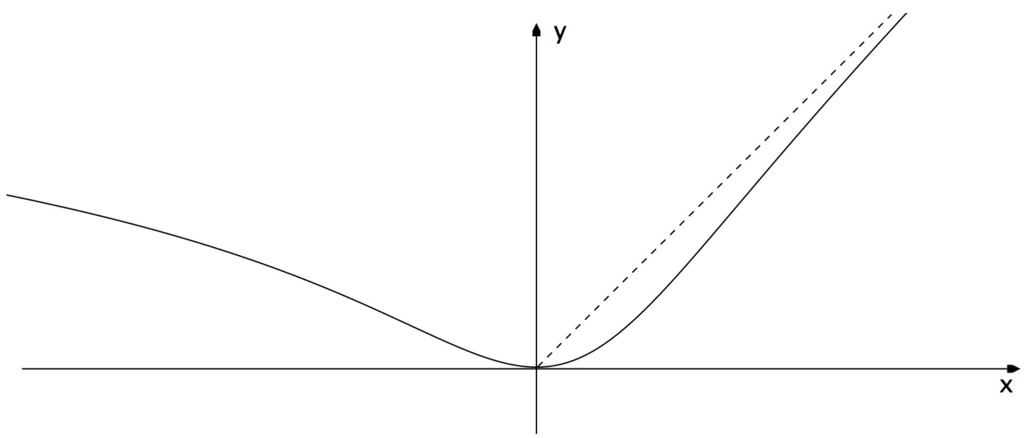
(d)-(e) Il punto $x = 0$ è punto di minimo relativo ed assoluto per f, con $f(0) = 0$; non vi sono punti di massimo assoluto né di massimo relativo.
Osserviamo che

$$f''(x) = \frac{e^x(e^x - x) - (e^x - 1)^2}{(e^x - x)^2} = \frac{(2 - x)e^x - 1}{(e^x - x)^2} \qquad \forall x \in \mathbb{R};$$

dunque, essendo $f''(1) = \frac{1}{e-1} > 0$ e $f''(x) < 0$ per $x \geq 2$, vi è certamente un punto di flesso con ascissa $x \in]1, 2[$. Similmente, essendo $f''(0) = 1$ e

$$f''(-1) = \frac{3e^{-3} - 1}{(1 + e^{-1})^2} < 0,$$

vi è certamente un punto di flesso con ascissa $x \in] - 1, 0[$.
Le informazioni raccolte permettono di disegnare un grafico approssimativo di f:



Esercizio 3 L'equazione differenziale è a variabili separabili. Non ci sono soluzioni costanti. Si ha allora

$$dy = e^{-y}(1 + x^2)dx,$$
$$e^y\, dy = (1 + x^2)dx$$
$$e^y = x + \frac{x^3}{3} + c,$$
$$y = \ln\left(x + \frac{x^3}{3} + c\right)$$

e risulta

$$-1 = y(0) = \ln c,$$

da cui $c = e^{-1}$. Si conclude che la soluzione del problema di Cauchy è

$$y(x) = \ln\left(x + \frac{x^3}{3} + e^{-1}\right).$$

Prova scritta del 24 febbraio 2020

Esercizio 1 Determinare il comportamento delle seguenti serie:

$$\textbf{(a)}\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln(n+1)-\ln n}{\sqrt{n}-n}, \qquad \textbf{(b)}\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!-n^2}{n!+n^2}.$$

Esercizio 2 Calcolare, se esistono, i seguenti limiti:

$$\textbf{(a)}\ \lim_{x\to 0} \frac{x^2\sin^2 x + 1 - \sqrt[4]{1-x^4}}{\cos^2 x - \sqrt{1-2x^2}}, \qquad \textbf{(b)}\ \lim_{x\to+\infty} \frac{\int_x^{+\infty} e^{-4t^2+t}\,dt}{\int_{2x}^{+\infty} e^{-t^2+t}\,dt}.$$

Esercizio 3 Calcolare, se esistono, i seguenti integrali:

$$\textbf{(a)}\ \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx, \qquad \textbf{(b)}\ \int_{-1}^1 x\ \arccos x\,dx.$$

Risoluzione

Esercizio 1 (a) Il termine generale della serie si può riscrivere come

$$\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n\left(-1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)};$$

ricordando che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = 1,$$

si deduce che esso si comporta come $-\frac{1}{n^2}$ per $n \to \infty$. Pertanto, cambiando la serie di segno e applicando il criterio del confronto asintotico, ricaviamo che essa converge.

(b) Il termine generale della serie si può riscrivere come

$$\frac{n|\left(1-\frac{n^2}{n!}\right)}{n!\left(1+\frac{n^2}{n!}\right)} = \frac{1-\frac{n^2}{n!}}{1+\frac{n^2}{n!}},$$

e dunque esso converge a 1 per $n \to \infty$. Pertanto la serie non può convergere, ed essendo a termini positivi essa diverge a $+\infty$.

