



UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

**Controllo ottimale di epidemie di tipo SIR
mediante vaccinazione. Il caso dell'Ebola
in Africa occidentale (2014)**

16 Ottobre 2015

Tesi di Laurea Triennale

Relatore
Prof. Paolo Acquistapace

Candidata
Elena Scandurra

Anno Accademico 2014/2015

Indice

Introduzione	1
1 Il modello SIR epidemico	3
1.1 Costruzione del modello	4
1.2 Il numero riproduttivo di base	6
1.3 La vaccinazione	8
2 Esistenza di un controllo ottimale	11
2.1 Condizioni sufficienti	11
2.2 Condizioni necessarie	13
2.3 Continuità come condizione necessaria	21
2.4 Unicità del controllo ottimale	22
3 Risultati numerici	29
3.1 Simulazione con controllo costante	29
3.2 Simulazione del problema di controllo ottimale	32
3.3 Conclusioni	33
Bibliografia	35

Introduzione

Il virus Ebola ha provocato in pochi mesi migliaia di morti in Guinea, Sierra Leone e Liberia nel 2014. L'alta mortalità e la facile trasmissibilità del virus, che avviene tramite diretto contatto con sangue, secrezioni corporee (saliva, sudore, ecc.) e tessuti di soggetti infetti, sia ammalati che già morti, rendono questo virus un grosso problema per la salute pubblica. Una settimana dopo l'insorgere dei primi sintomi (febbre, malesseri, dolori addominali, mal di testa e astenia), compaiono eruzioni cutanee seguite da febbri emorragiche ed altre complicazioni, che portano alla morte mediamente dopo 10 giorni, in una percentuale dal 50% al 90% degli infetti.

La rapida diffusione di questo virus è uno dei fenomeni epidemiologici la cui evoluzione può essere studiata per mezzo di modelli matematici. L'utilizzo di tali modelli in campo biologico risale al XVIII secolo, con uno studio svolto da Daniel Bernoulli per sostenere la vaccinazione contro il vaiolo. Nel corso del tempo questo ramo della biomatematica, ossia della matematica applicata ai fenomeni biologici, si è sviluppato con diversi approcci, ma solo dall'inizio del XX secolo si è iniziato a far uso di modelli di tipo differenziale. Il primo fu formulato da Kermack e McKendrick [2] negli anni '20 e si applica a casi in cui la malattia presa in esame, dopo la guarigione, lascia l'ospite immune da un nuovo contagio, come succede con il virus Ebola. Si tratta del cosiddetto modello SIR, in cui la popolazione viene suddivisa in tre classi: Suscettibili, Infetti, Rimossi. I suscettibili sono gli individui sani ma soggetti a pericolo di contagio; gli infetti sono gli ammalati, e i rimossi sono gli individui non più infetti, e dunque immuni, o perché guariti, o perché morti.

Numerose varianti al modello originario di Kermack e McKendrick sono state proposte nel corso degli anni. Sono apparsi modelli simili, ma con equazioni differenziali più complicate per la presenza di ritardo o di ulteriori parametri, modelli puramente statistici, e modelli stocastici (si veda ad esempio [10], [12], [13]). In anni più recenti si è studiato anche l'effetto sulla malattia dovuto a una campagna di vaccinazione, effetto descritto sotto forma di problema di controllo (per esempio [11], [6]).

In questa tesi prendiamo spunto da un modello semplice proposto da Rachah e Torres in un recente articolo [1], nel quale si confronta con metodi numerici l'evoluzione della malattia sulla popolazione in assenza di vaccinazione e in presenza di essa. La vaccinazione è rappresentata da una variabile di controllo che è soggetta ad un funzionale costo, il quale dipende in modo integrale dalla percentuale degli infetti e dal tasso di vaccinazione, in modo da tener conto dei costi sociali che comporta sia un eccessivo numero di morti per malattia, sia un'eccessiva spesa per la campagna di vaccinazione.

Incentreremo lo studio sulla formulazione matematica del problema con e senza controllo, e sull'analisi completa del problema del controllo ottimale. È necessario osservare che l'articolo [2] è alquanto carente dal punto di vista matematico, perché manca non solo una dimostrazione dell'esistenza e dell'unicità del minimo del funzionale, ma perfino una discussione della necessità di porsi questo problema. Si è dunque reso necessario uno studio accurato dell'esistenza del controllo ottimale, garantita da un classico risultato di Filippov e Cesari, e della sua unicità, che è in ultima analisi conseguenza della condizione necessaria per l'esistenza del minimo fornita dal classico teorema di Pontrjagin, nonché di un'applicazione del teorema delle contrazioni.

A conclusione della tesi riportiamo, per completezza, i risultati numerici esposti in [2]. Anche in questo caso occorre però rilevare che questi risultati appaiono poco significativi. La soluzione del problema infatti dipende dal valore di un parametro che compare nel funzionale costo e che Rachah e Torres hanno stimato per poter effettuare la simulazione numerica, ma nell'articolo non è stato fatto alcun riferimento né al suo valore né al criterio adottato per la sua stima.

Capitolo 1

Il modello SIR epidemico

Il principale contributo alla diffusione di modelli biologici di tipo differenziale si deve a W. O. Kermack e A. G. McKendrick, che tra il 1927 e il 1933 pubblicarono uno studio matematico in tre parti, intitolato *A Contribution to the Mathematical Theory of Epidemics*; essi si proponevano di indagare sulle dinamiche di diffusione di alcuni tipi di malattie infettive fra la popolazione. Essi miravano a spiegare l'andamento apparentemente anomalo di epidemie, come quella di peste nell'isola di Bombay (1905-1906), in cui si era osservato che il numero di persone infette subiva una rapida crescita seguita da una decresita inaspettata. Una delle domande alla quale cercarono di dare una risposta era: Nel caso in cui un'epidemia si estingua, l'estinzione stessa è da imputarsi necessariamente all'esaurimento degli ospiti infettabili oppure è possibile che una pandemia termini lasciando salvo un gruppo consistente di individui non immuni e mai contagiati?

A tale scopo nella prima parte del loro studio [2] Kermack e McKendrick proposero un sistema differenziale non lineare del prim'ordine, che è divenuto noto come *modello epidemico di tipo SIR* e si applica allo studio di malattie infettive che, nel caso in cui il malato riesca a sopravvivere e guarire, conferiscono all'ospite l'immunità da un nuovo contagio, come succede con la febbre emorragica da Ebola. Per questo motivo abbiamo scelto questo modello per studiare le epidemie che nel 2014 hanno interessato Liberia, Guinea e Sierra Leone.

L'idea di base è quella di dividere la popolazione in tre compartimenti: i *Suscettibili*, gli *Infetti* e i *Rimossi*, da cui deriva l'acronimo SIR. Con *suscettibili* indichiamo gli individui che, sebbene non immuni dal virus, non hanno mai contratto la malattia. Vivono una condizione precaria, in quanto esposti al rischio di contagio, tanto più alto quanto più alti sono l'aggressività del morbo e il numero di persone con cui vengono in contatto. Se il contagio avviene, l'individuo interessato cessa di essere suscettibile ed entra a far parte del compartimento degli *infetti*. Con questo termine indichiamo coloro che hanno contratto il virus e sono in grado di trasmetterlo ad altri. Si tratta di una condizione temporanea, in quanto il decorso della malattia è destinato a terminare con la guarigione o con il decesso. In entrambi i casi l'ospite lascia il compartimento degli infetti ed entra in quello dei *rimossi*, costituito da tutti gli individui immuni dal contagio, anche nei casi in cui questo ne abbia causato la morte. Partiremo dalla supposizione che i passaggi da

un compartimento all'altro siano istantanei e che non vi sia alcun periodo di incubazione.

L'aggettivo *epidemico* distingue il modello che stiamo studiando da un altro tipo di modello SIR, detto *endemico*, che presenta una struttura diversa. Un'epidemia infatti è un fenomeno caratterizzato da un'evoluzione rapida e localizzata nel tempo, ma che coinvolge un numero di persone superiore a quanto atteso per quella comunità. Un'endemia invece si verifica quando una malattia permane a lungo nella popolazione e tende a ripresentarsi con una certa periodicità. Nel nostro caso, la diffusione di Ebola registrata nei paesi dell'Africa occidentale presenta un carattere epidemico, quindi sceglieremo un periodo di studio limitato, l'intervallo $[0, T]$ con $T \in \mathbb{R}^+$, durante il quale assumeremo che sia trascurabile il numero di nascite e di decessi, a meno che questi ultimi non siano causati direttamente dalla malattia (e quindi conteggiati nel compartimento dei rimossi). In altre parole, detto N il numero totale di individui all'istante $t = 0$, considereremo N costante in tutto l'intervallo $[0, T]$.

Nella formulazione del modello assumeremo infine che N sia molto grande e che la popolazione si possa considerare omogenea, cioè che tutti i suscettibili abbiano la stessa probabilità di incontrare persone infette e contrarre la malattia, e che tutti gli infetti, fissato un giorno qualsiasi, abbiano la stessa probabilità di passare in quel giorno al compartimento dei rimossi.

1.1 Costruzione del modello

Denotiamo rispettivamente con S_n , I_n e R_n le percentuali di individui suscettibili, infetti e rimossi relative al giorno n -esimo. Indichiamo con ν_n la percentuale di persone che un individuo incontra in media il giorno n -esimo. Dato che abbiamo richiesto che il numero totale N resti invariato durante tutto il periodo di studio, possiamo supporre che ogni individuo fissato incontri la stessa quantità di persone al giorno, quindi consideriamo $\nu_n \equiv \nu$ costante. Assumendo che la popolazione sia omogenea abbiamo quindi che ogni individuo incontra $\nu I_n N$ infetti al giorno. Sia P la probabilità che un individuo suscettibile, venendo a contatto con un infetto, contragga la malattia. Se consideriamo le infezioni come eventi indipendenti, in media nel giorno n -esimo un individuo suscettibile ha probabilità $P\nu I_n$ di contrarre la malattia e possiamo assumere che il numero di contagi giornalieri sia $P\nu I_n S_n N$. A partire da S_n e I_n possiamo stimare il numero di suscettibili relativi al giorno $(n+1)$ -esimo come differenza tra il numero di suscettibili e quello di contagi relativi al giorno n -esimo:

$$S_{n+1}N = S_n N - P\nu I_n S_n N.$$

Dividendo per N e ponendo $\beta \equiv P\nu$ otteniamo

$$S_{n+1} = S_n - \beta I_n S_n.$$

Ci chiediamo adesso come vari il numero di infetti. Supponiamo che ogni giorno in media una percentuale μ di infetti passi alla classe dei rimossi. Questo significa che, mediamente, nel giorno n -esimo $\mu I_n N$ individui vengono rimossi dallo studio. Ricordando che i contagi giornalieri sono $\beta I_n S_n N$, otteniamo:

$$I_{n+1}N = I_n N + \beta S_n I_n N - \mu I_n N,$$

$$R_{n+1}N = R_nN + \mu I_nN.$$

Dividendo per N e richiamando la formula per S_{n+1} abbiamo:

$$\begin{cases} S_{n+1} - S_n = -\beta S_n I_n \\ I_{n+1} - I_n = \beta S_n I_n - \mu I_n \\ R_{n+1} - R_n = \mu I_n \end{cases}$$

Osservazione. Fissato un giorno, dato che la popolazione è omogenea e N è molto grande, dire che μ è la percentuale di infetti che vengono rimossi equivale a dire che ogni infetto ha probabilità μ di essere rimosso dallo studio in quel giorno. Consideriamo un individuo che è appena stato contagiato e indichiamo con X la variabile aleatoria che assume valore n se la permanenza nel compartimento degli infetti dura n giorni. Se denotiamo con τ la durata media della malattia, avremo che $\tau = \mathbb{E}[X]$. La probabilità che la rimozione avvenga dopo n giorni è:

$$\mathbf{P}\{X = n\} = (1 - \mu)^{n-1}\mu,$$

quindi X è una variabile geometrica e il suo valore atteso è $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\mu}$, da cui $\mu = \tau^{-1}$. Quindi il modello che abbiamo formulato può essere ottenuto anche conoscendo la durata media della malattia invece della percentuale giornaliera di rimozione dalla classe degli infetti.

Consideriamo adesso due generici istanti di tempo t e $t + \Delta t$, con $\Delta t > 0$. Indichiamo con S_t, I_t, R_t e $S_{t+\Delta t}, I_{t+\Delta t}, R_{t+\Delta t}$ rispettivamente le percentuali di individui suscettibili, infetti e rimossi ai due tempi. Procedendo in modo analogo a quanto visto sopra otteniamo il sistema

$$\begin{cases} S_{t+\Delta t} - S_t = -\nu \Delta t S_t I_t \\ I_{t+\Delta t} - I_t = \nu \Delta t S_t I_t - \mu \Delta t I_t \\ R_{t+\Delta t} - R_t = \mu \Delta t I_t \end{cases}$$

in cui $\nu \Delta t$ è la percentuale media di persone che ogni individuo fissato incontra nell'intervallo di tempo Δt (osserviamo che nel caso precedente $\Delta t = 1$ giorno) e $\mu \Delta t$ la percentuale media di infetti che vengono rimossi dallo studio nell'intervallo Δt .

Dividendo per Δt si ha:

$$\begin{cases} \frac{S_{t+\Delta t} - S_t}{\Delta t} = -\beta S_t I_t \\ \frac{I_{t+\Delta t} - I_t}{\Delta t} = \beta S_t I_t - \mu I_t \\ \frac{R_{t+\Delta t} - R_t}{\Delta t} = \mu I_t \end{cases}$$

Passando al limite per $\Delta t \rightarrow 0$ si ottiene il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} \dot{S}(t) = -\beta S(t)I(t) \\ \dot{I}(t) = \beta S(t)I(t) - \mu I(t) \\ \dot{R}(t) = \mu I(t) \end{cases} \quad (1.1)$$

dove le condizioni iniziali sono date da $S(0) = S_0 \geq 0$, $I(0) = I_0 \geq 0$, $R(0) = R_0 \geq 0$, $S_0 + I_0 + R_0 = 1$.

Osserviamo che le funzioni $S(t)$, $I(t)$, $R(t)$ che abbiamo ottenuto passando al limite sono in $C^1([0, T])$. Consideriamo allora la funzione $S(t) + I(t) + R(t)$ e deriviamo rispetto a t :

$$\frac{d}{dt}(S(t) + I(t) + R(t)) = \dot{S}(t) + \dot{I}(t) + \dot{R}(t) = 0,$$

quindi $S(t) + I(t) + R(t)$ è costante e in particolare $S(t) + I(t) + R(t) \equiv S_0 + I_0 + R_0 = 1$. Vediamo alcuni casi particolari:

- Se $S_0 = 0$, allora $S(t) \equiv 0$ e $I(t) = I_0 e^{-\mu t} \geq 0$ per ogni t . In questo caso non ci sono suscettibili, quindi gli eventuali infetti non possono contagiare nessuno e decrescono in numero via via che entrano nella classe dei rimossi;
- Se $I_0 = 0$, allora $I(t) \equiv 0$ e $S(t) \equiv S_0$. Si tratta del caso in cui nessuno è infetto, quindi nessun suscettibile può essere contagiato;
- Se $S_0 \geq 0$, per confronto con la soluzione nulla si ha $S(t) \geq 0$ per ogni t ;
- Se $I_0 \geq 0$, analogamente si ha $I(t) \geq 0$ per ogni t .

Abbiamo trovato che per ogni $t \in [0, T]$ si ha $S(t) \geq 0$, $I(t) \geq 0$; ne segue che anche $R(t) \geq 0$ dato che $R_0 \geq 0$. Allora la condizione $S(t) + I(t) + R(t) \equiv 1$ ci dice in particolare che S, I, R sono a valori in $[0, 1]$, infatti $0 \leq S, I, R \leq S + I + R \equiv 1$.

Osserviamo adesso che il sistema (1.1) è un problema di Cauchy. I secondi membri delle equazioni sono funzioni continue nel compatto $[0, T]$ quindi uniformemente continue; inoltre, ponendo

$$F(S, I, R) = (-\beta SI, \beta SI - \mu I, \mu I)$$

vediamo che F è lipschitziana. Per farlo usiamo la disuguaglianza triangolare e la limitatezza di S, I, R : si vede facilmente che

$$\begin{aligned} & |F(S, I, R) - F(S', I', R')| \leq \\ & \leq |F(S, I, R) - F(S', I, R)| + |F(S', I, R) - F(S', I', R)| + |F(S', I', R) - F(S', I', R')| \leq \\ & \leq C_1|S - S'| + C_2|I - I'| \leq C[|S - S'| + |I - I'| + |R - R'|] = C'|(S, I, R) - (S', I', R')| \end{aligned}$$

dove C_1, C_2, C, C' sono opportune costanti positive. Pertanto il problema ammette soluzione unica in un intorno destro $[0, \epsilon]$ di $t = 0$. La limitatezza di S, I e R garantisce inoltre l'esistenza di un prolungamento a tutto l'intervallo $[0, T]$; concludiamo quindi che la soluzione esiste unica in $[0, T]$.

1.2 Il numero riproduttivo di base

Facciamo alcune osservazioni sulla soluzione $(S(t), I(t), R(t))$ del sistema (1.1) con condizioni iniziali $(S(0), I(0), R(0)) = (S_0, I_0, R_0)$.

Consideriamo la prima equazione:

$$\dot{S}(t) = -\beta S(t)I(t).$$

Dato che $\beta > 0$ e $S, I \geq 0$, la derivata \dot{S} è negativa e quindi la funzione S è decrescente. Infatti, poiché abbiamo assunto che non ci siano nascite nel periodo preso in considerazione, il numero di suscettibili non può che diminuire a causa dei nuovi contagi.

Consideriamo la seconda equazione: tenendo conto che $I \geq 0$ e ricordando che $\mu > 0$ otteniamo

$$\dot{I}(t) = [\beta S(t) - \mu] I(t) \geq 0 \iff S(t) \frac{\beta}{\mu} \geq 1.$$

Supponiamo che esista un punto $\tau \in (0, T)$ tale che $S(\tau) \frac{\beta}{\mu} = 1$. Allora si tratta di un punto di massimo assoluto per I . Infatti, poiché S è decrescente:

- se $t \in [0, \tau)$ si ha $S(t) \frac{\beta}{\mu} \geq S(\tau) \frac{\beta}{\mu} = 1$, quindi $\dot{I} \geq 0$, cioè I è crescente in $[0, \tau)$;
- se $t \in (\tau, 1]$ si ha $S(t) \frac{\beta}{\mu} \leq S(\tau) \frac{\beta}{\mu} = 1$, quindi $\dot{I} \leq 0$, cioè I è decrescente in $(\tau, 1]$.

Il valore $\frac{\beta}{\mu}$ viene chiamato *numero riproduttivo di base* o anche *valore di soglia critica* e riveste un ruolo chiave nel modello. Se consideriamo S_0 , infatti, abbiamo due casi:

- 1) se $S_0 > \left(\frac{\beta}{\mu}\right)^{-1}$, cioè $S_0 \frac{\beta}{\mu} > 1$, si ha $\dot{I}(0) > 0$ ed esiste un intorno $[0, b)$ in cui I è crescente;
- 2) se $S_0 \leq \left(\frac{\beta}{\mu}\right)^{-1}$, cioè $S_0 \frac{\beta}{\mu} \leq 1$, I è decrescente in $(0, T]$.

Vediamo quindi che conoscendo soltanto il numero riproduttivo di base e il valore S_0 siamo in grado di dire a priori se la malattia è sufficientemente forte da riuscire a diffondersi nella popolazione e a diventare endemica, cioè quello che succede nel caso 1, o se il numero di contagi è in fase di diminuzione, come succede nel caso 2.

In realtà il primo caso racchiude due possibilità, che dipendono dal valore $S(T)$ a cui S tende. Infatti se $S(T) < \left(\frac{\beta}{\mu}\right)^{-1}$ allora esiste $\tau \in (0, T)$, che dipende dalla velocità con cui S decresce, tale che $S(\tau) \frac{\beta}{\mu} = 1$. Per quanto abbiamo visto τ realizza il massimo di I , che vale

$$I(\tau) = I_0 \exp \left[\beta \int_0^\tau S(r) dr - \mu \tau \right],$$

dopodiché I inizia a decrescere. Se invece $S(T) \geq \left(\frac{\beta}{\mu}\right)^{-1}$ la funzione I è crescente in tutto l'intervallo $[0, T]$ e per studiare meglio il suo andamento potremmo scegliere un valore $T' > T$. Considerando però un periodo di studio molto esteso, dovremmo necessariamente tener conto dei termini di nascita e di morte, quindi sarebbe da valutare la possibilità di passare a un modello SIR di tipo endemico.

1.3 La vaccinazione

Supponiamo adesso di voler intraprendere una campagna di vaccinazione della popolazione suscettibile. Un individuo del gruppo S , dopo aver assunto il farmaco, ottiene immediatamente l'immunità dal virus e passa al gruppo dei rimossi R . Si potrebbe pensare che la strategia migliore sia vaccinare subito tutti gli individui esposti al rischio di contagio: in questo modo chi è già infetto non potrebbe trasmettere il virus durante il decorso della malattia e l'epidemia si estinguerebbe. Tuttavia nella pratica questo metodo è difficilmente attuabile per motivi economici: richiederebbe infatti di disporre di una enorme quantità di risorse materiali e finanziarie. Quindi si cerca una strategia che minimizzi il numero degli infetti e il costo dell'operazione tenendo conto che si tratta di due aspetti strettamente interdipendenti.

Consideriamo di nuovo il modello discreto in cui S_n, I_n, R_n sono rispettivamente le percentuali di individui suscettibili, infetti e rimossi relative al giorno n -esimo. Se indichiamo con u_n la percentuale di suscettibili che viene vaccinata il giorno n -esimo, il numero di vaccinazioni effettuate in quel giorno è $u_n S_n N$, quindi $u_n S_n N$ individui cessano di appartenere al compartimento dei suscettibili ed entrano in quello dei rimossi. Pertanto, al numero di suscettibili che ci saremmo aspettati il giorno $(n+1)$ -esimo in assenza di vaccinazioni, dobbiamo sottrarre la quantità $u_n S_n N$, che andrà aggiunta ai rimossi, ottenendo:

$$\begin{aligned} S_{n+1}N &= S_nN - \beta I_n S_n N - u_n S_n N, \\ R_{n+1}N &= R_nN + \mu I_n N + u_n S_n N, \end{aligned}$$

e il nuovo sistema diventa:

$$\begin{cases} S_{n+1} - S_n = -\beta S_n I_n - u_n S_n \\ I_{n+1} - I_n = \beta S_n I_n - \mu I_n \\ R_{n+1} - R_n = \mu I_n + u_n S_n \end{cases}$$

con $S(0) = S_0 \geq 0, I(0) = I_0 \geq 0, R(0) = R_0 \geq 0, S_0 + I_0 + R_0 = 1$.

In modo analogo a quanto visto precedentemente, possiamo passare al modello continuo

$$\begin{cases} \dot{S}(t) = -\beta S(t)I(t) - u(t)S(t) \\ \dot{I}(t) = \beta S(t)I(t) - \mu I(t) \\ \dot{R}(t) = \mu I(t) + u(t)S(t) \end{cases} \quad (1.2)$$

dove le condizioni iniziali sono date ancora da $S(0) = S_0, I(0) = I_0, R(0) = R_0 = 1 - I_0 - S_0$ e dove $u(t)$ rappresenta il tasso di vaccinazione della popolazione suscettibile al tempo t .

Anche in questo caso $S(t) + I(t) + R(t) \equiv 1$ e, poiché $S_0, I_0, R_0 \in [0,1]$, le funzioni $S(t), I(t), R(t)$ sono a valori in $[0,1]$.

Osserviamo che il sistema (1.2) è sottodeterminato e che ogni scelta di $u(t)$ lo rende determinato, per cui $u(t)$ assume il ruolo di variabile di *controllo* del sistema.

Definizione 1. Chiameremo **controllo ammissibile** una funzione u per cui il sistema (1.2) ammette soluzione rispettando le condizioni al bordo. Fissato un controllo ammissibile, ogni curva $(S(t), I(t), R(t))$ corrispondente a una soluzione del sistema sarà detta **traiettoria ammissibile**.