Esercizio 2 (a) Si tratta di una forma indeterminata del tipo $0/0$. Utilizziamo la formula di Taylor. Si ha per $x \to 0$:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \mathrm{o}(x^4),$$

da cui

$$x^2\sin^2 x = x^2\left(x^2 - \frac{x^4}{3} + \mathrm{o}(x^5)\right) = x^4 - \frac{x^6}{3} + \mathrm{o}(x^7).$$

Inoltre, sempre per $x \to 0$,

$$\sqrt[4]{1-x^4} = 1 - \frac{x^4}{4} - \frac{3x^8}{32} + \mathrm{o}(x^{11}),$$

cosicché il numeratore della frazione verifica per $x \to 0$

$$x^2 \sin^2 x + 1 - \sqrt[4]{1-x^4} = \frac{5x^4}{4} + \mathrm{o}(x^5).$$

Poi, per $x \to 0$,

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \mathrm{o}(x^5),$$

da cui

$$\cos^2 x = 1 - x^2 + \frac{x^4}{3} + \mathrm{o}(x^5),$$

mentre, sempre per $x \to 0$,

$$\sqrt{1-2x^2} = 1 - x^2 - \frac{x^4}{2} + \mathrm{o}(x^5).$$

Quindi il denominatore della frazione verifica per $x \to 0$

$$\cos^2 x - \sqrt{1-2x^2} = \frac{5x^4}{6} + \mathrm{o}(x^5).$$

Si conclude allora che

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin^2 x + 1 - \sqrt[4]{1-x^4}}{\cos^2 x - \sqrt{1-2x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{5x^4}{4} + \mathrm{o}(x^5)}{\frac{5x^4}{6} + \mathrm{o}(x^5)} = \frac{3}{2}.$$

(b) Poichè entrambi gli integrali impropri presenti sono convergenti, si tratta di una forma indeterminata del tipo $0/0$. Conviene utilizzare il teorema di de L'Hôpital, che farà sparire gli integrali. Poiché

$$\frac{d}{dx}\int_x^{+\infty} e^{-4t^2+t}\,dt = -e^{-4x^2+x}, \qquad \frac{d}{dx}\int_{2x}^{+\infty} e^{-t^2+t}\,dt = -2\,e^{-4x^2+2x},$$

risulta

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{d}{dx}\int_x^{+\infty} e^{-4t^2+t}\,dt}{\frac{d}{dx}\int_{2x}^{+\infty} e^{-t^2+t}\,dt} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2}\frac{e^{-4x^2+x}}{e^{-4x^2+2x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2}e^{-x} = 0,$$

dal teorema di de L'Hôpital si conclude che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\int_x^{+\infty} e^{-4t^2+t}\,dt}{\int_{2x}^{+\infty} e^{-t^2+t}\,dt} = 0.$$

Esercizio 3 (a) L'integrale esiste perché l'integrando è continuo su $[0,1]$. Con la sostituzione $t = \sqrt{x}$ si trova $x = t^2$, $dx = 2t\,dt$ e dunque

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx &= 2\int_0^1 \frac{t^2}{1+t}\,dt = 2\int_0^1 \frac{t^2+t-t-1+1}{1+t}\,dt = \\ &= 2\int_0^1 \left(t - 1 + \frac{1}{1+t}\right)\,dt = 2\ln 2 - 1.\end{aligned}$$

(b) L'integrale esiste perché l'integrando è continuo su $[0,1]$. In questo caso conviene integrare per parti: essendo

$$\frac{d}{dx}\arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \forall x \in\,]-1,1[\,,$$

si trova

$$\int_{-1}^{1} x\ \arccos x\, dx = \left[\frac{x^2}{2}\ \arccos x\right]_{-1}^{1} + \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\, dx.$$

L'ultimo integrale è improprio, ma esso è convergente proprio in virtù dell'uguaglianza scritta. Si ha allora

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} x\ \arccos x\, dx &= \left[-\frac{x^2}{2}\ \arccos x\right]_{-1}^{1} + \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{x^2-1+1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \\ &= -\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\, dx + \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx.\end{aligned}$$

Il primo dei due integrali rimasti è l'area del semidisco di raggio 1, moltiplicata per $-\frac{1}{2}$, e quindi vale $-\frac{\pi}{4}$; il secondo integrale coincide con $\frac{1}{2}[\arcsin x]_{-1}^{1}$ e quindi vale $\frac{\pi}{2}$. In definitiva

$$\int_{-1}^{1} x\ \arccos x\, dx = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{4}.$$