Notiamo che ogni $u \in C([0, T])$ a valori in $[0, 1]$ è un controllo ammissibile. Infatti un controllo di questo tipo rende il sistema un problema di Cauchy, per cui determina una traiettoria ammissibile in $[0, T]$, che inoltre è unica.

Definizione 2. Denominiamo **spazio dei controlli** l'insieme

$$E = \{u \in C([0, T]) \mid u(t) \in [0, 1] \quad \forall t \in [0, T]\}.$$

Definizione 3. Chiameremo **funzionale costo** il seguente

$$J(S, I, R, u) = \int_0^T \left(I(t) + \frac{A}{2} u^2(t) \right) dt.$$

Il funzionale J rappresenta un compromesso tra l'esigenza di minimizzare il numero di infetti, che richiede una grossa quantità di risorse, e quella di minimizzare il costo dell'operazione. La costante A tiene conto della spesa necessaria per sostenere la campagna di vaccinazione: maggiore è A , maggiore è il peso del secondo addendo e conseguentemente l'influenza che l'aspetto economico ha nella scelta di u . I dati reali mostrano che il costo non può essere lineare, infatti per vaccinare il primo 80% della popolazione è necessaria una spesa che in proporzione è minore di quella necessaria per l'ultimo 20% [6, 7]. Per questioni di semplicità allora consideriamo un costo quadratico: questa scelta risulterà utile più avanti nella verifica delle ipotesi del Teorema 1.

Definizione 4. Chiameremo **controllo ottimale** un controllo ammissibile u che realizzi il minimo di J e **traiettoria ottimale** la corrispondente curva $(S(t), I(t), R(t))$ soluzione del sistema.

Osserviamo che $R(t)$ è completamente determinata da $S(t)$ e $I(t)$ tramite la formula $R(t) = 1 - (S(t) + I(t))$ e sia le prime due equazioni del sistema (1.2) che il funzionale costo non dipendono da esso, quindi possiamo ridurre il numero di incognite e riformulare il nostro problema di minimo nelle sole variabili S, I, u :

Trovare un controllo $u \in E$ che realizzi il minimo di

$$J(S, I, u) = \int_0^T \left(I(t) + \frac{A}{2} u^2(t) \right) dt \tag{1.3}$$

dove S e I sono soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{S}(t) = -\beta S(t)I(t) - u(t)S(t) \\ \dot{I}(t) = \beta S(t)I(t) - \mu I(t) \end{cases} \tag{1.4}$$

con condizioni iniziali $S(0) = S_0, I(0) = I_0$, con $S_0 \geq 0, I_0 \geq 0$ e $S_0 + I_0 \leq 1$.

Capitolo 2

Esistenza di un controllo ottimale

Ci chiediamo adesso se il problema di minimo che abbiamo formulato ammetta soluzioni $u \in E$. Nella prossima sezione vedremo che l'esistenza di un controllo ottimale è garantita da condizioni sufficienti che nel nostro caso sono verificate, nella successiva studieremo alcune proprietà che tale controllo deve necessariamente soddisfare per realizzare il minimo. Questa trattazione sarà fatta prendendo in analisi un insieme di controlli più ampio in cui far variare u : lo spazio

$$U := \{u \in L^2([0, T]) \mid u(t) \in [0, 1] \text{ per q.o. } t \in [0, T]\}.$$

Osserviamo che $E \subsetneq U$, quindi l'esistenza di un controllo ottimale $u \in U$ non garantisce a priori che il problema ammetta soluzioni in E . Vedremo tuttavia che la continuità di u sarà ricavata come condizione necessaria per l'ottimalità. Questo ci permetterà di dire che esiste un controllo ottimale in U se e solo se esiste un controllo ottimale in E e che tali controlli coincidono. Anche S e I saranno trattate come generiche funzioni $L^2(0, T)$ a valori in $[0, 1]$ senza che questo comprometta le ipotesi del problema iniziale. Vedremo infatti con una semplice considerazione che ogni traiettoria ammissibile dev'essere continua, in particolare lo sarà ogni traiettoria ottimale.

2.1 Condizioni sufficienti

Denotiamo con $F(S, I, u)$ la funzione

$$F(S, I, u) = (-\beta SI - uS, \beta SI - uI).$$

Osserviamo che $F \in C([0, 1]^3) \times C([0, 1]^3)$. La limitatezza di S , I e u garantisce l'esistenza di due costanti positive C_1 e C_2 tali che:

- i) $|F(S, I, u)| \leq C_1 [1 + |S| + |I| + |u|] \quad \forall (S, I, u) \in [0, 1]^3$,
- ii) $|F(S, I, u) - F(S', I', u)| \leq C_2 [|S - S'| + |I - I'|] (1 + |u|) \quad \forall (S, I), (S', I') \in [0, 1]^2$,
 $\forall u \in [0, 1]$,
cioè F è uniformemente Lipschitziana rispetto alle prime due variabili.

Teorema 1 (Filippov - Cesari). *Consideriamo il problema di minimo:*

$$\begin{cases} J(S, I, u) = \int_0^T L(S(t), I(t), u(t)) dt \longrightarrow \text{minimo}, & u \in U \\ (\dot{S}, \dot{I}) = F(S, I, u) \\ (S(0), I(0)) = (S_0, I_0). \end{cases} \quad (2.1)$$

Supponiamo F e L continue, se valgono le seguenti ipotesi:

- i) $|F(S, I, u)| \leq C_1 [1 + |S| + |I| + |u|] \quad \forall (S, I, u) \in [0, 1]^3$, dove C_1 è un'opportuna costante positiva,
- ii) $|F(S, I, u) - F(S', I', u)| \leq C_2 [|S - S'| + |I - I'|] (1 + |u|) \quad \forall u \in [0, 1], \forall (S, I), (S', I') \in [0, 1]^2$, dove C_2 è un'opportuna costante positiva,
- iii) $L(S, I, u) \geq g(u)$, dove g è continua e tale che $\lim_{|u| \rightarrow \infty} \frac{g(u)}{|u|} = +\infty$,
- iv) Per ogni $(S, I) \in [0, 1]^2$ l'insieme

$$\tilde{G}(S, I) := \left\{ (z_1, z_2, z_3) \mid \exists u \in [0, 1] \text{ tale che } (z_1, z_2) = F(S, I, u), z_3 \geq L(S, I, u) \right\}$$

è convesso,

allora esistono $\bar{u} \in U$ e (\bar{S}, \bar{I}) rispettivamente controllo e traiettoria ottimali per il problema.

Per la dimostrazione del Teorema 1 rimandiamo a [4, Theorem 4.1]. Mostriamo che il nostro problema ne verifica le ipotesi. Sappiamo già che F è continua e che valgono la i) e la ii).

La funzione L è banalmente continua e ponendo $g(u) = \frac{A}{2}u^2$ otteniamo

$$L(S, I, u) = I + \frac{A}{2}u^2 \geq \frac{A}{2}u^2 = g(u) \quad \text{e} \quad \lim_{|u| \rightarrow \infty} \frac{g(u)}{|u|} = +\infty$$

quindi la iii) è soddisfatta. Resta da verificare che per ogni $(S, I) \in [0, 1]^2$ $\tilde{G}(S, I)$ è convesso. Fissiamo $\lambda \in (0, 1)$, $(z_1, z_2, z_3), (z'_1, z'_2, z'_3) \in \tilde{G}(S, I)$ e scegliamo $u, u' \in U$ tali che

$$(z_1, z_2) = F(S, I, u), z_3 \geq L(S, I, u) \quad \text{e} \quad (z'_1, z'_2) = F(S, I, u'), z'_3 \geq L(S, I, u').$$

Mostriamo che $\lambda(z_1, z_2, z_3) + (1 - \lambda)(z'_1, z'_2, z'_3) \in \tilde{G}(S, I)$:

- $\lambda z_1 + (1 - \lambda)z'_1 = \lambda(-\beta SI - uS) + (1 - \lambda)(-\beta SI - u'S) = -\beta SI - S[\lambda u + (1 - \lambda)u'] =$
 $= -\beta SI - u''S$ perché $u, u' \in [0, 1]$ che è convesso,
- $\lambda z_2 + (1 - \lambda)z'_2 = \lambda(\beta SI - \mu I) + (1 - \lambda)(\beta SI - \mu I) = \beta SI - \mu I,$

- $\lambda z_3 + (1 - \lambda)z_3' \geq \lambda \left(I + \frac{A}{2}u^2 \right) + (1 - \lambda) \left(I + \frac{A}{2}u'^2 \right) =$
 $= I + \frac{A}{2}[\lambda u^2 + (1 - \lambda)u'^2] \geq I + \frac{A}{2}(\lambda u + (1 - \lambda)u')^2 = I + \frac{A}{2}\lambda u''^2$, dove l'ultima
disuguaglianza segue dalla convessità della funzione $u \mapsto u^2$.

Ponendo $z_i'' = \lambda z_i + (1 - \lambda)z_i'$ per $i = 1, 2, 3$ otteniamo che il punto $(z_1'', z_2'', z_3'') \in \tilde{G}(S, I)$, quindi l'insieme è convesso.

Tutte le ipotesi del Teorema 1 sono verificate, quindi esistono un controllo ottimale $\bar{u} \in U$ e una traiettoria ottimale (\bar{S}, \bar{I}) determinata da \bar{u} .

2.2 Condizioni necessarie

Richiamiamo il funzionale $J : [L^2(0, T)]^3 \rightarrow \mathbb{R}$

$$J(S, I, u) = \int_0^T \left(I(t) + \frac{A}{2}u^2(t) \right) dt.$$

Calcoliamo il gradiente di J , che indicheremo con J' : per ogni $\begin{pmatrix} \sigma \\ j \\ v \end{pmatrix} \in [L^2(0, T)]^3$ vale

$$J'(S, I, u) \begin{pmatrix} \sigma \\ j \\ v \end{pmatrix} = \int_0^T [j(t) + Au(t)v(t)] dt.$$

Introduciamo due funzioni $\phi : [L^2(0, T)]^3 \rightarrow [L^2(0, T)]^2$ e $\psi : [L^2(0, T)]^3 \rightarrow [L^2(0, T)]^3$ così definite:

$$\psi(S, I, u)(t) = \begin{pmatrix} \phi(S, I, u)(t) \\ u(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S(t) - S_0 + \int_0^t [\beta S(r)I(r) + u(r)S(r)] dr \\ I(t) - I_0 - \int_0^t [\beta S(r)I(r) - \mu I(r)] dr \\ u(t) \end{pmatrix}$$

Notiamo che le componenti di ϕ sono nulle se e solo se (S, I) risolve il sistema

$$\begin{cases} (\dot{S}, \dot{I}) = F(S, I, u) \\ (S(0), I(0)) = (S_0, I_0). \end{cases}$$

Indicando con ψ' la derivata di ψ , nel generico elemento $\begin{pmatrix} \sigma \\ j \\ v \end{pmatrix} \in [L^2(0, T)]^3$ si ha la relazione

$$\psi'(S, I, u)(t) \begin{pmatrix} \sigma \\ j \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma(t) + \int_0^t \left[[\beta I(r) + u(r)] \sigma(r) + \beta S(r) j(r) + S(r) v(r) \right] dr \\ j(t) - \int_0^t \left[\beta I(r) \sigma(r) + [\beta S(r) - \mu] \right] dr \\ v(t) \end{pmatrix}$$

Osserviamo che $\psi'(S, I, u)$ è un operatore surgettivo. Consideriamo infatti un generico elemento $\begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix} \in [L^2(0, T)]^3$ e mostriamo che esistono $\sigma, j, v \in L^2[0, T]$ tali che

$$\psi'(S, I, u)(t) \begin{pmatrix} \sigma \\ j \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix}$$

Questa uguaglianza è vera se e solo se per ogni $t \in [0, T]$ valgono le seguenti relazioni

$$\begin{cases} \sigma(t) + \int_0^t \left[[\beta I(r) + u(r)] \sigma(r) + \beta S(r) j(r) + S(r) v(r) \right] dr = f(t) \\ j(t) - \int_0^t \left[\beta I(r) \sigma(r) + [\beta S(r) - \mu] \right] dr = g(t) \\ v(t) = h(t). \end{cases} \quad (2.2)$$

Scegliamo $v = h$ e osserviamo che dalle prime due equazioni segue che il sistema ha soluzione se e solo se le funzioni $\Sigma(t) = \sigma(t) - f(t)$ e $\Gamma(t) = j(t) - g(t)$ sono derivabili, in particolare se e solo se Σ e Γ sono le soluzioni del sistema differenziale lineare:

$$\begin{cases} \dot{\Sigma} = -(\beta I + u)[\Sigma + f] - \beta S[\Gamma + g] - Sh \\ \dot{\Gamma} = \beta I[\Sigma + f] + (\beta S - \mu)[\Gamma + g] \\ \Sigma(0) = 0, \Gamma(0) = 0. \end{cases} \quad (2.3)$$

Basta adesso ricavare $\sigma = \Sigma + f$ e $j = \Gamma + g$ e otteniamo la surgettività di $\psi'(S, I, u)$.

Sia ora $K = \left\{ \begin{pmatrix} \sigma \\ j \\ v \end{pmatrix} \in [L^2[0, T]]^3 \mid \psi(\sigma, j, v) \in \{0\} \times \{0\} \times U \right\}$ l'insieme delle terne $\begin{pmatrix} \sigma \\ j \\ v \end{pmatrix} \in [L^2[0, T]]^3$ tali che $v \in U$ e (σ, j) è una traiettoria ammissibile. Dal

Teorema 1 sappiamo che esiste un punto di minimo $\bar{x} = \begin{pmatrix} \bar{S} \\ \bar{I} \\ \bar{u} \end{pmatrix}$ per J su K .

Definizione 5. Si dice *cono normale* a K in \bar{x} l'insieme

$$N(K, \bar{x}) := \left\{ y \in [L^2(0, T)]^3 \mid \limsup_{x \rightarrow \bar{x}, x \in K \setminus \{\bar{x}\}} \frac{y \cdot (x - \bar{x})}{|x - \bar{x}|} \leq 0 \right\}.$$

Teorema 2 (Lyusternik). Siano X, Y spazi di Banach, sia U un aperto di X , e sia $g : U \rightarrow Y$ differenziabile in un punto $x \in U$, tale che l'applicazione lineare $g'(x) : X \rightarrow Y$ sia surgettiva.

Allora, se $C \subseteq Y$ e se $x \in B = g^{-1}(C)$, posto $y = g(x)$, si ha

$$N(B, x) = g'(x)^*(N(C, y)),$$

dove Y^* è il duale di Y e $g'(x)^* : Y^* \rightarrow X^*$ è l'applicazione aggiunta.

Ricordiamo che l'aggiunta di $g'(x)$ è definita come l'applicazione $g'(x)^* : Y^* \rightarrow X^*$ tale che per ogni $u \in X$ e per ogni $f \in Y^*$

$$\langle u, g'(x)^* f \rangle = \langle g'(x)u, f \rangle. \quad (2.4)$$

Osserviamo che se X e Y sono spazi di Hilbert, allora $X = X^*$ e $Y = Y^*$ e nella (2.4) la prima dualità diventa un prodotto scalare in Y , la seconda in X .

La dimostrazione di questo teorema si può trovare in [9, Propositions 2.110-2.111].

Teorema 3. Consideriamo $f : [L^2(0, T)]^3 \rightarrow \mathbb{R}$. Se \bar{x} è un punto di minimo per f su K e f è differenziabile in \bar{x} , allora $-f'(\bar{x}) \in N(K, \bar{x})$.

Dimostrazione. Per definizione esiste un intorno X di \bar{x} in cui vale

$$f(x) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x}) \cdot (x - \bar{x}) + o(|x - \bar{x}|), \quad \text{dove } \lim_{x \rightarrow \bar{x}} \frac{o(|x - \bar{x}|)}{|x - \bar{x}|} = 0.$$

Dato che \bar{x} è di minimo per f su K , se $x \in K \setminus \{\bar{x}\}$ allora

$$0 \geq f(\bar{x}) - f(x) = -f'(\bar{x}) \cdot (x - \bar{x}) + o(|x - \bar{x}|)$$

da cui segue

$$\limsup_{x \rightarrow \bar{x}, x \in K \setminus \{\bar{x}\}} \frac{-f'(\bar{x}) \cdot (x - \bar{x})}{|x - \bar{x}|} = \limsup_{x \rightarrow \bar{x}, x \in K \setminus \{\bar{x}\}} \frac{f(\bar{x}) - f(x)}{|x - \bar{x}|} \leq 0.$$

□

Dato che J è di classe C^1 segue dal teorema 3 che $-J'(\bar{x}) \in N(K, \bar{x})$.

Definizione 6. Si dice **cono tangente** a K in \bar{x} l'insieme

$$T(K, \bar{x}) = \{v \in [L^2(0, T)]^3 \mid \text{esistono due successioni } \{v_n\} \text{ e } \{t_n\} \\ \text{tali che } v_n \rightharpoonup v, t_n \rightarrow 0^+ \text{ tali che } \bar{x} + t_n v_n \in K \quad \forall n \in \mathbb{N}\},$$

dove ricordiamo che $v_n \rightharpoonup v$ significa che v_n converge a v debolmente, cioè che per ogni $w \in [L^2(0, T)]^3$ $(v_n - v) \cdot w \rightarrow 0$ per $n \rightarrow \infty$.

Il cono normale e il cono tangente sono legati dalla seguente relazione.

Proposizione 1. Si ha $y \in N(K, \bar{x})$ se e solo se $y \cdot v \leq 0 \quad \forall v \in T(K, \bar{x})$.

Dimostrazione. (\implies) Sia $y \in N(K, \bar{x})$. Se $v = 0$ la tesi è banale, fissiamo quindi $v \in T(K, \bar{x}) \setminus \{0\}$. Per definizione esistono due successioni $\{v_n\} \subset [L^2(0, T)]^3$ e $\{t_n\} \subset (0, \infty)$ tali che $\bar{x} + t_n v_n \in K$. Quindi

$$0 \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{y \cdot t_n v_n}{t_n |v_n|} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{y \cdot (\bar{x} + t_n v_n - \bar{x})}{|\bar{x} + t_n v_n - \bar{x}|}.$$

Ne segue che per ogni $\sigma > 0$ esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$\frac{y \cdot v_n}{|v_n|} \leq \sigma \quad \forall n > \bar{n},$$

cioè

$$y \cdot v_n \leq \sigma |v_n| \quad \forall n > \bar{n}.$$

Dato che $v_n \rightharpoonup v$, la successione $\{|v_n|\}$ è limitata da una costante M in virtù del teorema di Banach-Steinhaus. Perciò

$$y \cdot v_n \leq \sigma M \quad \forall n > \bar{n},$$

e per $n \rightarrow \infty$

$$y \cdot v \leq \sigma M.$$

Per l'arbitrarietà di σ si conclude che

$$y \cdot v \leq 0.$$

(\impliedby) Sia $y \in [L^2(0, T)]^3$ tale che $y \cdot v \leq 0 \quad \forall v \in T(K, \bar{x})$. Se per assurdo $y \notin N(K, \bar{x})$, allora

$$\limsup_{x \rightarrow \bar{x}, x \in K \setminus \{\bar{x}\}} \frac{y \cdot (x - \bar{x})}{|x - \bar{x}|} > 0,$$

quindi esistono $\delta > 0$ e una successione $\{x_n\} \subset K \setminus \{\bar{x}\}$ tali che

$$\frac{y \cdot (x_n - \bar{x})}{|x_n - \bar{x}|} \geq \delta \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Poniamo $t_n = |x_n - \bar{x}| > 0$, $v_n = \frac{x_n - \bar{x}}{|x_n - \bar{x}|}$. Poiché $[L^2(0, T)]^3$ è riflessivo, esiste una sottosuccessione $\{v_{n_k}\} \subset \{v_n\}$ tale che $v_{n_k} \rightharpoonup v$; dato che $t_{n_k} \rightarrow 0$, $\bar{x} + t_{n_k}v_{n_k} \in K$, si ha $v \in T(K, \bar{x})$, da cui per ipotesi $y \cdot v \leq 0$. D'altra parte, ponendo $x_{n_k} = \bar{x} + t_{n_k}v_{n_k}$, si ha

$$\delta \leq \frac{y \cdot (x_{n_k} - \bar{x})}{|x_{n_k} - \bar{x}|} = y \cdot v_{n_k} \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

da cui passando al limite per $k \rightarrow \infty$ si ottiene

$$0 \geq y \cdot v \geq \delta > 0,$$

che è assurdo. □

Vogliamo tradurre la condizione $-J'(\bar{x}) \in N(K, \bar{x})$ espressa dal Teorema 3 descrivendo l'insieme $N(K, \bar{x})$. Notiamo che $K = \psi^{-1}(\{0\} \times \{0\} \times U)$. Dato che $\psi'(\bar{x})$ è surgettiva, segue dal Teorema di Lyusternik che $N(K, \bar{x}) = \psi'(\bar{x})^*(N(\{0\} \times \{0\} \times U, \psi(\bar{x})))$, dove con $\psi'(\bar{x})^*$ indichiamo l'applicazione aggiunta di $\psi'(\bar{x})$.

Ricordando che $\psi(\bar{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \bar{u} \end{pmatrix}$, si verifica facilmente che

$$N(\{0\} \times \{0\} \times U, \psi(\bar{x})) = N(\{0\}, 0) \times N(\{0\}, 0) \times N(U, \bar{u}).$$

Segue dalla definizione che $N(\{0\}, 0) = L^2(0, T)$, resta da descrivere il terzo fattore $N(U, \bar{u})$. Dalla Proposizione 1 segue $N(U, \bar{u}) = \{y \in L^2(0, T) \mid y \cdot v \leq 0 \forall v \in T(U, \bar{u})\}$.

Proposizione 2.

$$\begin{aligned} T(U, \bar{u}) &= \left\{ v \in L^2(0, T) \mid \exists \{v_n\} \rightharpoonup v, \exists \{t_n\} \rightarrow 0^+ \text{ tali che } \bar{u} + t_n v_n \in U \forall n \in \mathbb{N} \right\} = \\ &= \left\{ v \in L^2(0, T) \mid v \leq 0 \text{ in } \{s \in [0, T] \mid \bar{u}(s) = 1\}, v \geq 0 \text{ in } \{s \in [0, T] \mid \bar{u}(s) = 0\} \right\}. \end{aligned}$$

Dimostrazione. Mostriamo che valgono le due inclusioni.

(\subseteq) Sia $v \in T(U, \bar{u})$, allora esistono $\{v_n\} \rightharpoonup v$, $\{t_n\} \rightarrow 0^+$ tali che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $\bar{u}(s) + t_n v_n(s) \in [0, 1]$ per q.o. $s \in [0, T]$.

Se $\bar{u}(s) = 1$ si ha $1 + t_n v_n(s) \leq 1 \forall n \in \mathbb{N}$, da cui otteniamo $v_n(s) \leq 0 \forall n \in \mathbb{N}$. Dato che $v_n \rightharpoonup v$, allora passando al limite per $n \rightarrow \infty$ si ha $v(s) \leq 0$ quasi ovunque. Analogamente, se $\bar{u}(s) = 0$ si ha $0 + t_n v_n(s) \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, quindi $v_n(s) \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $v(s) \geq 0$ quasi ovunque.

(\supseteq) Sia $v \in L^2(0, T)$ tale che $v \leq 0$ in $\{s \in [0, T] \mid \bar{u}(s) = 1\}$ e $v \geq 0$ in $\{s \in [0, T] \mid \bar{u}(s) = 0\}$. Scegliamo due successioni $\{t_n\}$ e $\{v_n\}$ nel modo seguente:

$$t_n = \frac{1}{n^2} \rightarrow 0^+,$$

e, per ogni $n \in \mathbb{N}$, per ogni $s \in [0, T]$, se $0 < \bar{u}(s) < 1$

$$v_n(s) = \begin{cases} n \wedge n^2[1 - \bar{u}(s)] & \text{se } v(s) \geq n \wedge n^2[1 - \bar{u}(s)] \\ v(s) & \text{se } (-n) \vee (-n^2\bar{u}(s)) \leq v(s) \leq n \wedge n^2[1 - \bar{u}(s)] \\ (-n) \vee (-n^2\bar{u}(s)) & \text{se } v(s) \leq (-n) \vee (-n^2\bar{u}(s)) \end{cases}$$

mentre, se $\bar{u}(s) = 0$ o se $\bar{u}(s) = 1$, $v_n(s) = v(s)$.

Allora se $s \in [0, T]$ è tale che $0 < \bar{u}(s) < 1$ si ha:

- se $v(s) \in \mathbb{R}$, $(-n) \vee (-n^2\bar{u}(s)) \leq v(s) \leq n \wedge n^2[1 - \bar{u}(s)]$ definitivamente;
- se $v(s) = +\infty$, $v(s) \geq n \wedge n^2[1 - \bar{u}(s)]$ definitivamente;
- se $v(s) = -\infty$, $v(s) \leq (-n) \vee (-n^2\bar{u}(s))$ definitivamente.

Tuttavia, essendo $v \in L^2(0, T)$, l'insieme $\{s \in [0, T] \mid |v(s)| = \infty\}$ ha misura nulla, quindi per q.o. $s \in [0, T]$ si ha $(-n) \vee (-n^2\bar{u}(s)) \leq v(s) \leq n \wedge n^2[1 - \bar{u}(s)]$ definitivamente e, di conseguenza, $v_n(s) = v(s)$ definitivamente. In particolare $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n(s) = v(s)$ e $|v_n(s)| \leq |v(s)|$, da cui segue $|v_n(s) - v(s)|^2 \leq 4|v(s)|^2$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Per il teorema di convergenza dominata allora $v_n \rightarrow v$ in $L^2(0, T)$, da cui segue che $v_n \rightarrow v$ in $L^2(0, T)$. Mostriamo adesso che per ogni $n \in \mathbb{N}$ $\bar{u} + t_n v_n \in U$ o equivalentemente che per ogni $n \in \mathbb{N}$ $\bar{u}(s) + t_n v_n(s) \in [0, 1]$ per q.o. $s \in [0, T]$. Sia $s \in [0, T]$ tale che $v(s) \in \mathbb{R}$, si ha:

$$\bar{u}(s) + t_n v_n(s) = \bar{u}(s) + \frac{1}{n^2} v(s) \begin{cases} \leq \bar{u}(s) + \frac{1}{n^2} n^2 (1 - \bar{u}(s)) = 1 \\ \geq \bar{u}(s) - \frac{1}{n^2} n^2 \bar{u}(s) = 0 \end{cases} \quad \text{se } 0 < \bar{u} < 1,$$

$$\bar{u}(s) + t_n v_n(s) = 1 + t_n v(s) \leq 1 \quad \text{se } \bar{u}(s) = 1,$$

$$\bar{u}(s) + t_n v_n(s) = 0 + t_n v(s) \geq 0 \quad \text{se } \bar{u}(s) = 0. \quad \square$$

Dalla Proposizione 1 otteniamo

$$y \in N(U, \bar{u}) \iff 0 \geq \int_0^T y(t)v(t) dt \quad \forall v \in T(U, \bar{u}).$$

Ma

$$0 \geq \int_0^T y(t)v(t) dt = \int_{\{\bar{u}=0\}} y(t)v(t) dt + \int_{\{\bar{u}=1\}} y(t)v(t) dt + \int_{\{0 < \bar{u} < 1\}} y(t)v(t) dt.$$

Dalla Proposizione 2 sappiamo che dobbiamo scegliere v tale che $v \leq 0$ in $\{\bar{u} = 1\}$ e $v \geq 0$ in $\{\bar{u} = 0\}$.

Scegliendo $v = 0$ su $\{\bar{u} = 0\} \cup \{\bar{u} = 1\}$ si trova

$$0 \geq \int_0^T y(t)v(t) dt = \int_{\{0 < \bar{u} < 1\}} y(t)v(t) dt \quad \forall v \in T(U, \bar{u}) \implies y = 0 \quad \text{q.o. in } \{0 < \bar{u} < 1\}.$$

Allora si ha:

$$0 \geq \int_0^T y(t)v(t) dt \quad \forall v \in T(U, \bar{u}) = \int_{\{\bar{u}=0\}} y(t)v(t) dt + \int_{\{\bar{u}=1\}} y(t)v(t) dt.$$

Scegliendo adesso $v = 0$ su $\{\bar{u} = 0\}$ si trova

$$0 \geq \int_0^T y(t)v(t) dt = \int_{\{\bar{u}=1\}} y(t)v(t) dt \quad \forall v \leq 0 \implies y \geq 0 \quad \text{q.o. in } \{\bar{u} = 1\}.$$

Analogamente, scegliendo $v = 0$ su $\{\bar{u} = 1\}$ si trova

$$0 \geq \int_0^T y(t)v(t) dt = \int_{\{\bar{u}=0\}} y(t)v(t) dt \quad \forall v \geq 0 \implies y \leq 0 \quad \text{q.o. in } \{\bar{u} = 0\}.$$

Riassumendo, si ha

$$y \in N(U, \bar{u}) \Leftrightarrow y \in M,$$

dove $M = \left\{ y \in L^2(0, T) \mid y \leq 0 \text{ in } \{\bar{u} = 0\}, y \geq 0 \text{ in } \{\bar{u} = 1\}, y = 0 \text{ in } \{0 < \bar{u} < 1\} \right\}$,
da cui ricaviamo $N(K, \bar{x}) = \psi'(\bar{x})^*(L^2(0, T) \times L^2(0, T) \times M)$ e la condizione $-J'(\bar{x}) \in$

$N(K, \bar{x})$ diventa: esiste $\begin{pmatrix} \Lambda_1 \\ \Lambda_2 \\ m \end{pmatrix} \in L^2(0, T) \times L^2(0, T) \times M$ tale che

$$J'(\bar{x}) \begin{pmatrix} \sigma \\ j \\ v \end{pmatrix} + \psi'(\bar{x})^* \begin{pmatrix} \Lambda_1 \\ \Lambda_2 \\ m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sigma \\ j \\ v \end{pmatrix} = 0 \quad \forall \begin{pmatrix} \sigma \\ j \\ v \end{pmatrix} \in [L^2(0, T)]^3,$$

cioè

$$J'(\bar{x}) \begin{pmatrix} \sigma \\ j \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Lambda_1 \\ \Lambda_2 \\ m \end{pmatrix} \cdot \psi'(\bar{x}) \begin{pmatrix} \sigma \\ j \\ v \end{pmatrix} = 0 \quad \forall \begin{pmatrix} \sigma \\ j \\ v \end{pmatrix} \in [L^2(0, T)]^3.$$

Svolgiamo i conti:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^T [j(t) + A\bar{u}(t)v(t)] dt + \\ &+ \int_0^T \Lambda_1(t) \left[\sigma(t) + \int_0^t \left[[\beta\bar{I}(r) + \bar{u}(r)] \sigma(r) + \beta\bar{S}(r)j(r) + \bar{S}(r)v(r) \right] dr \right] + \\ &+ \int_0^T \Lambda_2(t) \left[j(t) - \int_0^t \left[\beta\bar{I}(r)\sigma(r) + [\beta\bar{S}(r) - \mu] \right] dr \right] + \int_0^T m(t)v(t) dt; \end{aligned}$$

invertiamo l'ordine d'integrazione usando l'uguaglianza $\int_0^T \int_0^t dr dt = \int_0^T \int_r^T dt dr$:

$$\begin{aligned}
 0 = & \int_0^T \left[\sigma(r) \left[\Lambda_1(r) + \left[\int_r^T \Lambda_1(t) dt \right] [\beta \bar{I}(r) + \bar{u}(r)] - \left[\int_r^T \Lambda_2(t) dt \right] \beta \bar{I}(r) \right] + \right. \\
 & + j(r) \left[1 + \Lambda_2(r) + \left[\int_r^T \Lambda_1(t) dt \right] \beta \bar{S}(r) - \left[\int_r^T \Lambda_2(t) dt \right] [\beta \bar{S}(r) - \mu] \right] + \\
 & \left. + v(r) \left[A \bar{u}(r) + \left[\int_r^T \Lambda_1(t) dt \right] \bar{S}(r) + m(r) \right] \right] dr \quad \forall \begin{pmatrix} \sigma \\ j \\ v \end{pmatrix} \in [L^2(0, T)]^3.
 \end{aligned}$$

Segue dall'arbitrarietà di σ , j , v che i tre addendi sono nulli:

$$\begin{cases} \Lambda_1(r) + \left[\int_r^T \Lambda_1(t) dt \right] [\beta \bar{I}(r) + \bar{u}(r)] - \left[\int_r^T \Lambda_2(t) dt \right] \beta \bar{I}(r) = 0 \\ 1 + \Lambda_2(r) + \left[\int_r^T \Lambda_1(t) dt \right] \beta \bar{S}(r) - \left[\int_r^T \Lambda_2(t) dt \right] [\beta \bar{S}(r) - \mu] = 0 \\ A \bar{u}(r) + \left[\int_r^T \Lambda_1(t) dt \right] \bar{S}(r) + m(r) = 0. \end{cases} \quad (2.5)$$

Adesso, ponendo $\lambda_1(t) = - \int_t^T \Lambda_1(r) dr$ e $\lambda_2(t) = - \int_t^T \Lambda_2(r) dr$, si ha $\lambda_1' = \Lambda_1$, $\lambda_2' = \Lambda_2$ e il sistema diventa:

$$\begin{cases} \lambda_1'(t) = \lambda_1(t) [\beta \bar{I}(t) + \bar{u}(t)] - \lambda_2(t) \beta \bar{I}(t), & \lambda_1(T) = 0 \\ \lambda_2'(t) = -1 + \lambda_1(t) \beta \bar{S}(t) - \lambda_2(t) [\beta \bar{S}(t) - \mu], & \lambda_2(T) = 0 \\ m(t) = -A \bar{u}(t) + \lambda_1(t) \bar{S}(t). \end{cases} \quad (2.6)$$

In particolare dall'ultima equazione ricaviamo

$$\bar{u}(t) = \frac{\lambda_1(t) \bar{S}(t)}{A} - \frac{m(t)}{A},$$

e ricordando che $m \geq 0$ su $\{\bar{u} = 1\}$, $m \leq 0$ su $\{\bar{u} = 0\}$ e $m = 0$ su $\{0 < \bar{u} < 1\}$, si ha

$$\begin{aligned}
 1 & \leq \frac{\lambda_1(t) \bar{S}(t)}{A} \text{ su } \{\bar{u} = 1\}, \\
 0 & \geq \frac{\lambda_1(t) \bar{S}(t)}{A} \text{ su } \{\bar{u} = 0\},
 \end{aligned}$$

$$\bar{u}(t) = \frac{\lambda_1(t)\bar{S}(t)}{A} \text{ su } \{0 < \bar{u} < 1\}.$$

Possiamo quindi esprimere \bar{u} in funzione di λ_1 e \bar{S} :

$$\bar{u}(t) = \min \left\{ \max \left\{ \frac{\lambda_1(t)\bar{S}(t)}{A}, 0 \right\}, 1 \right\} = \begin{cases} 1 & \text{se } \frac{\lambda_1(t)\bar{S}(t)}{A} \geq 1 \\ \frac{\lambda_1(t)\bar{S}(t)}{A} & \text{se } 0 < \frac{\lambda_1(t)\bar{S}(t)}{A} < 1 \\ 0 & \text{se } \frac{\lambda_1(t)\bar{S}(t)}{A} \leq 0. \end{cases} \quad (2.7)$$

2.3 Continuità come condizione necessaria

Nella sezione precedente abbiamo trovato che se $\bar{u} \in L^2(0, T)$ è un controllo ottimale, allora dev'essere tale da rendere contemporaneamente risolubili i due sistemi di equazioni differenziali:

$$\begin{cases} \dot{S}(t) = -\beta S(t)I(t) - \bar{u}(t)S(t) \\ \dot{I}(t) = \beta S(t)I(t) - \mu I(t) \\ S(0) = S_0 \\ I(0) = I_0 \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{\lambda}_1(t) = \lambda_1(t) [\beta I(t) + \bar{u}(t)] - \lambda_2(t)\beta I(t) \\ \dot{\lambda}_2(t) = -1 + \lambda_1(t)\beta S(t) - \lambda_2(t) [\beta S(t) - \mu] \\ m(t) = -A\bar{u}(t) + \lambda_1(t)S(t) \\ \lambda_1(T) = \lambda_2(T) = 0 \end{cases}$$

dove $S, I, \lambda_1, \lambda_2, m \in L^2(0, T)$ e $m \geq 0$ su $\{\bar{u} = 1\}$, $m \leq 0$ su $\{\bar{u} = 0\}$, $m = 0$ su $\{0 < \bar{u} < 1\}$.

Osserviamo che ogni quaterna $(S, I, \lambda_1, \lambda_2) \in [L^2(0, T)]^4$ che sia soluzione dei due sistemi è costituita in realtà da funzioni continue in $[0, T]$. Infatti, ricordando che $L^2(0, T) \subset L^1(0, T)$ in quanto $[0, T]$ è un insieme limitato, $S, I, \lambda_1, \lambda_2$ sono integrali di funzioni L^1 , quindi sono continue. Da questo e dalla (2.7) deduciamo che il controllo \bar{u} è continuo. Possiamo quindi affermare che la scelta fatta all'inizio del capitolo di considerare un insieme più ampio di funzioni in cui far variare S, I, u ha generato un problema equivalente a quello formulato in partenza, in cui si richiedeva la continuità di controlli e traiettorie ottimali. Essa è stata dettata dal fatto che l'ipotesi di continuità risultava scomoda nella trattazione matematica: indebolendola invece ci siamo messi nello spazio di Hilbert $[L^2(0, T)]^3$ e questo ci ha fornito gli strumenti necessari per dimostrare un maggior numero di condizioni legate all'esistenza del minimo.

Avevamo osservato in precedenza che se S, I, u sono continue, il primo dei due sistemi è un problema di Cauchy, quindi la soluzione (S, I) esiste ed è unica. In particolare adesso possiamo affermare che se \bar{u} è un controllo ottimale, allora esiste un'unica traiettoria ottimale \bar{S}, \bar{I} relativa a \bar{u} . Questo implica che anche il secondo sistema, che è lineare in λ_1 e λ_2 ma dipende da \bar{S} e \bar{I} , ha soluzione unica.

Osserviamo che le funzioni λ_1 e λ_2 sono limitate da costanti che non dipendono da u .

Lemma 1. *Esistono due costanti positive $c_1(T)$ e $c_2(T)$ tali che $|\lambda_1(t)| \leq c_1(T)$ e $|\lambda_2(t)| \leq c_2(T)$ per ogni scelta di $u \in C([0, T])$ a valori in $[0, 1]$.*

Dimostrazione. Si ha, scrivendo le equazioni differenziali di λ_1 e λ_2 in forma integrale,

$$\begin{aligned} |\lambda_1(t)| &\leq \beta \int_t^T e^{-\int_t^s [\beta I(r) + u(r)] dr} I(s) |\lambda_2(s)| ds \leq \int_t^T |\lambda_2(s)| ds; \\ |\lambda_2(t)| &\leq \int_t^T e^{\int_t^s [\beta S(r) - \mu] dr} |1 - \beta \lambda_1(s) S(s)| ds \leq \int_t^T e^{s-t} [1 + |\lambda_1(s)|] ds. \end{aligned}$$

Di conseguenza

$$\begin{aligned} |\lambda_1(t)| &\leq \int_t^T \int_s^T e^{r-s} (1 + |\lambda_1(r)|) dr ds = \\ &= \int_t^T \int_t^r e^{r-s} (1 + |\lambda_1(r)|) ds dr = \\ &= \int_t^T (e^{r-t} - 1) (1 + |\lambda_1(r)|) dr = \\ &= (e^{T-t} - 1 - (T-t)) + \int_t^T (e^{r-t} - 1) |\lambda_1(r)| dr \leq \\ &\leq e^T + \int_t^T e^r |\lambda_1(r)| dr. \end{aligned}$$

Per il lemma di Grönwall allora

$$|\lambda_1(t)| \leq e^{T + \int_t^T e^r dr} \leq c_1(T),$$

e da questo segue che

$$|\lambda_2(t)| \leq \int_t^T e^{s-t} [1 + |\lambda_1(s)|] ds \leq c_2(T).$$

□

Consideriamo ancora la (2.7). Sappiamo già che \bar{S} e λ_1 sono limitate da costanti che non dipendono dalla scelta del controllo. Perciò maggiore è il valore di A minore è la misura dell'insieme $Z = \{t \in [0, T] \mid \bar{u}(t) = 0 \text{ o } \bar{u}(t) = 1\}$. Per A sufficientemente grande $Z = \emptyset$, cioè $\bar{u}(t) \in (0, 1)$ per ogni $t \in [0, T]$. Questo significa che maggiore è il costo della vaccinazione, più è difficile mantenere alto il numero di vaccinazioni giornaliere.

2.4 Unicità del controllo ottimale

Nella sezione 2.2 abbiamo trovato che il controllo ottimale deve soddisfare la condizione

$$\bar{u}(t) = \min \left\{ \max \left\{ \frac{\lambda_1(t) \bar{S}(t)}{A}, 0 \right\}, 1 \right\} \quad (2.8)$$

dove λ_1 e \bar{S} sono univocamente determinate da \bar{u} , per cui $\lambda_1 = \lambda_1(t, \bar{u})$ e $\bar{S} = \bar{S}(t, \bar{u})$.

Definiamo la funzione $M : C([0, T]) \rightarrow C([0, T])$ nel modo seguente:

$$[M(u)](t) = \min \left\{ \max \left\{ \frac{\lambda_1(t, u) \bar{S}(t, u)}{A}, 0 \right\}, 1 \right\}. \quad (2.9)$$

La condizione (2.8) è equivalente a dire che, nello spazio di Banach $C([0, T])$, \bar{u} è un punto fisso per $M(u)$. Cerchiamo allora le condizioni sotto le quali la funzione $M(u)$ è una contrazione, cioè esiste una costante $C \in (0, 1)$ tale che per ogni $u, v \in C([0, T])$ si abbia $\|M(u) - M(v)\|_\infty \leq C\|u - v\|_\infty$.

Ricordando che $I(t) = I_0 e^{[\beta \int_0^t S(r) dr - \mu t]}$ e $S(t) = S_0 e^{[-\int_0^t \beta I(r) + u(r) dr]}$ e usando il teorema di Lagrange otteniamo le seguenti maggiorazioni

$$\begin{aligned} |S(t, u) - S(t, v)| &= S_0 \left| e^{[-\int_0^t \beta I(r, u) + u(r) dr]} - e^{[-\int_0^t \beta I(r, v) + v(r) dr]} \right| \leq \\ &\leq \beta S_0 \int_0^t |I(r, u) - I(r, v)| dr + S_0 \int_0^t |u(r) - v(r)| dr, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |I(t, u) - I(t, v)| &= I_0 e^{-\mu t} \left| e^{[\int_0^t \beta S(r, u) dr]} - e^{[\int_0^t \beta S(r, v) dr]} \right| \leq \\ &\leq \beta I_0 e^{(\beta - \mu)t} \int_0^t |S(r, u) - S(r, v)| dr, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |I(t, u) - I(t, v)| + |S(t, u) - S(t, v)| &\leq \\ &\leq \beta I_0 e^{(\beta - \mu)t} \int_0^t |S(r, u) - S(r, v)| dr + \beta S_0 \int_0^t |I(r, u) - I(r, v)| dr + \\ &\quad + S_0 \int_0^t |u(r) - v(r)| dr \leq \\ &\leq \beta \left[S_0 \vee \left[I_0 \left(e^{(\beta - \mu)T} \vee 1 \right) \right] \right] \int_0^t \left[|I(r, u) - I(r, v)| + |S(r, u) - S(r, v)| \right] dr + \\ &\quad + S_0 \int_0^t |u(r) - v(r)| dr. \end{aligned}$$

Definendo

$$\begin{aligned} K &= \beta \left[S_0 \vee \left[I_0 \left(e^{(\beta - \mu)T} \vee 1 \right) \right] \right], \\ \varphi(t) &= |I(r, u) - I(r, v)| + |S(r, u) - S(r, v)|, \\ g(t) &= S_0 \int_0^t |u(r) - v(r)| dr, \end{aligned}$$

la disuguaglianza diventa:

$$\varphi(t) \leq g(t) + K \int_0^t \varphi(r) dr =: G(t), \quad (2.10)$$

da cui segue

$$\begin{aligned} G'(t) &= g'(t) + K\varphi(t) \leq g'(t) + KG(t), \\ e^{-Kt}[G'(t) - KG(t)] &\leq e^{-Kt}g'(t), \\ \frac{d}{dt} [e^{-Kt}G(t)] &\leq e^{-Kt}g'(t). \end{aligned}$$

Integrando e notando che $G(0) = 0$ si ha

$$e^{-Kt}G(t) - G(0) = e^{-Kt}G(t) \leq \int_0^t e^{-Ks}g'(s) ds,$$

quindi

$$\varphi(t) \leq G(t) \leq e^{Kt} \int_0^t e^{-Ks}g'(s) ds \leq e^{KT} \int_0^t g'(s) ds \leq e^{KT} S_0 \int_0^t |u(s) - v(s)| ds.$$

Abbiamo ottenuto

$$|I(t, u) - I(t, v)| + |S(t, u) - S(t, v)| \leq e^{KT} S_0 \int_0^t |u(s) - v(s)| ds. \quad (2.11)$$

In modo analogo otteniamo alcune maggiorazioni per $|\lambda_1(t, u) - \lambda_1(t, v)|$ e $|\lambda_2(t, u) - \lambda_2(t, v)|$. Siano c_1 e c_2 le costanti fornite dal lemma 1, allora

$$\begin{aligned} |\lambda_1(t, u) - \lambda_1(t, v)| &\leq \\ &\leq \beta \int_t^T \left| e^{-\int_t^s [\beta I(r, u) + u(r)] dr} - e^{-\int_t^s [\beta I(r, v) + v(r)] dr} \right| c_2 ds + \\ &\quad + \beta \int_t^T [|I(s, u) - I(s, v)| c_2 + |\lambda_2(s, u) - \lambda_2(s, v)|] ds \leq \\ &\leq c_2 \beta^2 \int_t^T \int_t^s |I(r, u) - I(r, v)| dr ds + c_2 \beta \int_t^T \int_t^s |u(r) - v(r)| dr ds + \\ &\quad + c_2 \beta \int_t^T |I(s, u) - I(s, v)| ds + \beta \int_t^T |\lambda_2(s, u) - \lambda_2(s, v)| ds \leq \\ &\leq c_2 \beta [1 + \beta(T - t)] \int_t^T |I(r, u) - I(r, v)| dr + c_2 \beta (T - t) \int_t^T |u(r) - v(r)| dr + \\ &\quad + \beta \int_t^T |\lambda_2(r, u) - \lambda_2(r, v)| dr. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & |\lambda_2(t, u) - \lambda_2(t, v)| \leq \\
 & \leq \int_t^T e^{(\beta S_0 - \mu)(s-t)} \int_t^s \beta |S(r, u) - S(r, v)| dr [1 + c_1] ds + \\
 & + \int_t^T e^{(\beta S_0 - \mu)s} [\beta |\lambda_1(s, u) - \lambda_1(s, v)| + \beta c_1 |S(s, u) - S(s, v)|] ds \leq \\
 & \leq [1 + c_1 S_0] [e^{(\beta S_0 - \mu)(T-t)} \vee 1] \int_t^T (T-r) |S(r, u) - S(r, v)| dr + \\
 & + \int_t^T [e^{(\beta S_0 - \mu)(T-t)} \vee 1] \beta |\lambda_1(s, u) - \lambda_1(s, v)| ds + \\
 & + \beta c_1 \int_t^T [e^{(\beta S_0 - \mu)(T-t)} \vee 1] |S(s, u) - S(s, v)| ds \leq \\
 & \leq [e^{(\beta S_0 - \mu)(T-t)} \vee 1] [(1 + c_1 S_0)(T-t) \vee [\beta c_1]] \int_t^T |S(r, u) - S(r, v)| dr + \\
 & + [e^{(\beta S_0 - \mu)(T-t)} \vee 1] \beta \int_t^T |\lambda_1(r, u) - \lambda_1(r, v)| dr.
 \end{aligned}$$

Poniamo

$$\begin{aligned}
 K &= e^{(\beta S_0 - \mu)T} \vee 1, \\
 H &= \max \left\{ c_2 \beta [1 + \beta T], [e^{(\beta S_0 - \mu)T} \vee 1] [(1 + c_1 S_0)T] \vee [\beta c_1] \right\}, \\
 L &= c_2 T.
 \end{aligned}$$

Si ha

$$\begin{aligned}
 & |\lambda_1(t, u) - \lambda_1(t, v)| + |\lambda_2(t, u) - \lambda_2(t, v)| \leq \\
 & \beta K \int_t^T [|\lambda_1(s, u) - \lambda_1(s, v)| + |\lambda_2(s, u) - \lambda_2(s, v)|] ds + \\
 & + H \int_t^T [I(s, u) - I(s, v)] + |S(s, u) - S(s, v)| ds + \beta L \int_t^T |u(r) - v(r)| dr \leq \\
 & \leq \beta K \int_t^T [|\lambda_1(s, u) - \lambda_1(s, v)| + |\lambda_2(s, u) - \lambda_2(s, v)|] ds + \\
 & + H S_0 \int_t^T |u(s) - v(s)| ds + \beta L \int_t^T |u(r) - v(r)| dr \leq \\
 & \leq \beta K \int_t^T [|\lambda_1(s, u) - \lambda_1(s, v)| + |\lambda_2(s, u) - \lambda_2(s, v)|] ds + \\
 & + (\beta \vee S_0) [c_2 \vee H] (T-t) \int_t^T |u(s) - v(s)| ds.
 \end{aligned}$$

Come prima, ponendo

$$\begin{aligned}\psi(t) &= |\lambda_1(s, u) - \lambda_1(s, v)| + |\lambda_2(s, u) - \lambda_2(s, v)|, \\ g(t) &= (\beta \vee S_0)[c_2 \vee H](T - t) \int_t^T |u(s) - v(s)| ds,\end{aligned}$$

otteniamo:

$$\psi(t) \leq g(t) + \beta K \int_t^T \psi(s) ds =: G(t).$$

Procediamo in modo analogo:

$$\begin{aligned}G'(t) &= g'(t) + \beta K \psi(t) \geq g'(t) + \beta K G'(t), \\ \frac{d}{dt} \left[e^{\beta K t} G(t) \right] &= e^{\beta K t} \left[G'(t) + \beta K G(t) \right] \geq e^{\beta K t} g'(t).\end{aligned}$$

Integriamo e osserviamo che $G(T) = 0$; quindi

$$-e^{\beta K t} G(t) \geq \int_t^T e^{\beta K s} g'(s) ds = -e^{\beta K t} g(t) - \int_t^T \beta K e^{\beta K s} g(s) ds,$$

$$e^{\beta K t} G(t) \leq e^{\beta K t} g(t) + \int_t^T \beta K e^{\beta K s} g(s) ds,$$

quindi

$$\psi(t) \leq G(t) \leq g(t) + \int_t^T \beta K e^{\beta K (s-t)} g(s) ds.$$

Abbiamo ottenuto:

$$\begin{aligned}& |\lambda_1(t, u) - \lambda_1(t, v)| + |\lambda_2(t, u) - \lambda_2(t, v)| \leq \\ & \leq (\beta \vee S_0)[c_2 \vee H](T - t) \left[\int_t^T |u(s) - v(s)| ds + \beta K \int_t^T e^{\beta K (T-s)} (T - s) \int_t^s |u(r) - v(r)| dr \right] = \\ & = (\beta \vee S_0)[c_2 \vee H](T - t) \left[1 + \beta K e^{\beta K (T-t)} \right] \int_t^T |u(s) - v(s)| ds.\end{aligned}$$

Infine, ponendo $C_T = [c_2 \vee H] \left[1 + \beta K e^{\beta K T} \right]$ abbiamo:

$$|\lambda_1(t, u) - \lambda_1(t, v)| + |\lambda_2(t, u) - \lambda_2(t, v)| \leq (\beta \vee S_0) C_T (T - t) \int_t^T |u(s) - v(s)| ds. \quad (2.12)$$

Con la (2.11) e la (2.12) possiamo trovare alcune condizioni sufficienti affinché $M(u)$ sia una contrazione.

$$\begin{aligned}
 |[M(u)](t) - [M(v)](t)| &\leq \frac{1}{A} |\lambda_1(t, u)S(t, u) - \lambda_1(t, v)S(t, v)| \leq \\
 &\leq \frac{1}{A} |\lambda_1(t, u)S(t, u) - \lambda_1(t, v)S(t, u)| + \frac{1}{A} |\lambda_1(t, v)S(t, u) - \lambda_1(t, v)S(t, v)| \leq \\
 &\leq \frac{S_0}{A} |\lambda_1(t, u) - \lambda_1(t, v)| + \frac{c_1}{A} |S(t, u) - S(t, v)| \leq \\
 &\leq \frac{S_0}{A} [|\lambda_1(t, u) - \lambda_1(t, v)| + |\lambda_2(t, u) - \lambda_2(t, v)|] + \\
 &\quad + \frac{c_1}{A} [|S(t, u) - S(t, v)| + |I(t, u) - I(t, v)|] \leq \\
 &\leq \frac{S_0(\beta \vee S_0)}{A} C_T(T-t) \int_t^T |u(s) - v(s)| ds + \frac{e^{KT} S_0}{A} c_1 \int_0^t |u(s) - v(s)| ds.
 \end{aligned}$$

Passando alla norma dell'estremo superiore si ottiene:

$$\|M(u) - M(v)\|_\infty \leq \frac{T[(c_1 S_0) \vee [TC_T(\beta \vee S_0)]]}{A} \|u - v\|_\infty.$$

Si vede allora che:

- 1) per A , β , S_0 fissati, $M(u)$ è una contrazione per T piccolo. Infatti osservando che $\lim_{T \rightarrow 0} C_T T = 0$, concludiamo che esiste $T > 0$ tale che

$$\frac{T[(c_1 S_0) \vee [TC_T(\beta \vee S_0)]]}{A} < 1;$$

- 2) per T fissato, $M(u)$ è una contrazione per A abbastanza grande o per β e S_0 abbastanza piccoli.

Il risultato che abbiamo ottenuto non dimostra che la funzione $M(u)$ è una contrazione in ogni caso. D'altra parte, visto lo stretto legame che intercorre tra il valore di A e il costo della campagna di vaccinazione, si suppone che l'esigenza di formulare un problema di controllo ottimale sia dettata dalla necessità di coprire spese elevatissime in tempi brevi, e quindi che il rapporto $\frac{T}{A}$ sia piccolo.

Capitolo 3

Risultati numerici

Uno studio qualitativo della terna ottimale $(\bar{S}, \bar{I}, \bar{u})$ risulta molto complicato. Questo è dovuto alla non linearità delle equazioni che costituiscono il vincolo

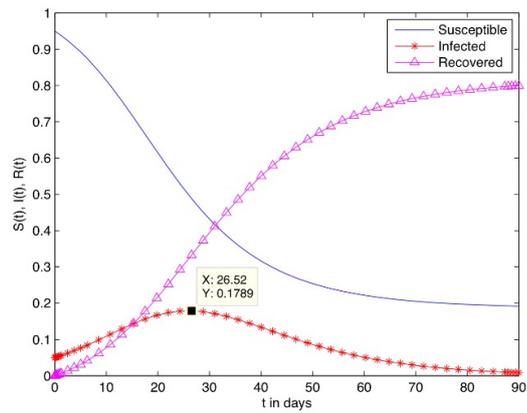
$$\begin{cases} \dot{S}(t) = -\beta S(t)I(t) - u(t)S(t) \\ \dot{I}(t) = \beta S(t)I(t) - \mu I(t), \end{cases} \quad (3.1)$$

sul quale vogliamo minimizzare il funzionale costo J , anch'esso non lineare. Per questo motivo riportiamo alcuni risultati numerici, ottenuti nel lavoro di Rachah e Torres [1] che mostrano graficamente la differenza tra l'andamento delle funzioni S , I , R con e senza controllo. Le costanti β e μ sono state stimate da Kaurov [8] in un articolo pubblicato il 4 Novembre 2014. Egli ha effettuato uno studio statistico dei dati forniti dall'Organizzazione Mondiale della Sanità (OMS) in riferimento alla situazione di quel periodo in Africa occidentale, e ha ottenuto i valori $\beta = 0,2$ e $\mu = 0,1$. Rachah e Torres, basandosi sulle stime di Kaurov, hanno scelto di studiare l'evoluzione dell'epidemia a partire dal 4 Novembre 2014 per i 90 giorni successivi. L'unità di misura adottata per il tempo è il giorno, perciò $T = 90$. Per le condizioni iniziali sono stati adattati i dati dell'OMS relativi al 4 Novembre, data che corrisponde all'istante $t = 0$, in modo da avere $R_0 = 0$. In particolare $S_0 = 0,95$ e $I_0 = 0,05$.

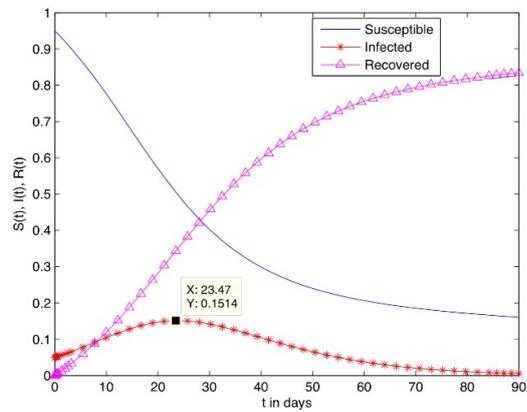
3.1 Simulazione con controllo costante

I grafici della Figura 3.1 sono stati ottenuti con Matlab e rappresentano le funzioni S , I , R che risolvono il modello SIR 1.2, determinate da varie scelte di controlli costanti $u(t) \equiv v$. Nel caso (a) il controllo è nullo e le soluzioni corrispondenti coincidono con quelle del modello SIR 1.1. Si vede che il numero di infetti cresce per 26 giorni fino a raggiungere il valore massimo, in cui I vale 0,1789. Nei casi (b) e (c) della Figura 3.1 e nella Figura 3.2 si aumenta gradualmente il valore di v .

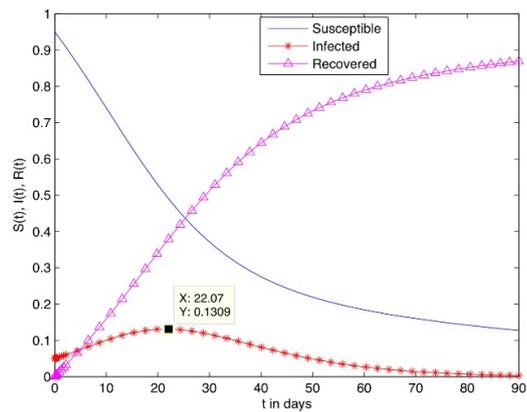
Incrementando il tasso di vaccinazione, il periodo in cui la funzione I è crescente si accorcia e il suo valore massimo diminuisce gradualmente. Con un tasso del 6%, ad esempio, il



(a) $v = 0$

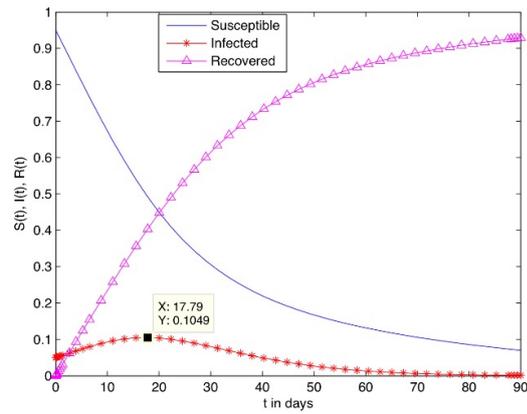


(b) $v = 0.005$

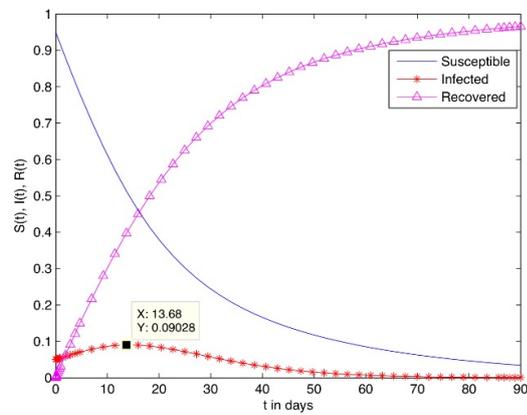


(c) $v = 0.01$

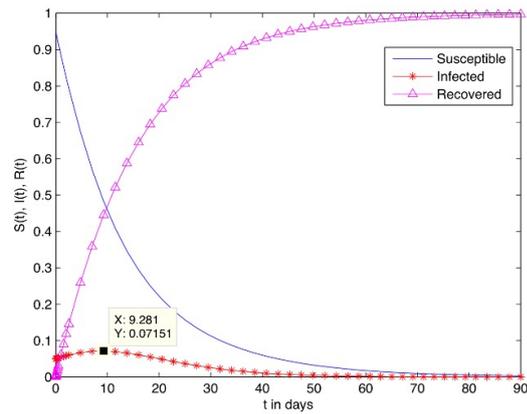
Figura 3.1. Soluzione del modello SIR con $\beta = 0,2$, $\mu = 0,1$, $S_0 = 0,95$, $I_0 = 0,05$ e vari tassi di vaccinazione: $v = 0$ (a), $v = 0,005$ (b), $v = 0,01$ (c).



(a) $v = 0.02$



(b) $v = 0.03$



(c) $v = 0.06$

Figura 3.2. Soluzione del modello SIR con $\beta = 0,2$, $\mu = 0,1$, $S_0 = 0,95$, $I_0 = 0,05$ e vari tassi di vaccinazione: $v = 0,02$ (a), $v = 0,03$ (b), $v = 0,06$ (c).

massimo di I corrisponde al 7% della popolazione ed è raggiunto dopo 9 giorni, contro il 18% dopo 27 giorni del caso senza vaccinazione.

3.2 Simulazione del problema di controllo ottimale

La simulazione numerica del problema di controllo ottimale è stata effettuata utilizzando il software ACADO. L'istante $t = 0$ e le condizioni iniziali sono le stesse del caso precedente, ma il periodo di studio considerato è leggermente più lungo ($T=100$). Nella Figura 3.3 vediamo sovrapposte le funzioni $I(t)$ e $\bar{I}(t)$, la prima è quella ottenuta senza alcun controllo, la seconda è relativa al controllo ottimale $\bar{u}(t)$. Nelle Figure 3.4 e 3.5 lo stesso confronto è stato fatto rispettivamente tra $S(t)$ senza controllo e $\bar{S}(t)$, e tra $R(t)$ senza controllo e $\bar{R}(t)$.

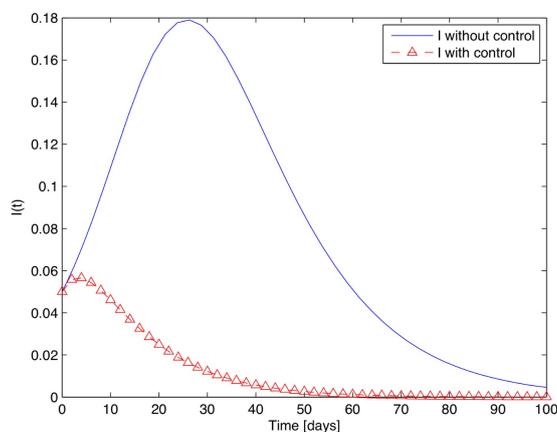


Figura 3.3. La funzione $I(t)$ ottenuta senza controllo e la funzione $\bar{I}(t)$

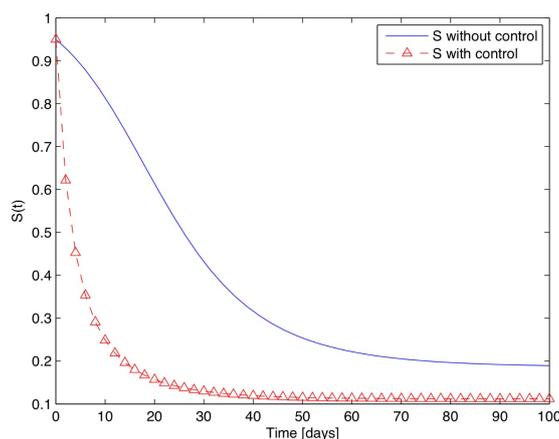


Figura 3.4. La funzione $S(t)$ ottenuta senza controllo e la funzione $\bar{S}(t)$

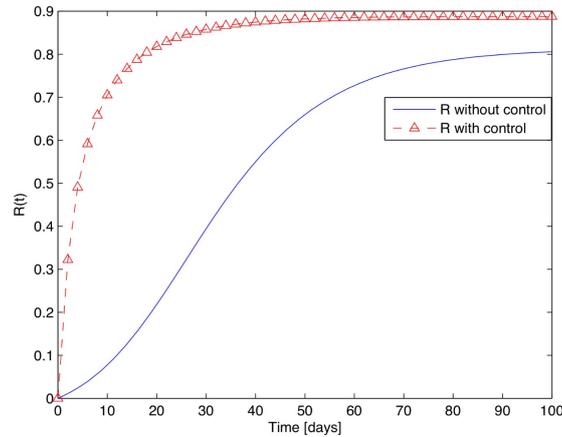


Figura 3.5. La funzione $R(t)$ ottenuta senza controllo e la funzione $\bar{R}(t)$

Infine in Figura 3.6 riportiamo il controllo ottimale $\bar{u}(t)$ ottenuto dalla simulazione.

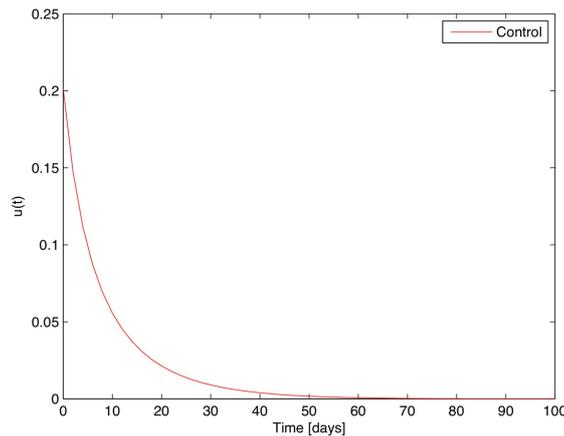


Figura 3.6. Il controllo ottimale $\bar{u}(t)$

3.3 Conclusioni

Come era da aspettarsi, il controllo ottimale apporta un notevole cambiamento all'evoluzione dell'epidemia. Possiamo vedere dalla Figura 3.6 che la strategia consiste nel vaccinare inizialmente il 20% della popolazione suscettibile, cioè il 19% dell'intera popolazione, dato che $S_0 = 0,95$. Questo si riflette in una rapidissima decrescita di $S(t)$, il cui valore dopo una settimana è ridotto a circa un terzo del valore iniziale, e parallelamente in una crescita improvvisa di $R(t)$. Alla fine del periodo di studio solo l' 11% della popolazione è ancora suscettibile e l' 88,7 % è rimosso, mentre nel caso senza controllo i valori corrispondenti sono 19% e 80,5%. La differenza sostanziale tuttavia si osserva nella Figura 3.3, tra

l'andamento di $I(t)$ senza controllo e quello della funzione ottimale $\bar{I}(t)$, come possiamo vedere più nel dettaglio in Figura 3.7. Nella sua evoluzione naturale, l'epidemia causa un aumento del numero di infetti per i primi 27 giorni, al termine dei quali la funzione $I(t)$ raggiunge il valore massimo $I_{max} \approx 0,179$. Questo significa che circa il 18% della popolazione è *contemporaneamente* infetto. Adottando la strategia di vaccinazione ottimale invece, in soli 4 giorni il numero di infetti inizia a diminuire e al suo massimo $\bar{I}(t)$ assume il valore $\bar{I}_{max} \approx 0,057$, che supera di pochissimo il valore iniziale $I_0 = 0,05$, se confrontato con I_{max} . In altre parole, il controllo ottimale \bar{u} determina una strategia che riesce a bloccare l'epidemia sul nascere.

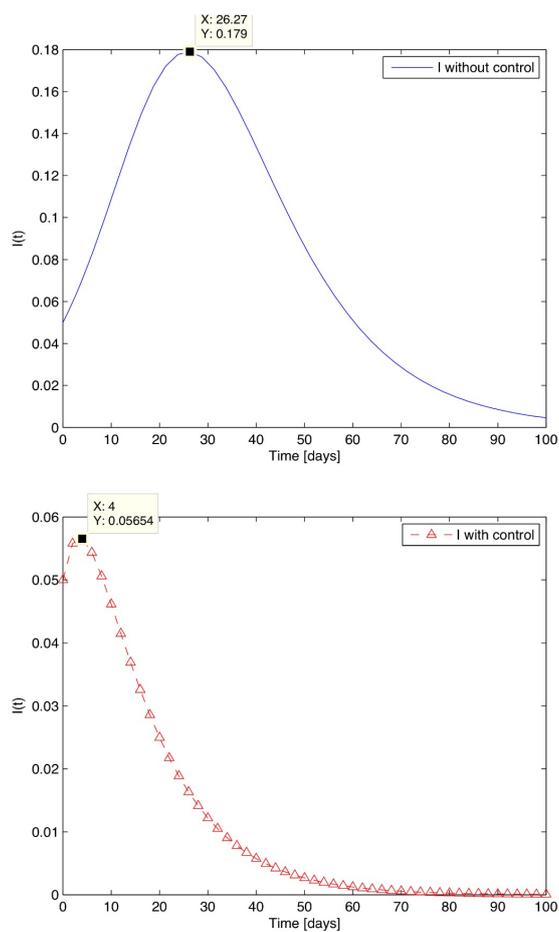


Figura 3.7. Confronto tra i massimi di $I(t)$ senza controllo e di $\bar{I}(t)$

Bibliografia

- [1] A. Rachah, D. F. M. Torres: Mathematical Modelling, Simulation, and Optimal Control of the 2014 Ebola Outbreak in West Africa, *Discrete Dyn. Nat. Soc.* 2015, Art. ID 842792, 9 pp., <http://dx.doi.org/10.1155/2015/842792>.
- [2] W. O. Kermack, A. G. McKendrick: A Contribution to the Mathematical Theory of Epidemics, *Proc. Royal Soc. London. Ser. A*, Vol. 115, Issue 772 (1927), 700-721.
- [3] L. Macchi: Modelli matematici di diffusione epidemica di informazioni, <http://www.dm.unipi.it/~acquistp/macchi.pdf> (2014).
- [4] W.H. Fleming, R.W. Rishel: *Deterministic and stochastic optimal control*, Springer, Berlin 1975.
- [5] C. Mascia, E. Montefusco: Modelli deterministici in epidemiologia, <http://www1.mat.uniroma1.it/people/mascia/NotEsercizi/modan2.pdf> (2010)
- [6] U. Ledzewicz, H. Schättler: On optimal singular control for a general SIR-model with vaccination and treatment, *Discrete and Continuous Dynamical Systems- Series A* (2011), *Dynamical systems, differential equations and applications*, 8th AIMS Conference, Suppl. Vol. II, 981-990.
- [7] H. Gaff and E. Schaefer: Optimal control applied to vaccination and treatment strategies for various epidemiologic models, *Math. Biosci. Eng.* 6 (2009), no. 3, 469-492.
- [8] V. Kaurov: Modeling a Pandemic like Ebola with the Wolfram Language, *Technical Communication & Strategy*, November 4, 2014.
- [9] J.-P. Penot: *Calculus without derivatives*, Graduate Texts in Mathematics, 266, Springer, New York, 2013.
- [10] G. Zaman, Y. H. Kang, I. H. Jung: Optimal treatment of an SIR epidemic model with time delay, *Biosystems* 98 (2009) 43-50.
- [11] E. Grigorieva, E. Khailov: Analytical Study of Optimal Control Intervention Strategies for Ebola Epidemic Model, *SIAM, 2015 Proceedings of the Conference on Control and its Applications*, 392-399, <http://dx.doi.org/10.1137/1.9781611974072.54>.
- [12] G. Chowell, N.W. Hengartner, C. Castillo-Chavez, P.W. Fenimore, J.M. Hyman: The basic reproductive number of Ebola and the effects of public health measures: the cases of Congo and Uganda, *J. Theoretical Biology*, in corso di stampa.
- [13] Ph. E. Lekone, B. F. Finkenstädt: Statistical Inference in a Stochastic Epidemic SEIR Model with Control Intervention: Ebola as a Case Study, *Biometrics* 62 (2006) 1170-1177.